法政大学学術機関リポジトリ
HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

PDF issue: 2024-05-26

Location on network

TANAKA, George / 田中, 穣二

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Technical College of Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
6
(開始ページ / Start Page)
17
(終了ページ / End Page)
25
(発行年 / Year)
1969-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004250

LOCATIONS ON NETWORK

助教授　田　中　穣　二

助教授　駒　木　悠　二

助　手　伊　藤　勝　子

Locations on Network

George Tanaka, *Assistant Professor*
Yuji Kamaki, *Assistant Professor*
Katsuko Ito, *Assistant*

Abstract

In this paper we present a method for finding the optimum Iocations in a network. A model of a network is a graph G with weights attached to each of its vertices as well as its branches.

The problem is to find the optimum locations such that total cost, sum of establishment cost and transportation cost, is a minimum. We assume any optimum locations can be anywhere along any branch of G. But the two theorems in this paper prove that the optimum locations are a subset of vertices.

So one only examines all subsets of vertices. Numerical algorithm is designed to show how the details of compatation for finding a p-optimum location of a graph may be carried out.

Then one example and computer program are shown.

1．従来の方法の問題点

倉庫がどこにあったらよいかという問題を取り上げる。普通に行われる方法では，地図の上にX軸，Y軸をとり，商品供給地と需要地をプロットして行く。

いま商品の供給地点を (x_1, y_1)，$\cdots$，(x_m, y_m) 供給地点の商品の供給量をそれぞれ h_1，$\cdots$，h_m とする。需要地点を (x_{m+1}, y_{m+1})，$\cdots$，(x_n, y_n) とし，需要量をそれぞれ h_{m+1}，$\cdots$，h_n とする。

需要の合計と供給の合計は一般に一致するから

$$\sum_{j=1}^{m} h_i = \sum_{i=m+1}^{n} h_i$$

である。倉庫の位置を（x, y）としたとき，重心解といわれるものは次の式で計算される。

$$(1)\quad x=\sum_{i=1}^{n} h_i\cdot x_i/\sum_{i=1}^{n} h_i$$
$$y=\sum_{i=1}^{n} h_i\cdot y_i/\sum_{i=1}^{n} h_i$$

供給地点または需要地点（x_i, y_i）と倉庫（x, y）の間の直線距離d_iは，

$$d_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}\qquad (i=1,\cdots,n)$$

距離中心解と呼ばれるものは

$$(2)\quad x=\sum_{i=1}^{n}(x_i/d_i)/\sum_{i=1}^{n}(1/d_i)$$
$$y=\sum_{i=1}^{n}(y_i/d_i)/\sum_{i=1}^{n}(1/d_i)$$

重量距離中心解は

$$(3)\quad x=\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot h_i/d_i)/\sum_{i=1}^{n}(h_i/d_i)$$
$$y=\sum_{i=1}^{n}(y_i\cdot h_i/d_i)/\sum_{i=1}^{n}(h_i/d_i)$$

(2), (3)の解を求めるには倉庫の位置の初期値をあたえ反復法によって最終解がもとめられる。たとえば供給地が（10, 0），（0, 10）の2地点で，供給量がそれぞれ1，需要地点が原点で（0, 0），需要量が2であるとき，(1)の重心解は$x=y=2.5$ になる。

この解$x=y=2.5$ を初期解としてd_1，d_2，d_3を計算し，これを(2)と(3)に入れれば次の解が得られる。これを何度も反復すると距離中心解および重量距離中心解が求められる。

供給地または需要地iから倉庫まで行くのに必要とする時間をt_iとすれば，平均速度は$m_i=d_i/t_i$になる。(3)式でd_iの代りにm_iを用いたものが時間重量距離中心解といわれるものになる。したがって

$$(4)\quad x=\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot h_i/d_i)/\sum_{i=1}^{n}(h_i/d_i)$$
$$y=\sum_{i=1}^{n}(y_i\cdot h_i/d_i)/\sum_{i=1}^{n}(h_i/d_i)$$

