

倒立HPシエルに関する研究(1)

AOKI, Shigeru / KOJIMA, Takashi / 小島, 孝 / 青木, 繁

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部
研究集報

(巻 / Volume)

6

(開始ページ / Start Page)

51

(終了ページ / End Page)

64

(発行年 / Year)

1969-03

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004246>

倒立HPシェルに関する研究 (その1)

教 授 青 木 繁

大学院生 小 島 孝

“Theoretical and Experimental Study on the Umbrella Type Hyperbolic Paraboloid Shells.”

Shigeru Aoki, Dr.-Eng. *Professor.*

Takashi Kojima, *Graduate Student.*

Abstract

Structural behavior of the umbrella type hyperbolic paraboloid shells will be discussed in this paper.

The stress distribution of HP shells, resulting from membrane action only, is well known since the initial presentation of F. Aimond in 1936 and later by K.G. Tester, A.L. Parme, F. Candela and others.

However, the membrane theory as a basis for design may be dangerously oversimplified.

Recently J.F. Mirza has considered the bending moment in the umbrella type HP shell by using finite difference method.

In this paper, it will be investigated that the boundary condition of folded plates should be introduced accurately into the ridge and structural characteristic of HP shells will be considerably influenced by the edge conditions.

In Ch. I, The structural characteristics of HP umbrella shells with various boundary conditions will be investigated by using finite difference method, in which both bending and membrane effects will be introduced.

In Ch. II, The numerical example of some models will be shown to explain the effects of various supporting conditions.

In Ch. III, The experimental studies on the deformation, the failure pattern and the collapse load of HP umbrella shells will be discussed.

1. 緒 言

HP シェル (Hyperbolic Paraboloid shell) は単独で、または組合せて、種々の空間構成が可能であり、建築の覆いとして利用価値の高い曲面であるといえる。その組合せの中で中央1点支持の倒立傘型HP シェルは過去に多くの実施例を見るが、応力解析に際しては膜理論に基づいているものが多い。

過去に発表された論文について見ると、初期には F. Aimond (1936年)その後 K. G. Tester , A. L. Parme, F. Candela 等は、膜理論に基づいているがシェルの大きさ、シェル厚、曲面の形、によっては、シェルに生じる曲げモーメントを含まず、膜理論のみにて扱う事に関しては危険を生じるものもありうる。HP シェルに曲げモーメントも含めて解析した論文には、K. Apeland , H. H. Bleich and M. G. Salvadori , そして Z. Sobotka 等が発表したものが見うけられる。又、倒立傘型HP シェルを実験的に取り扱ったものについては H.P. Harrenstien, 加藤渉, 西村敏雄両博士が発表している。

最近、倒立 HP シェルに曲げモーメントも含めて解析した例は、ノースカロライナ州立大学の Jahangir. F. Mirza が A S C E. Journal of the Structural Division (1967—April) に発表しているが、稜線上の境界条件に矛盾があるように思われる。(この構造が組合せ曲面である為に稜線が生じる)

本論文では、W. S. Wlassow の示した方法による基礎微分方程式を用い、稜線上の境条件に折版的条件を導入し、鉛直等分布荷重時における周辺の拘束条件による応力分布、変形性状への影響を究明する為に辺長比、ライズ、周辺の縁梁断面等のパラメーターを変化させたものを探りあげた。なお解析には差分法を適用し検討を加えたものである。

