べき集合上の単調増加関数の不動点

KANAYAMA, Yutaka / 金山, 裕

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
6
(開始ページ / Start Page)
47
(終了ページ / End Page)
50
(発行年 / Year)
1969-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004247

べき集合上の単調増加関数の不動点

講師　金　山　　裕

Yutaka Kanayama, *Lecturer*

Fixed points of increasing functions: $(2^s)^n \to (2^s)^n$ is connected with context-free languages in computer science.

Fixed pints are obtained by iterations of simultaneous substitution. but the process is rather complicated and it is hard to see local properties of each function. This report shows a simpler method to obtain them by iteration of local substitution.

句構造言語は計算機用語の一つのモデルである。それは文法あるいは方程式の形で定義される。[1] 前者に関しては比較的良く知られているが後者についてはその性質は未だ良くわかっていない。本稿はそのための予備結果を伝える。ここで取り扱う集合とその演算については全く制限を加えていないから，得られた結果の応用範囲も従って形式言語に留まらない。

任意の集合のべき集合の上で定義された単調増加関数の最小不動点を求める方法は良く知られているが，具体的に不動点を求める方法としては適当でない。本稿で述べる方法は解を局所的に求めてゆくものであり，計算が容易に行えるだけでなく，関数の局所的な特徴をとらえることができる点で有利と考えられる。

定義1．Sは任意の集合，nは任意の正整数とする。

$$X=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in(2^s)^n$$
$$Y=(y_1,\ \cdots,\ y_n)\in(2^s)$$

としたとき，$X\supset Y$ $(X=Y)$ というのは，すべてのiについて，

$x_i\supset y_i\,(x_i=y_i)$ なるとき，かつそのときに限るとする。

$X\cup Y$は$(x_1\cup y_1,\ \cdots, x_n\cup y_n)$を表わす。また$\phi_n$は$(\phi,\ \cdots,\ \phi)$を表わす。

関数f_i：$(2^s)^n\to 2^s$ $(1\leqq i\leqq n)$　があるとき，

$F:(2^s)^n \to (2^s)^n$

も関数である。

$F(X)=(f_1,\cdots,f_n)(X)=(f_1(X),\cdots,f_n(X))$

F又はfが単調増加であるというのは，$X \subset Y$ならば$F(X) \subset F(Y)$，又は$f(X) \subset f(Y)$なることに等しいと定義する。

系1.　$F=(f_1,\cdots,f_n)$ が単調増加ならば各$f_i(1 \leqq i \leqq n)$ も単調増加であり，その逆も成立する。

定義2．$M_F \in (2^s)^n$ を次のように定義する。

(1)　$M_F^0=\phi_n$

(2)　$M_F^{k+1}=F(M_F^k)$　　　　$: k \geqq 0$

(3)　$M_F=\bigcup_{k=0}^{\infty} M_F^k$

補題2.　任意のkについて$M_F^k \subset M_F^{k+1}$

(証明) (1)　$M_F^0=\phi_n \subset M_F^1$.

(2)　$M_F^m \subset M_F^{m+1}$ ならば$M_F^{m+1}=F(M_F^m) \subset F(M_F^{m+1})=M_F^{m+2}$

補題3．$M_F=F(M_F)$

(証明) (1)　任意のkについて$M_F^k \subset M_F^{k+1}=F(M_F^k) \subset F(M_F)$

$\therefore M_F=\bigcup_k M_F^k \subset F(M_F)$

(2)　$\alpha \in F(M_F)$とする。　$F(M_F^0) \subset F(M_F^1) \subset \cdots \subset F(M_F)$

であるから，lが存在して$\alpha \in F(M_F^l)=M_F^{l+1} \subset M_F$　　$\therefore F(M_F) \subset M_F$

定理4.　M_FはFの最小不動点である。

(証明) M_FはFの不動点の一つである。XはFの任意の不動点とする。

(1)　$M_F^0=\phi_n \subset X$.

(2)　$M_F^m \subset X$ならば$M_F^{m+1}=F(M_F^m) \subset F(X)=X$.

よって任意のkについて$M_F^k \subset X$.　　$\therefore M_F=\bigcup_k M_F^k \subset X$.

定義3．任意のXについて$F(X) \subset G(X)$であるとき，かつそのときに限り$F \leqq G$と定義する。

系5.　$F \leqq G$ならば$M_F \subset M_G$

(証明) $M_F^0 \subset M_G^0$，$M_F^m \subset M_G^m$ ならば $M_F^{m+1}=F(M_F^m) \subset G(M_F^m)$
$\subset G(M_G^m)=M_G^{m+1}$，　よって任意の$k$について$M_F^k \subset M_G^k$　$\therefore M_F \subset M_G$.