が時間重量距離中心解になる。この解も反復法によって求められる。

この4つの倉庫の立地が従来使われていた方法であるがこれには次のような問題がある。

(I) 倉庫の位置と供給または需要地点との間の距離が直線距離として計算される。

(II) 倉庫の建設費を考えないで商品の輸送費用だけを問題にしている。

(III) 倉庫は1カ所だけと限定されている。

(i) の直線距離の問題を避けるためにPlaner Graph上の立地問題を解くことにした。このとき倉庫の立地をnodesだけに限るかどうかという問題が生じるが，ここではnodesだけに限らず，branches上のどの地点でもよいと仮定している。

(ii) の建設費は多くのモデルで取り入れられていないがここではConcaveという条件の下で取り入れている。倉庫の立地は建設費と輸送費の合計の総費用を最小とする地点として定めている。

(iii) の倉庫の個数は数カ所でよいと仮定する。このモデルは3のPコのLocationの決定問題である。

2．1つのLocationの決定

2.1 Planer Graphの定義

$G=\{V, B\}$

$V=\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ vertices or nodes

$H=\{h_1, h_2, \cdots h_n\}$ weights

$B=\{b_1, b_2, \cdots b_m\}$ branches

$br=(v_p, v_q)=b(p, q)$ branch with adjacent vertices v_p, v_q

$d(x, y)$ shortest route from x to y

2.2 xを$b(p, q)$上の点とする。

$$d(x, v_1)=min((d(x, v_p)+d(v_p, v_i), d(x, v_q)+d(v_q, v_i))$$

$$V=U+W$$

$$U=\{v_i; d(x, v_p)+d(v_p, v_i)<d(x, v_q)+d(v_q, v_i)\}$$

$$W=\{v_i; d(x, v_p)+d(v_p, v_i)<d(x, v_q)+d(v_q, v_i)\}$$

2.3 Estabishment cost $e(x)$ の定義

$e(x)$は次の条件を満足するものとする。

xが$b(p\ q)$上にあるとき

$$e(x) \geqq \frac{d(x, v_q)e(v_p)+d(x, v_p)e(v_q)}{d(v_p, v_q)}$$

$$=d(x, v_q)e'(v_p)+d(x, v_p)e'(v_q)$$

2.2 Transportation cost $t(x)$ の定義

$$t(x)=\sum_V h_i \cdot d(x, v_i)$$

2.5 Total cost = Establishment cost + Transportation cost

（定理1）Total costがminimumの点はある vertex 上にある。

（証明）

xが$b(p, q)$上にあるとする。

$$\text{Total cost}=\sum_V h_i \cdot d(x, v_i)+e(x)$$

$$\geq \sum_U h_i \cdot d(x, v_i) + \sum_W h_i \cdot d(x, v_i) + d(x, v_q) e'(v_p) + d(x, v_p) e'(v_q)$$

$$= \sum_U h_i (d(x, v_p) + d(v_p, v_i)) + d(x, v_p) e'(v_q) + \sum_W h_i (d(x, v_q) + d(v_q, v_i)) + d(x, v_q) e'(v_p)$$

ここで，次の二つの場合が考えられる。

(1) $\sum_U h_i + e'(v_q) \geq \sum_W h_i + e'(v_p)$

(2) $\sum_U h_i + e'(v_q) < \sum_W h_i + e'(v_p)$

(1)の場合

$d(x, v_q) = d(v_p \cdot v_q) - d(x, v_p)$,

$d(v_p, v_q) + d(v_q, v_i) \geq d(v_p, v_i)$ を代入して整頓すると，

$$\text{Total cost} \geq \{\sum_U h_i + e'(v_q) - (\sum_W h_i + e'(v_p))\} d(x, v_p) + \sum_V h_i \cdot d(v_p, v_i) + e'(v_p)$$