1. 周辺が自由端の場合
2. 周辺に縁梁がある場合
3. 周辺の縁梁にプレストレスを導入した場合

又、各種のシェルに対し鉄線モルタル試験体による載荷実験も合せて行い、変形性状、応力分布、破壊機構、終局耐力等についても実験的検討を加えた。

第1篇 偏平シェルに対する基礎微分方程式の傘型HP シェルへの適用及び各種境界条件

第2篇 解析例

第3篇 実験例

2. 応用 解 折

2.1 偏平シエルの基礎微分方程式

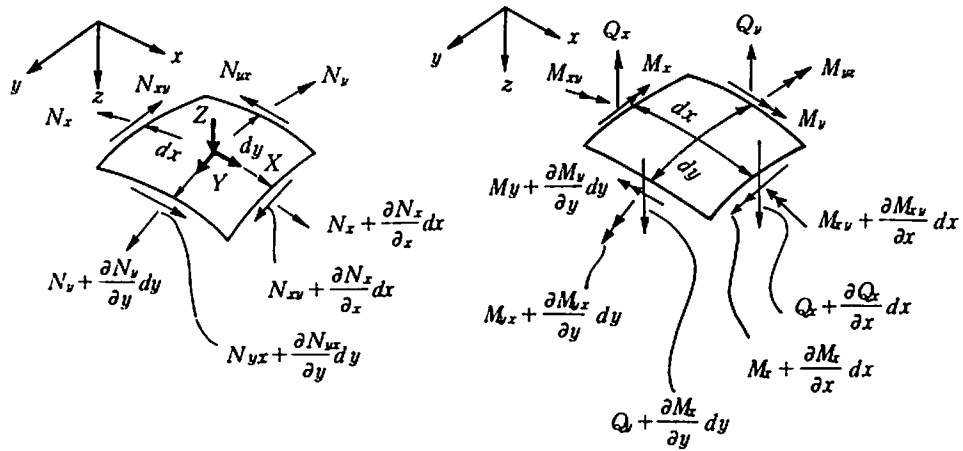


図 1. 偏平シエルに作用する正の各応力

鉛直荷重 q_z のみを考えると、偏平シエルの一般式として次の力の釣合式と変形の適合条件式を得る。

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = q_z \quad (1)$$

$$\frac{1}{Et} \nabla^2 \nabla^2 \phi + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

$$(\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4})$$

ただし w : 面に垂直方向のたわみ ϕ : 応力函数 E : ヤング係数

t : シエル厚 k_x, k_y : 曲率 k_{xy} : 捩率

$D : \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ (板剛度) ポアソン比 $\nu = 0$

2.2 倒立傘型HPシエルの曲面表示

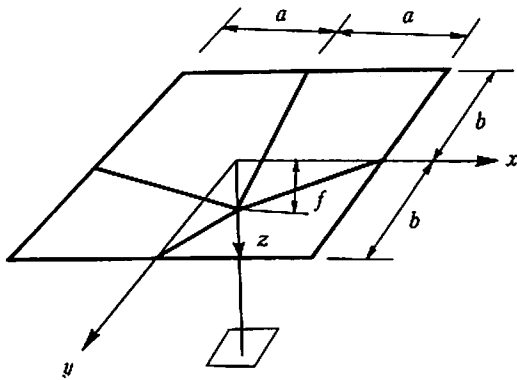


図 2

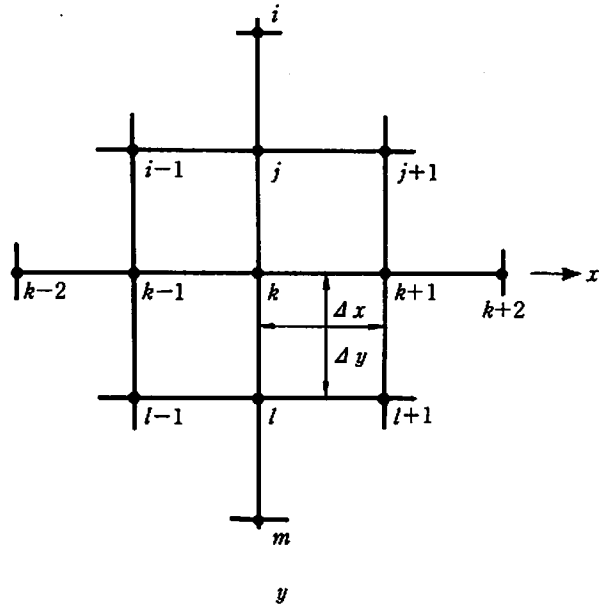


図 3

図 2 より倒立HP シエルの中央面は一般に次式にて表わされる。

$$Z = \frac{f}{ab} (a - x)(b - y) \tag{3}$$

曲率および捩率は偏平シエルに対して

$$k_x = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 0 \tag{4}$$

$$k_y = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

$$k_{xy} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{f}{ab} = C \tag{6}$$

