共振曲線における最大値を求める数値計算法

TAKEDA, Shin’ichiro / 武田, 晋一郎

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
8
(開始ページ / Start Page)
51
(終了ページ / End Page)
58
(発行年 / Year)
1972-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004226

共振曲線における最大値を求める数値計算法

電気工学科（計測制御）

武　田　晋　一　郎

A Simple Formula to decide the Position of Maximum of a Resonance Curve obtained Experimentally

Shin'ichiro TAKEDA, *Professor*

Abstract

A very simple formula to decide the position of the maximum point of a resonance curve obtained experimentally is proposed. The resonance curve is approximated by a parabola: $y=y_1+\alpha(x-x_1)+\beta(x-x_1)^2$, on which the three points of the resonance curve are located. The maximum point of this parabola is assumed to be the maximum point of the resonance curve and the formula of the position of maximum as a function of the coordinates of the three points $(x_0, y_0;\ x_1, y_1;\ x_2, y_2)$ is obtained:

$$\xi_m=\frac{h}{2}\,\frac{\eta_0-\eta_2}{\eta_0+\eta_2},\qquad \eta_m=\frac{1}{8}\,\frac{(\eta_0-\eta_2)^2}{\eta_0+\eta_2}.$$

1. 緒　　　言

共振曲線が実験または計算で求められ，グラフ化されたときその最大点（最大値およびその座標）を簡易に求める必要はしばしば生ずることである。この研究は共振曲線の最大点の近傍の3点が与えられたとき，最大点の座標を求める簡単な公式を得ることが目的で，Newton の補間公式の数値積分の応用例として，また共振曲線の近似放物線による方法によっても導くことができるものである。

2. Newton の補間公式の応用

共振曲線を表わす関数 $y=f(x)$ が階差 $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0$, ……を持つときの Newton 補間公式は

$$f(x)=y_0+u\Delta y_0+\frac{u(u-1)}{2\,!}\Delta^2 y_0+\frac{u(u-1)(u-2)}{3\,!}\Delta^3 y_0+\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{1}$$

である。ただし，$u\equiv(x-x_0)/h$ で，h は変数 x の分割間隔である。(1) を x について微分すれ

ば

$$hf'(x)=\Delta y_0+\frac{2u-1}{2\,!}\Delta^2 y_0+\frac{3u^2-6u+2}{3\,!}\Delta^3 y_0+\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2)$$

関数 $y=f(x)$ の最大値は $f'(x)=0$ のときの$x=x_m$, $y=y_m=f(x_m)$ を求めればよい。共振曲線の最大点をはさむ３点 P, Q, R の座標が

$$P(x_0, y_0),\ \ Q(x_1, y_1),\ \ R(x_2, y_2)$$

と与えられたものとしよう。ただし,

$$x_1-x_0=x_2-x_1=h \quad （等間隔の場合）$$

とする。３点だけをとるときは，第３階差 $\Delta^3 y_0$ は０であるから,（２)において $f'(x)=0$ なる最大値条件は

$$\Delta y_0+\frac{2u-1}{2}\Delta^2 y_0=0 \qquad (3)$$

となる。これに，$\Delta y_0=y_1-y_0$, $\Delta^2 y_0=y_2-2y_1+y_0$ を代入すれば

$$(y_1-y_0)+\frac{2u-1}{2}(y_2+y_0-2y_1)=0$$

$$\frac{2u-1}{2}=\frac{y_1-y_0}{2y_1-y_2-y_0},\quad \frac{x_m-x_0}{h}=\frac{1}{2}+\frac{y_1-y_0}{2y_1-y_2-y_0}=\frac{4y_1-3y_0-y_2}{2(2y_1-y_2-y_0)}$$

$$x_m=x_0+\frac{h}{2}\,\frac{4y_1-3y_0-y_2}{2y_1-y_2-y_0} \qquad (4)$$

x_0 の代りに x_1 を原点（中央）にとった式に直せば，$x_0=x_1-h$ として（４)から

$$x_m=x_1-h+\frac{h}{2}\,\frac{4y_1-3y_0-y_2}{2y_1-y_2-y_0}=x_1+\frac{h}{2}\,\frac{4y_1-3y_0-y_2-4y_1+2y_1+2y_0}{2y_1-y_2-y_0}$$

$$\boxed{x_m=x_1+\frac{h}{2}\,\frac{y_2-y_0}{2y_1-y_2-y_0}} \qquad (5)$$

（５)の x_m を(１)に代入すれば，y の最大値 y_m が得られる,（$x_m-x_0/h=u_m$ を考慮して).