(1)の仮定より

$$\text{Total cost} \geq \sum_V h_i \cdot d(v_p, v_i) + e(v_p)$$

即ち

$$\sum_V h_i \cdot d(x, v_i) + e(x) \geq \sum_V h_i \cdot d(v_p, v_i) + e(v_p)$$

(2)の場合

$d(x, v_p) = d(v_p, v_q) - d(x, v_q)$,

$d(v_p, v_q) + d(v_p, v_i) \geq d(v_p, v_i)$ を代入して整頓すると，

$$\text{Total cost} \geq \{\sum_W h_i + e'(v_p) - (\sum_V h_i + e'(v_q))\} d(x, v_q) + \sum_V h_i \cdot d(v_q, v_i) + d(v_p, v_q) e'(v_q)$$

(2)の仮定より

$$\text{Total cost} \geq \sum_V h_i \cdot d(v_q, v_i) + e(v_q)$$

故に

$$\sum_V hi \cdot d(x, v_i) + e(x) \geq \sum_V h_i \cdot d(v_q, v_i) + e(v_q)$$

(証明終り)

3．Pコの Locations の決定

3.1 $G=\{V, B\}$

$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ vertices or nodes

$H=\{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$ weights

$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ branches

$b_r=[v_p, v_q]=b(p, q)$

$X_p=\{x_1, x_2, \cdots, x_p | x_i \text{ is on } G\}$

3.2 $d(v_i, X_p)=min(d(v_i, x_1), d(v_i, x_2), \cdots, d(v_i, x_p))$

$V=V_1+V_2+\cdots+V_p$

$V_1=\{v_i; d(v_i, X_p)=d(v_i, x_1)\}$

$V_2=\{v_i; d(v_i, X_p)=d(v_i, x_2)\}$

$\vdots$

$V_p=\{v_i; d(v_i, X_p)=d(v_i, x_p)\}$

3.3 Establishment cost $e(X_p)$

$$e(X_p)=e(x_1)+e(x_2)+\cdots\cdots+e(x_p)$$

3.4 Transportation cost $t(X_p)$

$$t(X_p)=\sum_V h_i \cdot d(v_i, X_p)$$

3.5 Total cost = Establishment cost + Transportation cost

（定理2） Total cost を minimum にするPコの点の集合 X_p は，ある vertex Pコの集合 V_p^* で与えられる。

（証明）

$$\text{Total cost}=\sum_V h_i \cdot d(v_i, X_p)+e(X_p)$$

$$=\sum_{V_1} h_i \cdot d(v_i, x_1)+e(x_1)+\sum_{V_2} h_i \cdot d(v_i, x_2)+e(x_2)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+\sum_{V_p} h_i \cdot d(v_i, x_p)+e(x_p)$$

$$\sum_{V_1} h_i \cdot d(v_i, x_1)+e(x_1)=\sum_V h_i' \cdot d(v_i, x_1)+e(x_1)$$

但し

$$h_i'=\begin{cases} h_i & \text{for } i \ v_i \text{ in } V_1 \\ 0 & \text{the other } i \end{cases}$$

すると定理1より

$$\sum_{V} h_i'\cdot d(v_i,\ x_1)+e(x_1)\geqq\sum_{V} h'_i\cdot d(v_i,\ v_1^*)+e(v_1^*)$$

なる vertex v_1^* が存在する。

即ち $\sum_{V_1} hi\cdot d(v_i,\ x_1)+e(x_1)\geqq\sum_{V_1} hi'\cdot d(v_i,\ v_1^*)+e(v_1^*)$

同様に

$$\sum_{V_2} hi\cdot d(v_i,\ x_2)+e(x_2)\geqq\sum_{V_2} hi\cdot d(v_i,\ v_2^*)+e(v_2^*)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sum_{V_p} hi\cdot d(v_i,\ x_p)+e(x_p)\geqq\sum_{V_p} hi\cdot d(v_i,\ v_p^*)+e(v_p^*)$$