上式を用いて偏平シエルの一般式に適用すると力の釣合式及び適合条件式は下式の如く表わされる。

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + 2C \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = qz \tag{7}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi - 2Et \cdot C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \tag{8}$$

2-3 差分法の適用

(7) (8) 式に差分法を適用すると

$$\frac{1}{\alpha^2 \lambda^4} \nabla_k^2 \nabla_k^2 w + \frac{1}{4\alpha \lambda^2} \frac{2C}{D} \Delta_{xk} \Delta_{yk} \phi = \frac{qz}{D} \tag{9}$$

$$\frac{1}{a^2 \lambda^4} \frac{1}{Et} \nabla_k^2 \nabla_k^2 \phi - \frac{2c}{4a\lambda^2} \Delta_{xk} \Delta_{yk} w = 0 \quad (10)$$

ただし,

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \lambda = \Delta x = \frac{a}{n} \quad n: x \text{方向分割数}$$

$$\text{ここで } \beta = \frac{3c^2 a^2 \lambda^4}{t^2}, \quad F = \frac{2}{a E t c \lambda^2} \phi, \quad P_z = \frac{12 a^2 \lambda^4}{E t^3} q_z \quad (10.1)$$

とおくと (9)(10) 式は 次のように表わされる。

$$\nabla_k^2 \nabla_k^2 w + \beta \Delta_{xk} \Delta_{yk} \cdot F = P_z \quad (11)$$

$$\nabla_k^2 \nabla_k^2 F - \Delta_{xy} \Delta_{yk} w = 0 \quad (12)$$

図3を用いて, (11)(12) 式を グリットの形にて表わすと,

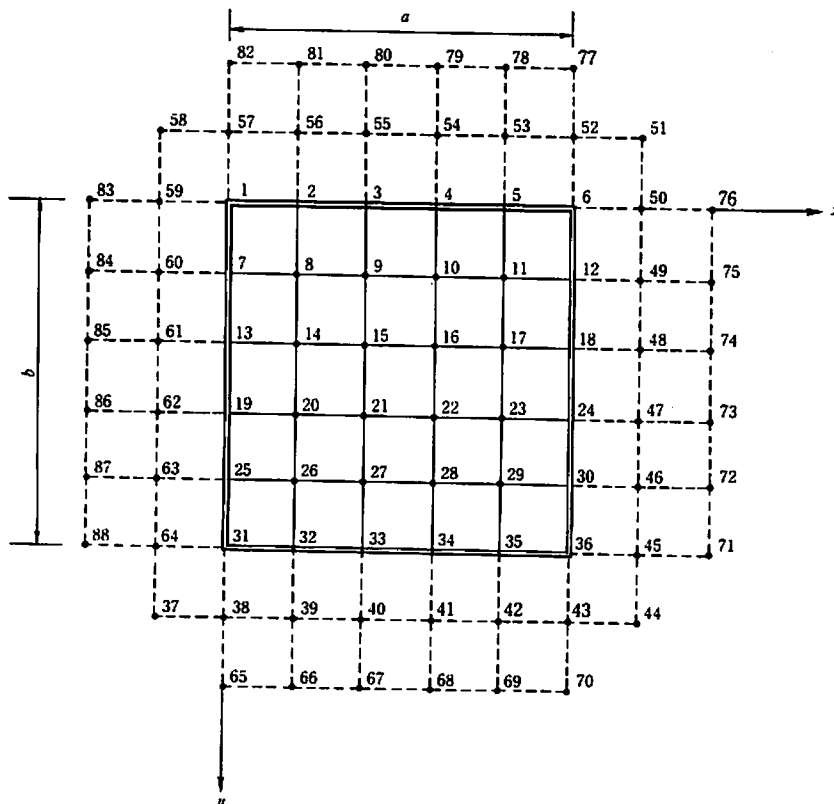
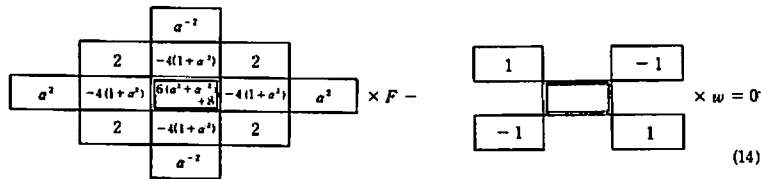
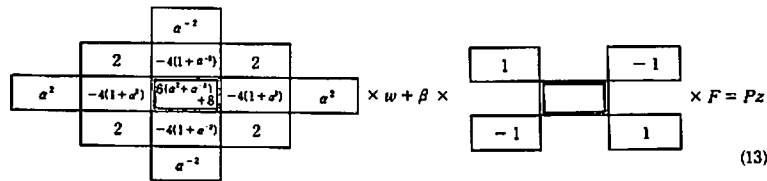


