法政大学学術機関リポジトリ
HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

PDF issue: 2025-07-09

等速直線運動体から発射された電波のドプラ効果について

SAWAMURA, Eiichi / 沢村, 栄一

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Technical College of Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
8
(開始ページ / Start Page)
45
(終了ページ / End Page)
49
(発行年 / Year)
1972-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004228

等速直線運動体から発射された電波のドプラ効果について

電気工学科　沢　村　栄　一

Doppler Effect of the Electromagnetic Wave from a Radiator with a Constant Velocity

Eiichi SAWAMURA, *Professor*

Abstract

The Doppler effect of the electromagnetic wave from an artificial satellite is utilized as one of the effective methods of locating it. If the speed of the satellite increases up to the order of light velocity, the relativistic considerations must be taken into account. A radiator flying within a vacuum with a constant velocity was taken up here as the simplest example. And the expressions showing the relation between the Doppler frequency and the observation time at a certain point off the flying course have been derived, together with the numerical results for three kinds of velocities.

1. はしがき

たとえば人工衛星の位置を決定するための一手段として，衛星から発射された電波のドプラ効果による周波数変化を測定する方法が利用されているが，衛星の航行速度が著しく高くなると相対論的取扱いが必要となる。たとえ速度がそれほど高くなくても，測定確度が著しく向上した場合，あるいは電波の周波数を上げたためにドプラ効果による周波数変化が大きくなった場合などにもこの考え方が必要になると思われる。そこで最も簡単な場合として，等速直線運動をする場合について考察した。なお相対論は「特殊相対論」に限定した。したがって重力場の影響は考慮していない。

2. 問題の設定

いま図1に示すように，周波数 f_s〔Hz〕の電波源 S（例えば人工衛星）が v〔m/s〕の速さで直進しているとき，観測点0で受信された電波の周波数 f_0 が f_s とどのような関係にあるかを調べる。

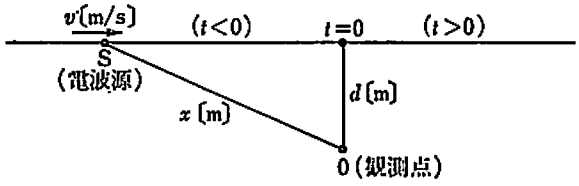


図1　問題の設定

まず非相対論的に考え，観測点は静止しているものとする。また考えている空間は，簡単のため，たとえば電離層のような不均質な部分のない一様な真空とする。電波源が観測点に最も近づいたときを $t=0$ とし，そのときの距離を d〔m〕とする。時刻 t〔s〕における電波源と観測点との距離を x〔m〕とすると次式が成立する。

$$x=\sqrt{(vt)^2+d^2} \tag{1}$$

いま真空中の光速を c〔m/s〕とし，α, β および δ を次のように定義する。

$$\alpha \equiv \frac{x}{c},\quad \beta \equiv \frac{v}{c},\quad \delta \equiv \frac{d}{c} \tag{2}$$

α と δ との単位は〔s〕，β は1以下の純数である。この関係から式(1)は

$$\alpha=\sqrt{(\beta t)^2+\delta^2} \tag{3}$$

となる。

3.　ドプラ効果の表式

観測点で時刻 t に受信された電波が電波源から発射された時刻を t_s とすると，

$$t=t_s+\alpha \tag{4}$$

t_s の微小変化 dt_s に応じて t が dt だけ変化するものとすれば，

$$dt=\left(1+\frac{d\alpha}{dt}\bigg|_s\right)dt_s \tag{5}$$

これに式(3)の関係を用いて次式を得る。

$$dt=\left(1+\frac{\beta^2 t_s}{\sqrt{(\beta t_s)^2+\delta^2}}\right)dt_s \tag{6}$$

いま電波源での固有周期を τ_s，観測点における受信電波の周期を τ_0 とすれば，それらはそれぞれ dt_s, dt に比例するので上の関係から

$$\tau_0=\left(1+\frac{\beta^2 t_s}{\sqrt{(\beta t_s)^2+\delta^2}}\right)\tau_s \tag{7}$$

以上は非相対論的の取扱いであるが，特殊相対論の示すところによれば，観測点に対して電波源とともに相対運動をする時計は遅れる。その結果電波源の固有周期 τ_s は観測点から見れば $\tau_s/\sqrt{1-\beta^2}$ となる。したがって相対論的に取扱かう場合には式(7)を次のように変形しなければならない。

$$\tau_0=\left(1+\frac{\beta^2 t_s}{\sqrt{(\beta t_s)^2+\delta^2}}\right)\frac{\tau_s}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (7)'$$