以上より

$$\sum_{V} hi\cdot d(v_i,\ X_p)+e(X_p)\geqq\sum_{V_1} hi\cdot d(v_i,\ v_1^*)+e(v_1^*)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+\sum_{V_p} hi\cdot d(v_i,\ v_p^*)+e(v_p^*)$$

$V_p^*=\{v_1^*,\ v_2^*,\cdots\cdots,\ v_p^*)$ とすると，

$$\sum_{V} hi\cdot d(v_i,\ V_p^*)+e(V_p^*)\leqq\sum_{V_1} hi\cdot d(v_i, v_1^*)$$

$$+\cdots\cdots\cdots+\sum_{V_p} hi\cdot d(v_i, v_p^*)+e(V_p^*)$$

よって

$$\sum_{V} hi\cdot d(v_i,\ X_p)+e(X_p)\ \geqq\sum_{V} hi\cdot d(v_i,\ V_p^*)+e(V_p^*)$$

（証明終り）

4．N点からPコの最適位置点を決定するAlgorithm

1．N点に関するdistance matrix D を作る。

(dij: v_i 点から v_i 点までの distance)

2．Dのi 行の各 element に hi (v_i 点の weight) をかけたmatrix D^* を作る。

($dij^*=dij\times hi$)

3．N点からPコ選ぶすべての組合せ，$\{v_{i1},\ v_{i2},\cdots, v_{ip}\}$ について，

$$\min_{\text{すべての組合せ}}\left(\sum_{i=1}^{n} min(d^*_{i\,i1},\ d^*_{i\,i2},\cdots, d^*_{i\,ip})\right)$$

