等大球の充填構造

KAWAKITA, Kimio / TSUTSUMI, Yuhbun / 津々見, 雄文 / 川北, 公夫

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
5
(開始ページ / Start Page)
1
(終了ページ / End Page)
4
(発行年 / Year)
1968-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004258

等大球の充塡構造

教授　川北公夫
教授　津々見雄文

Arrangements of Spheres in Packing

Kimio Kawakita, *Professor*
Yuhbun Tsutsumi, *Professer*

Abstract

Several models of systematic arrangement of spheres in packing, proposed by Graton and Fraser, are often cited in hand-book and such others. But the authors find some errors in these models.

With regard to these arrangements, there are two kinds of model of unit cell developed by Slichter and by Mizuno-Tokumitsu respectively. They introduced their own equation for calculating porosity of packings by using the face angles of each model of unit cell. The authors indicate that both of the equations can only be used in special face angles of the unit cell, then they correct each equation to be able to use in any face angles.

1. まえがき

粉体の充塡体において骨格ともいうべきものは粒子の配列構造である。実際の粉体においては種々の配列構造をとるのであるが，最も簡単な模型として大きさの等しい球形の粒子の充塡体が考えられる。このような等大球が立体的に積み重ねられるときの模型的な粒子の配列については，すでに Graton と Fraser[1] が Fig. 1 に示した粒子配列を提出している。著者はその中に若干の誤りがあることを指摘し訂正したい。

つぎに，このような粒子配列については，隣接する8個の球の中心を結んで得られる菱面体の単位細胞が考えられており，Slichter の模型[2]，水野・徳光の模型[3]がある。これらの模型は1個の球に対応する充てん空間を表わすのにしばしば使われる。著者はいずれの模型も，ある限られた粒子配列の場合だけしか適用することができないことを指摘し，これらの模型がいかなる粒子配列の場合にでも使用できるような一般式を提出する。

2. Graton, Fraser の粒子配列

Fig. 1 でまず平面的な一層の場合について球の配列をみると，(a) のように4点で互いに接触

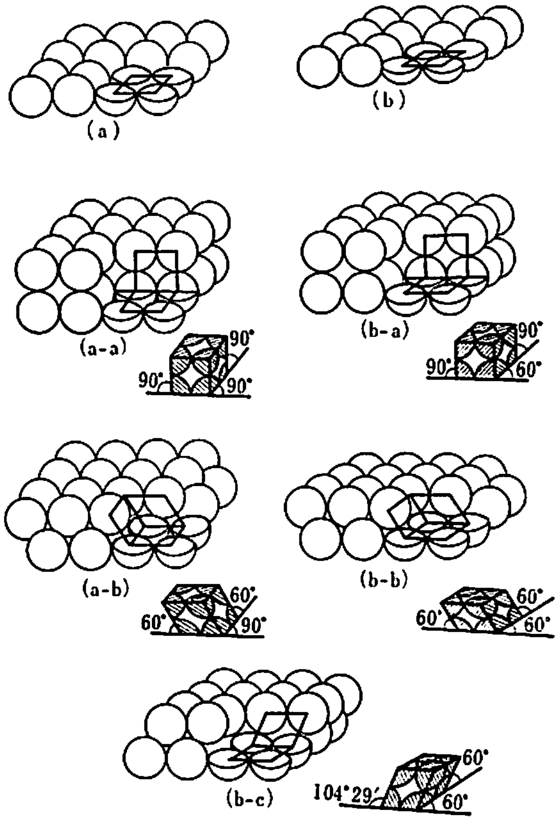

Fig. 1 Arrangements of spheres

する正方系のものと，(b) のように 6 点で接触する六方系のものとがある。このような配列が立体的に層状に積み重ねられる場合には次の 4 通りの方法がある。 すなわち (a–a) のように正方系のものが正方系的にそのまま重なった場合。(b–a) のように六方系のものが正方系的にそのまま重なった場合。(a–b) のように正方系のものが六方系的に重なった場合。(b–b) のように六方系のものが六方系的に重なった場合とがある。 ただし (a–b) の充塡と (b–b) の充塡はいずれも結晶学でいう面心立方格子に相当し，全く同じ充塡を異なる角度から切りとったことになる。

上記の他に，(b–a) と (b–b) との中間的な充塡形式として，(b–c) のように (b–a) の上下の層がそのまま半径の距離だけ横にずれた場合がある。

以上の配列方法によって粒子の間にできる空隙は当然大小があり，これらの充塡の特性を Table 1. に示す。

Table 1.

充塡形式	充塡形式の名称	接触点の数	空隙率(%)
a–a	立方充塡	6	47.64
b–a	正斜方充塡	8	39.54
a–b	菱面体充塡	12	25.95
b–b	菱面体充塡	12	25.95
b–c	Tetragonal·sphenoidal	10	30.19

3. Slichter の模型

前節で述べたような充填形式を表わすために， Fig. 2 に示したような隣接する8個の球の中心を結んで得られる菱面体の単位細胞を Slichter の模型といい，この菱面の角 θ が 60° から 90° に変わるにともない充填形式の変化が表わされる。またこの単位細胞の空隙率 n は角 θ を使って式 (1) のように表わされる。