図4. $k=1$ は柱頭を表わし, シェル面上の点は1~36までにて表わされる。
 $n=5$

3. 境界条件 3.

(2-13), および (2-14)式を与えられた境界条件の下に連立方程式として解く。
 境界条件として次の場合を考える。

- a) シェル周辺自由の場合
- b) シェル周辺が縁梁で拘束される場合
- c) シェル周辺の縁梁にプレストレスを導入する場合

a) シェル周辺自由の場合

$x=a$ に沿って, ($k=6, 12, 18, 24, 30, 36$)

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{-D}{\lambda^2} (w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}) = 0$$

$$V_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

$$= \frac{-D}{2\lambda^3} \left[w_{k+2} + 2\alpha^{-2} (w_{j+1} + w_{l+1}) - 2(1+2\alpha^{-2}) w_{k+1} - 2\alpha^{-2} (w_{j-1} + w_{l-1}) \right. \\ \left. + 2(1+2\alpha^{-2}) w_{k-1} - w_{k-2} \right] = 0 \quad (15)$$

$$N_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha^2 \lambda^2} (\phi_l - 2\phi_k + \phi_j) = 0$$

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{4\alpha \lambda^2} (\phi_{l+1} - \phi_{j+1} - \phi_{l-1} + \phi_{j-1}) = 0$$

$y=b$ に沿って, ($k=31, 32, 33, 34, 35, 36$)

$$M_y = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{-D}{\alpha^2 \lambda^2} (w_l - 2w_k + w_j) = 0$$

$$V_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]$$

$$= \frac{-D}{2\alpha^3 \lambda^3} \left[w_m + 2\alpha^2 (w_{l+1} + w_{l-1}) - 2(1+2\alpha^2) w_l - 2\alpha^2 (w_{j+1} + w_{j-1}) \right. \\ \left. + 2(1+2\alpha^2) w_j - w_i \right] = 0 \quad (16)$$

$$N_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2} (\phi_{k+1} - 2\phi_k + \phi_{k-1}) = 0$$

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{4\alpha \lambda^2} (\phi_{l+1} - \alpha_{j+1} - \phi_{l-1} + \phi_{j-1}) = 0$$