$$\boxed{y_m=y_1+\frac{1}{8}\,\frac{(y_2-y_0)^2}{2y_1-y_2-y_0}} \qquad (6)$$

3.　近似放物線による求め方

上の公式はまた，Simpson の求積法におけると同様に２次曲線すなわち放物線近似によっても求めることができる。すなわち，最大値点をその区間内に含む３点の座標が与えられたとき，この点を通る放物線で近似してその最大値を求めるわけである。

（ａ） 近似放物線の方程式

$$y=y_1+\alpha(x-x_1)+\beta(x-x_1)^2 \qquad (7)$$

が2点 (x_0, y_0); (x_2, y_2) を通る条件：

$$y_0=y_1+(-h)\alpha+(-h)^2\beta$$

$$y_2=y_1+(-h)\alpha+(\ h)^2\beta$$

より，係数 α, β の値を決定すると

$$\alpha=\frac{y_2-y_0}{2h}, \quad \beta=\frac{y_2+y_0-2y_1}{2h^2} \tag{8}$$

となる。（第1図参照）

（b）　最大値の条件

（7）を x について微分して0とおけば

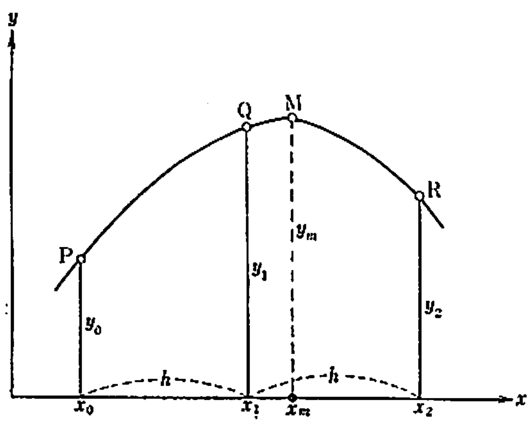
$$\frac{dy}{dx}=\alpha+2\beta(x-x_1)=0$$

$$x_m=x_1-\frac{\alpha}{2\beta}=x_1-\frac{y_2-y_0}{2(y_2+y_0-2y_1)}h \tag{9}$$

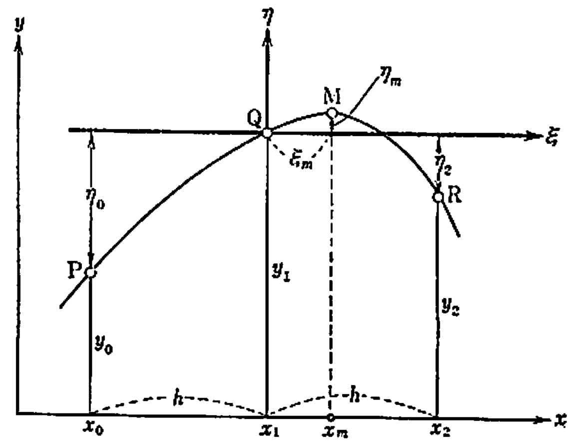
$$y_m=y_1+\frac{y_2-y_0}{2h}\left[-\frac{(y_2-y_0)h}{2(y_2+y_0-2y_1)}\right]+\frac{y_2+y_0-2h_1}{2h^2}\left[-\frac{(y_2-y_0)h}{2(y_2+y_0-2y_1)}\right]^2$$