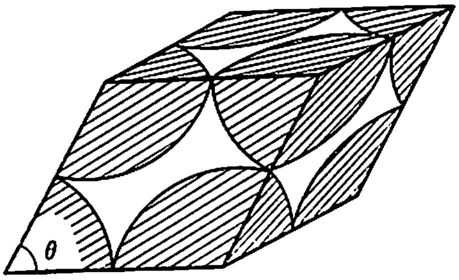

Fig. 2 Slichter's unit cell

$$n=1-\frac{\pi}{6(1-\cos\theta)\sqrt{1+2\cos\theta}} \qquad (1)$$

すなわち $\theta=60°$ のとき $n=25.95\%$，$\theta=90°$ のとき $n=47.64\%$ となる。

4. 水野，徳光の模型

水野，徳光は Fig. 3 に示すように，上記 Slichter 模型と同様な均一球のつめこみ模型を考え，図の $\angle O_1'O_1O_2$ を θ とした場合に，粒子相互が完全に接触しているときには，空隙率 n は (2) 式で表わされる。

$$n=1-\frac{\pi}{6}\operatorname{cosec}\theta \qquad (2)$$

すなわち $\theta=45°$ で $n=25.95\%$，$\theta=90°$ で $n=47.64\%$ となる。

5. 考　　察

(a): Graton, Fraser によれば，Fig. 1 に示した (b–b) の単位胞の角度は 60°，60°，90° であり，また (b–c) の単位胞は 60°，60°，116°34′ となっている。しかもそれらの角度がそのまま一般に広く使用されハンドブックや便覧などに引用されている

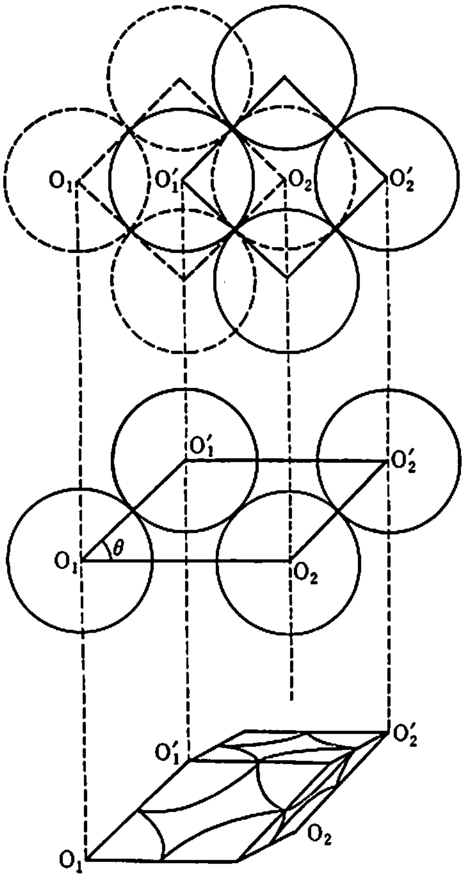

Fig. 3 Mizuno-Tokumitsu!s unit cell

が[4]，著者の計算によれば (b–b) の単位胞の角度は 60°，60°，60° とするべきであり，(b–c) の角度は 60°，60°，104°29′ となる。

(b)： Slichter の模型による空隙率の計算式 (1) は，実際には限られた場合だけしか使用することができない。すなわち単位細胞の3つの角度がすべて同一な場合だけしか使えない (Fig. 1 の (a–a) や (b–b) のような場合に限られる)。

従って著者は一般的にどのような角度の単位細胞についても直ちに空隙率を計算できるような，(1) 式に代るべき次の (3) 式を提出する。すなわち単位胞の3つの角を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とすれば空隙率 n は次式で与えられる。

$$n=1-\frac{\pi}{6\sqrt{1-\cos^2\theta_1-\cos^2\theta_2-\cos^2\theta_3+2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3}} \qquad (3)$$

この場合に $\theta_1=\theta_2=\theta_3$ であれば，もちろん式 (1) と等しくなる。

(c)： 水野，徳光が提出した空隙率の計算式 (2) も同様に特別な場合だけしか使用することができない。すなわち単位細胞の上，下の面が正方形である場合 (Fig. 1 の (a–a) や (a–b) のような場合) に限ってしか使うことができない。

従って著者は一般的に使える計算式として (2) 式に代るべき次の (4) 式を提出する。Fig. 3 において水野，徳光が指定した角 θ のほかに，底面の1つの角 θ' が与えられなければならない。この場合の空隙率 n は次式で与えられる。

$$n=1-\frac{\pi}{6}\operatorname{cosec}\theta\operatorname{cosec}\theta' \qquad (4)$$

もちろん $\theta'=90°$，すなわち底面が正方形の場合は式 (2) と等しくなる。

(昭和41年12月17日受理)

文 献

1) L.C. Graton, H.J. Fraser： J. Geology, 43, [8] 785 (1935).
2) 久保輝一郎ほか： 粉体 (理論と応用), 210 (1962), 丸善刊.
3) 水野高明，徳光善治： 九大工学集報, 30, 170 (1957).
徳光善治： 材料, 13, 752 (1964).
4) J.M. Dallavalle： "Micromeritics", 128 (1948), Pitman Publ. Co..
井伊谷鋼一編： "粉体工学ハンドブック", 94 (1965), 朝倉書店.
化学工学協会編： "化学工学便覧", 668 (1958), 丸善刊.
粉体工学データ (28)： 粉体工学, 3, 88 (1966).