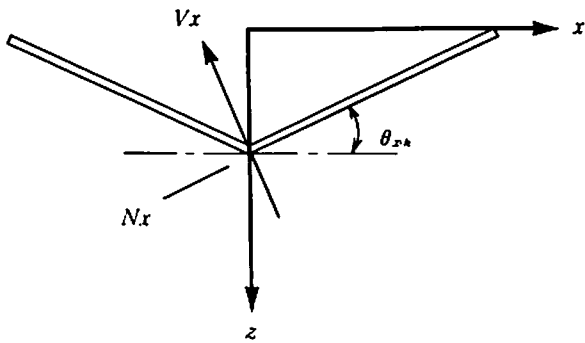


図5. 稜線における V_x と N_x の関係

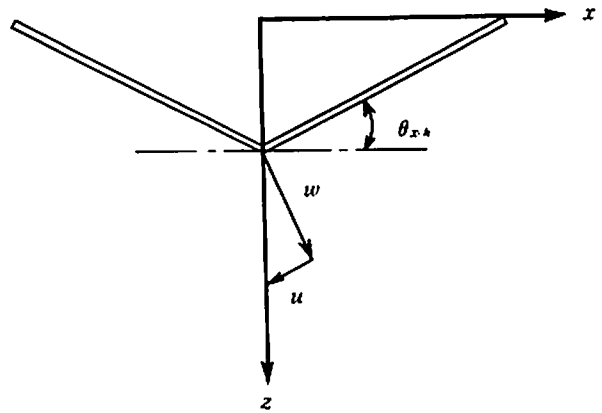


図6. 稜線におけるたわみ w と面内変位 u の関係

$x = 0$ に沿っては、この構造が集成曲面である為に稜線が生じる。よって境界条件では、曲面要素が傾斜しているなのでその傾斜角を θ_{xk} とすると、折版の条件を導入する事になる。

$x = 0$ に沿って、($k = 1, 7, 13, 19, 25, 31$)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2\alpha\lambda} (w_{k+1} - w_{k-1}) = 0$$

$$-V_x + N_x \tan \theta_{xk} = 0 \quad \text{より}$$

$$\frac{D}{2\lambda^3} \left[w_{k+2} + 2\alpha^{-2}(w_{j+1} + w_{l+1}) - 2(1+2\alpha^{-2})w_{k+1} - 2\alpha^{-2}(w_{j-1} + w_{l-1}) \right. \quad (17)$$

$$\left. + 2(1+2\alpha^{-2})w_{k-1} - w_{k-2} \right] + \frac{1}{\alpha^2\lambda^2} (\phi_l - 2\phi_k + \phi_j) \cdot \tan \theta_{xk} = 0$$

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{4\alpha\lambda^2} (\phi_{l+1} - \phi_{j+1} - \phi_{l-1} + \phi_{j-1}) = 0$$

$$w \sin \theta_{xk} + u \cos \theta_{xk} = 0$$

(17) 式の第4式は次の様になる。

$$u = -\tan \theta_{xk} w \quad (17.1)$$

両辺を y について微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\tan \theta_{xk} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (17.2)$$

$$\text{又, } \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Gt} N_{xy} = -\frac{1}{Gt} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad \text{より} \quad (17.3)$$

$$-\tan \theta_{xk} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{Gt} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (17.4)$$

両辺を y について再び微分すると,

$$-\tan \theta_{xk} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{Gt} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \quad (17.5)$$

左辺の第2項は、次のように表わされる。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \epsilon_x = \frac{1}{Et} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{Et} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \quad (17.6)$$

ここで、 $\nu = 0$ とすると、ヤング係数 E とせん断弾性係数 G との間には次の関係がある。

$$\frac{E}{G} = 2 \quad (17.8)$$

故に (17.5) 式は,

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} - Et \cdot \tan \theta_{xk} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (17.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda^3} \left[\phi_{k+2} + 2\alpha^{-2}(\phi_{j+1} + \phi_{l+1}) - 2(1+2\alpha^{-2})\phi_{k+1} - 2\alpha^{-2}(\phi_{j-1} + \phi_{l-1}) + 2(1+2\alpha^{-2})\phi_{k-1} \right. \\ \left. - \phi_{k-2} \right] - Et \cdot \tan \theta_{xk} \cdot \frac{1}{\alpha^2 \lambda^2} (w_l - 2w_k + w_j) = 0 \end{aligned} \quad (17.9)$$

同様に $y = 0$ に沿って、 ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ Vy - Ny \tan \theta_{yk} &= 0 \\ Nxy &= 0 \\ w \sin \theta_{yk} - v \cos \theta_{yk} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$x=0 \quad y=0 \text{ において, } (k=1) \quad (19)$$

$$w = 0$$

$x = a \quad y = b$ において、 ($k = 36$)

$$Mxy = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{-D}{4\alpha\lambda^2} (w_{44} - w_{46} - w_{42} + w_{29}) = 0 \quad (20)$$

b) シェル周辺が縁梁で拘束される場合

$x = a$ に沿って, $k = 6, 12, 18, 24, 30, 36$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= 0 \\ N_x &= 0 \\ \epsilon_{x \text{ shell}} &= \epsilon_{eb} \\ w_{\text{shell}} &= w_{eb} \end{aligned} \right\} (21)$$