式(7)，(7)′を周波数fで表わせば，ドプラ効果はそれぞれ次式で示される。

（以下非相対論的および相対論的をそれぞれ「非相対」，「相対」と略記する。）

$$\frac{f_0}{f_s}=\frac{1}{1+\dfrac{\beta^2 t_s}{\sqrt{(\beta t_s)^2+\delta^2}}} \quad \text{（非相対）} \qquad (8)$$

$$\frac{f_0}{f_s}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\dfrac{\beta^2 t_s}{\sqrt{(\beta t_s)^2+\delta^2}}} \quad \text{（相　対）} \qquad (8)'$$

実用上ドプラ効果を $\Delta f/f_s$（ただし $\Delta f\equiv f_0-f_s$）の形で表わすことが多いが，ここでは終始 f_0/f_s の形によることにする。

さて式(8)，(8)′は与えられたβとδとに対して f_0/f_s と t_s との関係を示すものであるが，次に f_0/f_s と受信時刻tとの関係を知る必要がある。そのために，まず(3)と(4)とから求められる関係

$$t=t_s+\sqrt{(\beta t_s)^2+\delta^2} \qquad (9)$$

から t_s と t との関係式

$$t_s=\frac{t-\sqrt{\beta^2(t^2-\delta^2)+\delta^2}}{1-\beta^2} \qquad (10)$$

を得る。この t_s の値を式(8)，(8)′に代入するのであるが，そのとき両式の分母にある $\sqrt{(\beta t_s)^2+\delta^2}$ を $t-t_s$ と書き換えてから代入する方が計算が簡単になる。計算の結果，式(8)，(8)′はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{f_0}{f_s}=\frac{1}{1-\beta^2}\left[1-\frac{\beta^2 t}{\sqrt{\beta^2(t^2-\delta^2)+\delta^2}}\right] \quad \text{（非相対）} \qquad (11)$$

$$\frac{f_0}{f_s}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[1-\frac{\beta^2 t}{\sqrt{\beta^2(t^2-\delta^2)+\delta^2}}\right] \quad \text{（相対）} \qquad (11')$$

4.　表式から分る諸性質

ドプラ効果の表式(11)，(11)′から分る諸性質について調べる。まずtが特定の値をとったときの f_0/f_s の値を表1に示す。

t		$-\infty$	0	δ	$+\infty$
$\frac{f_0}{f_s}$	非　相　対	$\frac{1}{1-\beta}$	$\frac{1}{1-\beta^2}$	1	$\frac{1}{1+\beta}$
	相　　対	$\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	$\sqrt{1-\beta^2}$	$\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

表1　tの特定値と f_0/f_s との関係

$t=\pm\infty$ の場合の観測周波数 f_0 の値が分っていると，固有周波数 f_s の値は表1により次式から求められる。

$$f_s=\frac{2[f_0]_{t=-\infty}\times[f_0]_{t=+\infty}}{[f_0]_{t=-\infty}\times[f_0]_{t=+\infty}}\ (\text{調和平均－非相対}) \tag{12}$$

$$f_s=\sqrt{[f_0]_{t=-\infty}\times[f_0]_{t=+\infty}}\ (\text{幾何平均－相対}) \tag{12$'$}$$

なお $t=\mp\infty$ の場合の f_0/f_s の値は，電波源の進路が観測点を通過するとき，すなわち式(11)および(11)′ において $\delta=0$ として得られる次の周知の式に等しい。

$$\left.\frac{f_0}{f_s}\right|_{\delta=0}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\beta} & (t<0)\\[2ex] \dfrac{1}{1+\beta} & (t>0)\end{cases}\quad(\text{非相対}) \tag{13}$$

$$\left.\frac{f_0}{f_s}\right|_{\delta=0}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} & (t<0)\\[2ex] \sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} & (t>0)\end{cases}\quad(\text{相　対}) \tag{13$'$}$$

表1の $t=\delta$ の場合の f_0/f_s 値は，電波源が最も接近した場合すなわち $t_s=0$ のときのものであるから，「非相対」のときは1になるが，「相対」の場合にはいわゆる横効果によって $\sqrt{1-\beta}$ となっている。なお「相対」の場合に $f_0/f_s=1$ となる時刻 t を求めると次のようになる。

$$t_{(f_0/f_s=1)}=\frac{\delta}{\sqrt{2}\beta}\sqrt{\sqrt{1-\beta^2}-(1-\beta^2)}\quad(\text{相　対}) \tag{14}$$