定義4.　$M_F=M_G$なるとき，かつそのときに限り$F \cong G$と定義する。

系6．　$F \leqq G$ かつ $G \leqq F$ ならば $F \cong G$

定理7．　$F(X)=(f_1, \cdots, f_n)$

$G(X)=(g_1, \cdots, x_n)$

$f_i(X)=f_i(x_1, \cdots, x_n)$

$g_i(X)=f_i(\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{in})$

$\alpha_{ij}=x_j \ or \ f_j(X)$

（証明）$M_F^0 \subset M_G^0$、$M_F^m \subset M_G^m$ ならば $M_F^{m+1}=F(M_F^m) \subset G(M_F^m) \subset G(M_G^m)=M_G^{m+1}$，よって任意の k について $M_F^k \subset M_G^k$．　$\therefore M_F \subset M_G$．

$N_F^0 \subset M_F^0$．$M_G^m \subset M_F^{2m}$ ならば $M_G^{m+1}=G(M_G^m) \subset G(M_F^{2m}) \subset F(F(M_F^{2m}))=M_F^{2m+2}$，よって任意の k について $M_G^k \subset M_F^{2k}$．　$\therefore M_G \subset M_F$．

定義5．　$(2^s)^n \to 2^s$ なる函数

$f(X)=f(x_1, \cdots, x_n)=f(X'; x_n)$

$X'=(x_1, \cdots, x_{n-1})$

に関連した関数 $\theta_f : (2^s)^{n-1} \to 2^s$ を次により定義する。

(1)　$\theta_f^0(X')=\phi$

(2)　$\theta_f^{k+1}(X')=f(X'; \theta_f^k(X'))$　　；$k \geqq 0$

(3)　$\theta_f(X')=\bigcup_k \theta_f^k(X')$

補題8．任意の $k \geqq 0$ について $\theta_f^k \leqq \theta_f^{k+1}$．

（証明）$\theta_f^0=\phi \leqq \theta_f^1$ である。$\theta_f^m \leqq \theta_f^{m+1}$ ならば，任意の X' について，

$\theta_f^{m+1}=f(X', \theta_f^m) \subset f(X', \theta_f^{m+2})=\theta_f^{m+2}$．　$\therefore \theta_f^{m+1} \leqq \theta_f^{m+2}$．

よって任意の k について $\theta_f^k \leqq \theta_f^{k+1}$．

補題9．　$\theta_f(X') \cong f(X'; \theta_f(X'))$

（証明）任意の X' について $\theta_f^k(X') \subset f(X', \theta_f^k(X')) \subset f(X'; \theta_f(X'))$

$\theta_f(X')=\bigcup \theta_f^k(X') \subset f(X'; \theta_f(X'))$，

一方，$\alpha \in f(X'; \theta_f(X'))$ ならば，$f(X'; \theta_f^0(X')) \subset f(X'; \theta_f^1(X')) \subset \cdots \subset f(X'; \theta_f(X'))$ であるから，m が存在して，$\alpha \in f(X'; \theta_f^m(X'))=\theta_f^{m+1}(X') \subset \theta_f(X')$

定理10．$\psi_o : (2^s)^{n+1} \to 2^s$ を $\psi \cong f(X'; \psi(X'))$ の任意の解とすれば $\theta_f(X') \leqq \psi_o(X')$．

（証明）$\theta_f^0(X')=\phi \leqq \psi_o(X')$，また $\theta_f^m(X') \leqq \theta_f^{m+1}(X')$ ならば，任意の X' について，$\theta_f^{m+1}(X')=f(X'; \theta_f^m(X')) \subset f(X'; \psi_o(X'))=\psi_o(X')$

よって任意の k について $\theta_f^k \subset \psi_o$．　$\therefore \theta_f \leqq \psi_o$．

補題11．　$F(X)=(f_1, \cdots, f_n)(X)$

$G(X)=(g_1, \cdots, g_n)(X)$

$$g_i(X)=\begin{cases} f_i(X) & : i \neq n \\ \theta_f(X') & : i = n \end{cases}$$

ならば　$F \cong G$

（証明）Gの最小不動点はFの不動点である。$\therefore M_G \supset M_F$. また，$F$の最小不動点は$G$の不動点である。　$\therefore M_F \supset M_G$.

定理12. $X=F(X)$ の最小不動点を代入およびθ_fを求める操作を有限回繰り返すことによって求めることができる。

（証明）(1) $n=1$ ならば$X=x_1$，$F=f_1$であるから，$x_1=\theta_f=M_F$ が最小不動点である。

(2) $n=m$のとき命題が真であるとする。$n=m+1$と仮定すると，

$F(X)=(f_1, \cdots, f_{m+1})(X)$

$G(X)=(g_1, \cdots, g_{m+1})(X)$

$X=(x_1, \cdots, x_{m+1})$

$X'=(x_1, \cdots, x_m)$

$$g_i(X)=\begin{cases} f_i(x_1, \cdots, x_m, \theta_f(X')) & ; \quad i=m+1 \\ \theta_f(X') & ; \quad i=m+1 \end{cases}$$

とすると，補題11と定理7によって$M_F=M_G$であり，かつすべてのg_iにはx_{m+1}が現われない。よって，

$G'(X')=(g_1, \cdots, g_m)(X')$

とおくとM_GとM_G'はx_{m+1}を除いて一致する。G'は$n=m$であるからその最小不動点が求まる。それを$\theta_f(X')$ に代入すればG（従ってF）が解ける。

参　考　文　献

1) Ginsburg: Mathematical Theory of Context-Free Language, McGraw-Hill, 1966.