$y = b$ に沿って, $k = 31, 32, 33, 34, 35, 36,$

$$\left. \begin{aligned} M_y &= 0 \\ N_y &= 0 \\ \epsilon_{y \text{ shell}} &= \epsilon_{eb} \\ w_{\text{shell}} &= w_{eb} \end{aligned} \right\} (22)$$

$x = a \quad y = b$ において,

$$Q_{bx} + Q_{by} = 0 \quad (23)$$

$$N_{xy} = 0 \quad (24)$$

21式の第3式は次のように表わされる。

$$\text{縁梁の歪} \quad \epsilon_b = \frac{N}{EA} \quad (21.1)$$

$$\text{シェルの歪} \quad \epsilon_{\text{shell}} = \frac{Ny}{Et} \quad (21.2)$$

両辺を等置して,

$$N = \frac{A}{t} N_y \quad (21.3)$$

縁梁の軸方向の釣合より

$$\frac{dN}{dy} = N_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (21.4)$$

y について積分すれば

$$N = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + C \quad (21.5)$$

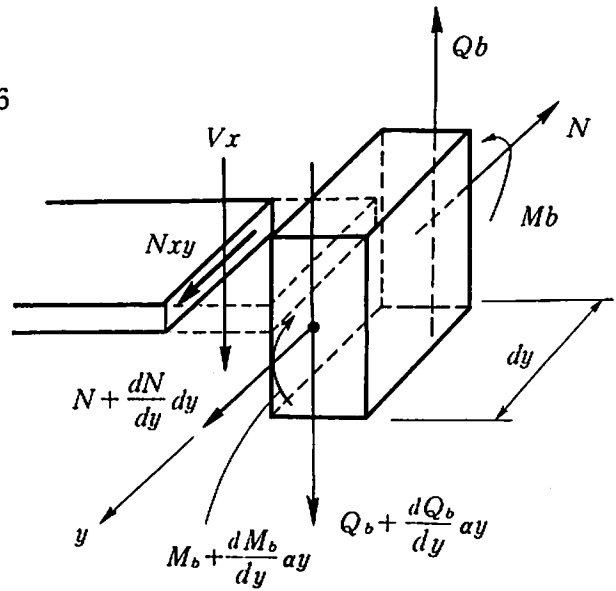
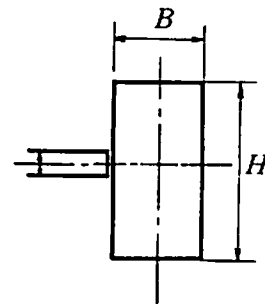


図7. 縁梁に作用する各応力



縁梁断面

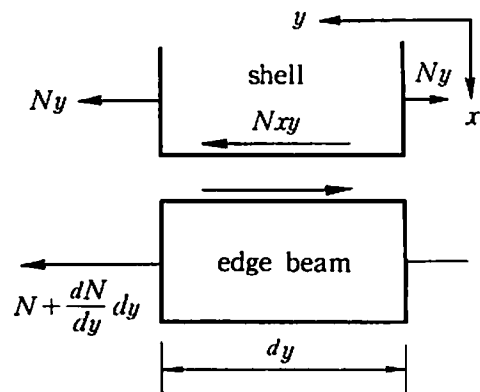


図8. 縁梁とシェルの面内力の連続条件

$y = b$ のとき $N = 0$ とおくと

$$C = \frac{x\phi}{\partial x} \Big|_{y=b} \quad (21.6)$$

これを (21.5式) に代入し, (21.3) 式を用いると, $x = a$ に沿った縁では,

$$\left[\frac{A}{t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{y=b} \right]_{x=a} \quad (21.7)$$

$$\frac{A}{t} \frac{1}{\lambda^2} (\phi_{k+1} - 2\phi_k + \phi_{k-1}) = -\frac{1}{2\lambda} (\phi_{k+1} - \phi_{k-1}) + \frac{1}{2\lambda} (\phi_{45} - \phi_{35}) \quad (21.8)$$