5. 図 式 表 示

ドプラ効果の表式(11)および(11)′を図示するために，

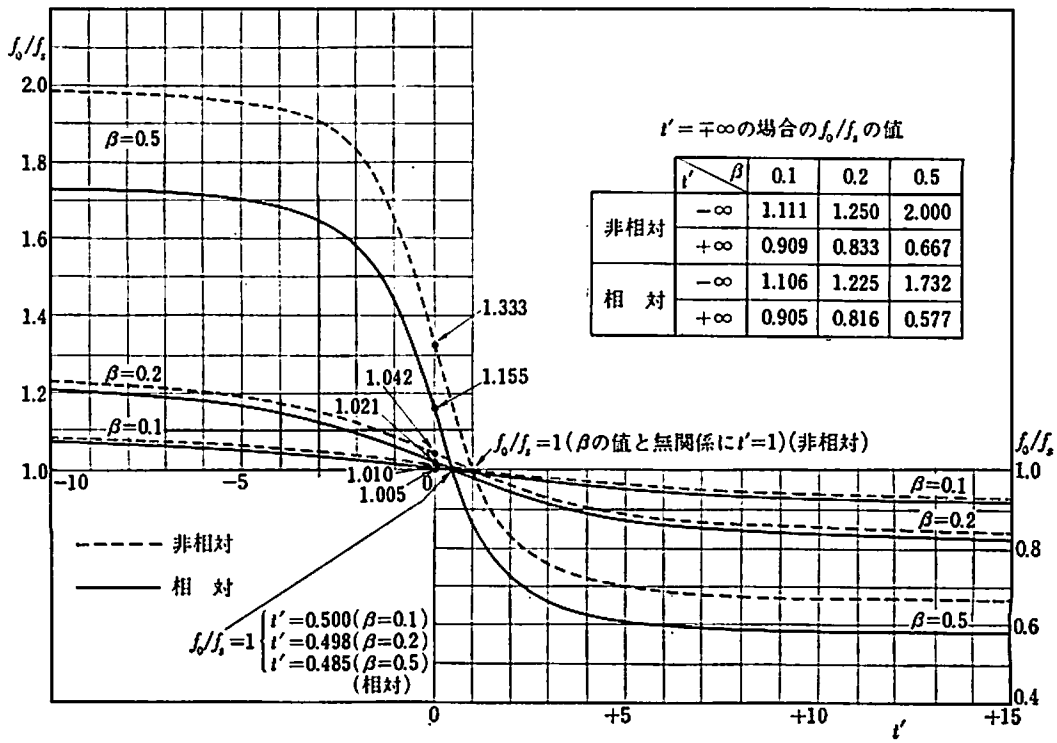
$$\frac{t}{\delta}\equiv t'\quad(\text{純数}) \tag{15}$$

とおいて両式を変形すれば次のようになる。

$$\frac{f_0}{f_s}=\frac{1}{1-\beta^2}\left[1-\frac{\beta^2 t'}{\sqrt{\beta^2(t'^2-1)+1}}\right]\quad(\text{非相対}) \tag{16}$$

$$\frac{f_0}{f_s}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[1-\frac{\beta^2 t'}{\sqrt{\beta^2(t'^2-1)+1}}\right.\quad(\text{相　対}) \tag{16$'$}$$

図2は $\beta=0.1$，0.2および0.5の場合について f_0/f_s と t' との関係を示したものである。$\delta=1$ すなわち $d=300,000$ km の場合には，図の横軸の時間目盛の単位は「秒」と読めばよい。d が他の値，たとえば $d=300$ km の場合には，$\delta=1/1,000$であるから横軸の時間目盛1は1/1,000秒を表わすことになる。このように考えると，図2は横軸の時間単位を変えるだけで δ のあらゆる値に対して利用することができる。



	t' ＼ β	0.1	0.2	0.5
非相対	−∞	1.111	1.250	2.000
	+∞	0.909	0.833	0.667
相　対	−∞	1.106	1.225	1.732
	+∞	0.905	0.816	0.577

図２　f_0/f_s と t' との関係図

つぎに式(14)も式(15)による t' を用いれば次式のように変形することができる。

$$t'_{(f_0/f_s=1)}=\frac{1}{\sqrt{2}\beta}\sqrt{\sqrt{1-\beta^2}-(1-\beta^2)}\quad（相　対）\qquad(17)$$

図３は，この式から求めた $t'_{(f_0/f_s=1)}$ と β との関係を示したものである。

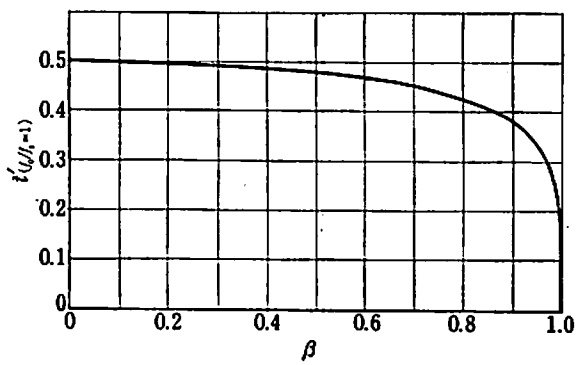


図３　（$t'_{(f_0/f_s=0)}$ と β との関係図（相対）

謝　　辞

この小論に対して，郵政省電波研究所衛星研究部の中橋信弘氏から種々貴重な助言を頂いた。厚く謝意を表する。