$$=y_1-\frac{(y_2-y_0)^2}{8(y_2+y_0-2y_1)} \tag{10}$$

2.におけると同じ結果となる。



第1図　近似放物線の図（M：最大値点）



第2図　中央点Qを原点とする座標 (ξ, η): η_0 と η_2 とを図上で求め，hを知ればM点の座標 (ξ_m, η_m) が(11)式より求まる

4.　公 式 の 整 理

最大値を求める場合はほとんど常に

$$y_1>y_0, \quad y_1>y_2$$

のように撰定できるので，公式(5)，(6)における項は

$$y_2+y_0-2y_1<0$$

となる。よって公式(5)，(6)の方が公式(9)，(10)よりも計算し易い。(5)，(6)の各項が正の値となるからである。

また，中央点 (x_1, y_1) に原点を移した座標 (ξ, η) を使えば

$$\eta_0=y_1-y_0, \qquad \eta_2=y_1-y_2$$

$$\eta_m=y_m-y_1, \qquad \xi_m=x_m-x_1$$

とおいて，最大点Mの座標 (ξ_m, η_m) はつぎのようになる（第2図参照)。

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_m&=\frac{\eta_0-\eta_2}{\eta_0+\eta_2}\frac{h}{2} \\ \eta_m&=\frac{1}{8}\frac{(\eta_0-\eta_2)^2}{\eta_0+\eta_2} \end{aligned}} \tag{11}$$

この公式(11)は点 P, Q, R が方眼紙上に画かれたときは，Qに対する P, R の位置を（相対的に）方眼の目数の絶対値を勘定して得られる η_0 と η_2 の2つの値だけで計算できる係数であるから，とくに実験的に共振曲線が画かれたときそのグラフの上で最大点Mの位置を求めるのに応用して便利である。

5. 不等間隔の場合の公式

点 P, Q, R の横座標が不等間隔の場合には等間隔の場合ほど簡単な公式は得られないが，係数 α, β を求める公式と α, β とから x_m, y_m を求める公式に分割した形の公式となる。横座標間隔を h と k とすれば

$$\begin{array}{ll} x_0=x_1-h, & y_0 \\ x_1, & y_1 \\ x_2=x_1+k & y_2 \end{array}$$

近似放物線： $y=y_1+\alpha(x-x_1)+\beta(x-x_1)^2$

最大点の座標： $x_m=x_1-\dfrac{\alpha}{2\beta}, \quad y_m=y_1-\dfrac{\alpha^2}{4\beta}$ (12)

係数 α, β:

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=-\frac{y_0k^2-y_2h^2-y_1(k^2-h^2)}{hk(h+k)} \\ \beta&=-\frac{y_1(h+k)-y_0k-y_2h}{hk(h+k)} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

あるいは，$y_0-y_1=-\eta_0$, $y_2-y_1=-\eta_2$ を用いると

$$\alpha=\frac{\eta_0k^2-\eta_2h^2}{hk(h+k)},\quad \beta=-\frac{\eta_2h+\eta_0k}{hk(h+k)} \tag{13)'$$

のようになる。(13)あるいは(13)′によって計算した α,β を用いて(12)より x_m, y_m を計算すればよいのである。

6. 計　算　例

$\sin x$, $J_0(x)$, 線形共振曲線に上に得た公式を応用して計算例とする。いずれも十分満足できる精度で最大点を決定できることを示している。

(1) $y=\sin x$ の $x=\pi/2$ における最大値の計算例（その1）：

x_0	x_1	x_2;	y_0	y_1	y_2
75°	85°	95°	0.96593	0.99619	0.99619

$$y_m=0.99619+\frac{(0.99619-0.96593)^2}{8\times(2\times0.99619-0.96593-0.99619)}=0.99619+0.00378$$
$$=0.99997$$

$$x_m=85°+\frac{0.03026}{2\times0.03026}\times10°=85°+5°=90°$$

正確な値は $x_m=90°$, $y_m=1$ であるが計算値は $x_m=90°$, $y_m=0.99997$ である。x_m が正確な値と一致したのは $x_1=85°$ と $x_2=95°$ とが $x_m=90°$ に対して左右対称となっているためである。この左右対称性のない例がつぎの例である。