同様に, $y = b$ に沿った縁では, 次式のようになる。

$$\left[\frac{A}{t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{x=a} \right]_{y=b} \quad (22.1)$$

但し, $A = B \times H$

21式の第4式のシエルのたわみと縁梁のたわみの連続条件は次式のように導かれる。

縁梁のZ方向の力の釣合を考えると,

$$\frac{dQ_b}{dy} - V_x + q_B = 0 \quad (21.9)$$

又, モーメントの釣合を考えると (高次の微小を無視する)

$$\frac{dM_b}{dy} = Q_b \quad (21.10)$$

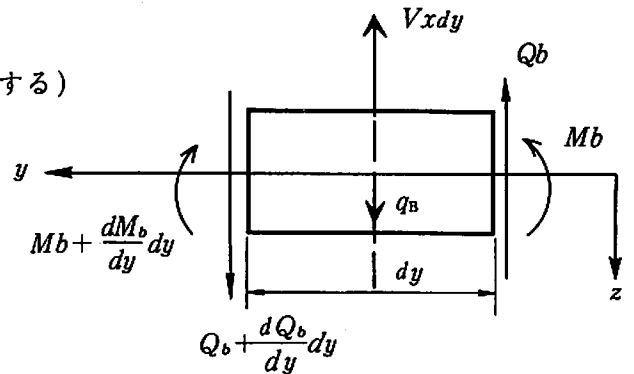
(21.11) を (21.10) に代入すると,

$$\frac{d^2 M_b}{dy^2} - V_x = -q_B \quad (21.11)$$

(21.11) 式を変位 w にて表わすと,

$$-EI \frac{d^4 w}{dy^4} + D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = -q_B \quad (21.12)$$

$$\begin{aligned} & -EI \frac{1}{\alpha^4 \lambda^4} (w_m - 4w_l + 6w_k - 4w_j + w_i) + \frac{D}{2\lambda^3} \left[w_{k+2} + 2\alpha^{-2}(w_{j+1} + w_{l+1}) - 2(1+2\alpha^{-2})w_{k+1} \right. \\ & \left. - 2\alpha^{-2}(w_{j-1} + w_{l-1}) + 2(1+2\alpha^{-2})w_{k-1} - w_{k-2} \right] = -q_B \quad (21.13) \end{aligned}$$



同様に, $y = b$ に沿った縁においては次の様に表わされる。

$$-EI \frac{d^4 w}{dx^4} + D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = -q_B \quad (22.2)$$

但し, $I = \frac{BH^3}{12}$: 縁梁の断面2次モーメント

コーナについての条件, (23), (24) 式は次のように表わされる。

$$\frac{1}{2\lambda^3} (w_{71} - 2w_{45} - 2w_{35} + w_{34}) + \frac{1}{2\alpha^3 \lambda^3} (w_{70} - 2w_{43} - 2w_{30} + w_{24}) = 0 \quad (23.1)$$

$$\frac{1}{4\alpha \lambda^2} (\phi_{44} - \phi_{46} - \phi_{42} + \phi_{29}) = 0 \quad (24.1)$$

その他の条件は, シェルの周辺自由の場合にならう。

c) 縁梁にプレストレスを導入する場合。

$$x = a \text{ に沿って, } (k=6, 12, 18, 24, 30, 36)$$

縁梁付の境界条件 (21.5) 式の積分常数 C を決定する時にプレストレスを導入する場合は, $y = b$ において, $N = -Py$ とおくと C は決定できる。

$$-Py = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{y=b} + C \quad (25)$$

(21.7) 式は次のように表わされる。

$$\left[\frac{A}{t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{y=b} - Py \right]_{x=a}$$

同様に $y = b$ に沿った縁では,

$$\left[\frac{A}{t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{x=a} - Px \right]_{y=b} \quad (27)$$