を計算し，その時の組合せが求める最適位置点を示す。

このアルゴリズムによる NarcⅢ プログラムは次のようになる。

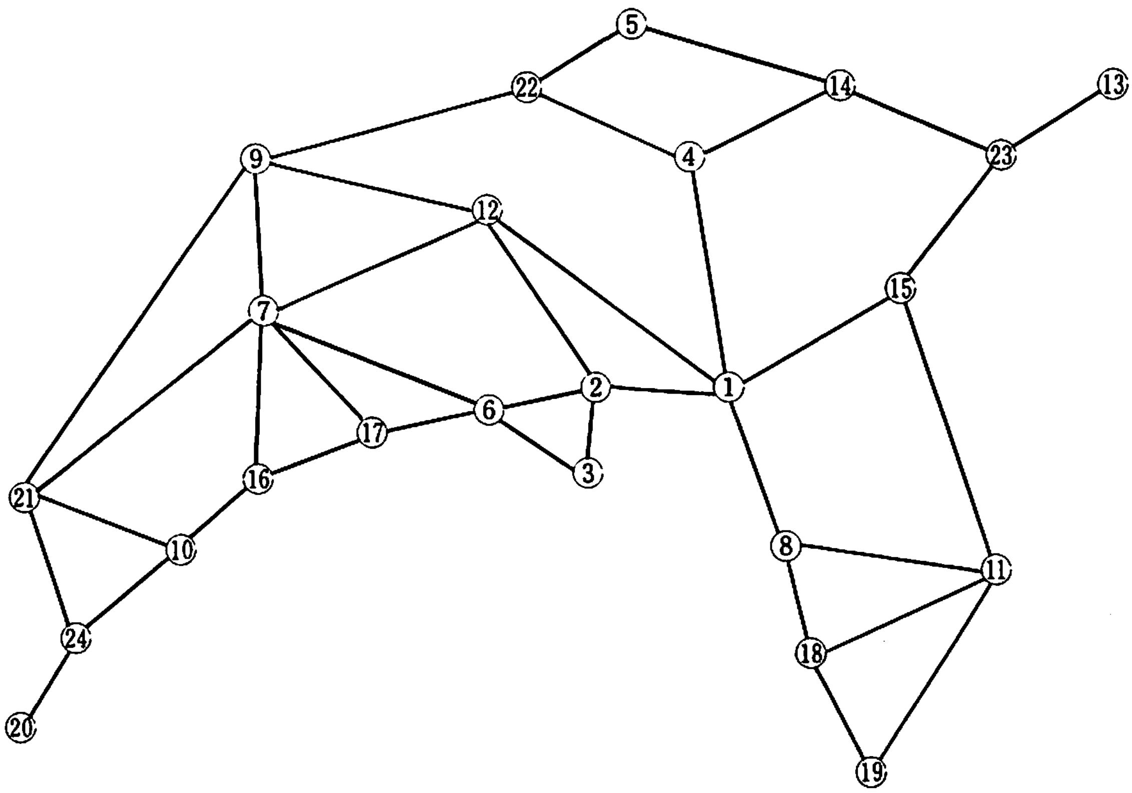
プログラム

```
      TITLE  LOC
      DIMENSION  D(30, 30), H(30), M(50), M1(50)
      READ(5)MM, NN, ((D(I, J), I#1, MM), J#1, MM),
     @(H(I), I#1, MM)
      DO  25  I#1, MM
      DO  25  J#1, MM
   25 D(I, J)#D(I, J)※H(I)
      SS#999999. E40
      NN1#NN-1
      K#1
      M(1)#1
   50 DO  55  I#K, NN1
   55 M(I+1)#M(I)+1
      K#NN
   70 SDM#0.
      DO  30  I#1, MM
      DM#999999. E40
      DO  20  J#1, NN
      L#M(J)
      IF(DM-D(I, L))20, 20, 15
   15 DM#D(I, L)
   20 CONTINUE
   30 SDM#SDM+DM
      IF(SDM-SS)40, 60, 60
   40 SS#SDM
      DO  110 I#1, NN
  110 M1(I)#M(I)
   60 M(NN)#M(NN)+1
      IF(M(NN)-MM)70, 70, 80
   80 K#K-1
      IF(K)90, 10, 90
   90 M(K)#M(K)+1
      IF(M(K)+NN-K-MM)50, 50, 80
```

```
   10  WRITE(6,200)(M1(I), I#1, NN)
  200  FORMAT(1H1///5X, 17HOPTIMAL  LOCATIONS/
     @ (1H0, 5X, 10I7)
       WRITE(6, 201) SS
  201  FORMAT(1H0, 5X, 19HTRANSPORTATION  COST, F15, 2)
       STOP
       END
       JOBEND
```

5．計　算　例

5.1 DATA



	Weight		Weight		Weight
1．東　　京	538.5071	9．はちおおじ	8.2539	17.ちがさき	4.7013
2．よこはま	95,1189	10．おだわら	7.5334	18.きさらず	3.7901
3．よこすか	25.0533	11．ちょうし	7.3512	19.たてやま	3.7291
4．う　ら　は	11.5019	12．むさしの	7.3149	20.い　と　う	3.6137
5．たかさき	9.2664	13．ひ　た　ち	5.6066	21.ふじよしだ	3.6023
6．かまくら	8.5391	14．あしかが	5.2810	22.お　お　め	3.5658
7．ふじさわ	8.4581	15．ま　つ　ど	5.2531	23.み　　と	3.4820
8．ふなばし	8.3348	16．ひらつか	5.2381	24.あ　た　み	3.4509

このほか node の間の距離が DATA になる。

5.2 計算結果

3コの Locations は ①東京 ⑥かまくら ㉑ふじよしだ になり，これに対応する輸送費は25593.81になる。

参考文献

Maranzana: : On the Location of Supply Point to Minimize Transport cost (Opns. Res. Quarterly) 1964

Hakimi : Opti mum Location of Switching Centers Opns. Res. 1964.

: Opti mum Distributions of Switching Centers Opns. Res. 1965.

Levy : An Extended Therorem for Location on a Network Ph. D. Dissertion Submited the Univ. of Chicago. (Opns. Res, Quarterly) 1966

アイサード(木内沢)：立地と空間経済 1964.

ボアソックス(田中訳)：食料集配センターの立地，科学技術庁資源局，1966.