但し, $\left[\begin{array}{l} Py \text{ は, } x = a \text{ に沿った縁梁の } y \text{ 軸方向のプレストレス力を示し,} \\ Px \text{ は, } y = b \text{ に沿った縁梁の } x \text{ 軸方向のプレストレス力を示す。} \end{array} \right]$

$x = a$ に沿って, ($k = 6, 12, 18, 24, 30$)

$$Ny = 0 \quad (28)$$

但し, $k = 36$ 点では, 縁梁の歪とシェルの歪の連続条件より (21.3) 式より

$$Ny = \frac{t}{A} N = -\frac{t}{A} Py \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{t}{A} Py \quad (30)$$

同様, $y = b$ に沿って, ($k = 31, 32, 33, 34, 35$)

$$Nx = 0$$

$k = 36$ 点において,

$$Nx = -\frac{t}{A} Px$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{t}{A} Px$$

その他の境界条件は, シェルの周辺に縁梁を付けた場合にならう。

d) 応力函数の一般的性質

応力函数を $\phi(x, y) + Ax + By + C$ とおけば A, B, C , は全く任意にとることができる。

従って一般的には, 応力函数 ϕ は分割された格子上任意の3点で0とおいてよい。

ここでは, $\phi_{36} = \phi_{43} = \phi_{45} = 0$ とおく

ϕ に関して対称性が成立つ場合には別に考慮が必要である。

以上, 各境界条件の ϕ_k を, (10.1)式を用いて F_k に置きかえ, 基礎微分方程式の釣合式 (13) 式を $k = 2 \sim 36$ 点まで, 適合条件式を, シェル周辺を除いた内側の点, $k = 1 \sim 29$ 点について立て, 境界条件も含めた多元連立一次方程式を解けば, シェル面上で分割された各点の w_k および F_k が求められ, 従って各点における各応力が求められる。

- 1) F. Aimond "A statical Study of Hyperbolic Paraboloid Thin Shells without Bending"
Publications, Internatl. Assoc. for Bridge and Structural Engrg. Zurich,

Switzerland, Vol 4. 1936

- 2) K. G. Tester "Beitrag zur Berechnung der Hyperbolischen Paraboloidschale", Ingenieur-Archiv, Berlin, West Germany, Vol. 16, 1947
- 3) A. L. Parme "Hyperbolic Paraboloids and Other Shells of Double Curvature,"
Journal of the Structural Division, ASCE Vol 82, No. ST 5, Proc.
Paper 1057, September, 1956.
- 4) F. Candela "General Formulas for Membrane Stresses in Hyperbolic Paraboloidal Shells,"
Journal, Amer. Concrete Inst. Detroit, Mich, Vol. 32, No. 4, 1960.
- 5) K. Apeland "Stress Analysis of Translational Shells,"
Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE Vol 87, No. EM11,
Proc. Paper 2743, February, 1961.
- 6) H. H. Bleich and M. G. Salvadori
"Bending Moments on Shell Boundaries."
Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 85, No. ST8, Proc.
Paper 2223, October, 1959.
- 7) Z. Sobotka discussion of "Bending Moments on Shell Boundaries," by H. H. Bleich and
M. G. Salvadori,
Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 86, ST5, Proc. Paper
2491, May, 1960.
- 8) H. P. Harrenstien "Hyperbolic Paraboloidal Umbrella Shell under Vertical Loads"
Journal, Amer. Concrete Inst. Vol. 32 Title. No. 57-18, 1960.
- 9) 加藤 涉, 西村敏雄 "Experimental Research on Failure Mechanism of Umbrella Type
Hyperbolic Paraboloid Shells."
Recent Researches of Structural Mechanics.
日大工学研究所報告
- 10) 坪井 善勝 曲面構造
- 11) J. F. Mirza "Stress and Deformation in Umbrella Shell"
Journal of Structural Division, ASCE No. ST 2, April 1967.

12) R. R. Russell and K. H. Gerstle

"Bending of Hyperbolic Paraboloid Structures"

Journal of Structural Division, A S C E, No. ST 3 June 1967.