(2) $y=\sin x$ の $x=\pi/2$ における最大値の計算例（その2）：

x_0	x_1	x_2;	y_0	y_1	y_2
73°	83°	93°	0.95630	0.99255	0.99863

$$y_m=0.99255+0.00742=\underline{0.99997}$$
$$x_m=83°+7.015°=\underline{90.015°}$$

この場合には x_m は正確な値90°を少し大きい側にずれている。しかし，その差は微小である。y_m の方も同様である。

(3) $J_0(x)$ の $x=0$ における最大値の計算例：

x_0	x_1	x_2;	y_0	y_1	y_2
−0.3	0.2	0.7	0.97763	0.99002	0.88120
			η_0		η_2
			0.01239		0.10878

$$\eta_0-\eta_2=0.01239-0.10878=-0.09641,\quad \eta_0+\eta_2=0.12129$$

公式(11)によって計算すると，

$$y_m=0.99002+\frac{1}{8}\frac{(-0.09641)^2}{0.12129}=0.99002+0.009581=\underline{0.99960}$$

$$x_m=0.20000+\frac{-0.09641}{0.12129}\times 0.25=0.20000-0.19872=\underline{0.00128}$$

正確な値は $y_m=1.00000$ と $x_m=0.00000$ である。その差は微小である。

(4) 共振曲線についての最大値の計算例：

2次線形方程式： $\ddot{x}+2D\omega_0\dot{x}+\omega_0{}^2x=f\sin\omega t$ (14)

の解は，$x_{st}\equiv f/\omega_0$，$u^2\equiv\omega^2/\omega_0{}^2$ とおいて

$$X=\frac{x}{x_{st}}=\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2+4D^2u^2}} \tag{15}$$

$$\frac{dX}{du}=0 \text{ より} \qquad u_m=\sqrt{1-2D^2}, \qquad X_m=\frac{1}{2D\sqrt{1-D_2}} \tag{16}$$

(a) $D=0.2$の場合（$h=0.1$）

u_0	u_1	u_2	;	X_0	X_1	X_2
0.9	1.0	1.1		2.45662	2.50000	2.05109
				η_0		η_2
				0.04338		0.44891

公式(11)によって計算すると，($\eta_0-\eta_2=-0.40553$，$\eta_0+\eta_2=0.49229$)

$$u_m=u_1+\frac{\eta_0-\eta_2}{\eta_0+\eta_2}\,\frac{h}{2}=1.0+\frac{-0.40553}{0.49229}=\underline{0.95881}$$

$$X_m=X_1+\frac{1}{8}\,\frac{(\eta_0-\eta_2)^2}{\eta_0+\eta_2}=2.50000+\frac{(0.40553)^2}{8\times 0.49229}=2.50000+0.041757$$

$$=\underline{2.541757}$$

正確な値は(16)より計算して，$u_m=0.95917$，$X_m=2.55155$ である。実用上十分な精度で一致している。

(b) $D=0.3$の場合

正確な値　$u_m=0.9055385$,　$X_m=1.747142$

計 算 値　$u_m=0.90568$,　$X_m=1.74126$

u_0	u_1	u_2	;	X_0	X_1	X_2
0.75	0.85	0.95		1.59325	1.72233	1.72927
					η_0	η_2
					0.12908	−0.00694

$$u_m=0.85+\frac{0.13602}{0.12214}\times\frac{0.1}{2}=0.85+0.055682=0.90568$$

$$X_m=1.72233+\frac{(0.13602)^2}{8\times 0.12214}=1.72233+0.01893+1.74126$$

実用上十分な精度での一致が見られる。

(5) 不等間隔の場合の計算例：$y=\sin x$

x_0	x_1	x_2;	y_0	y_1	y_2
75°	85°	100°	0.96593	0.99619	0.98481
$h=10°$	$k=15°$		η_0		η_2
			0.03026		0.01138

公式(13)′によって，α, β を計算する。

$$\alpha=\frac{\eta_0k^2-\eta_2h^2}{hk(h+k)}=\frac{0.03026\times15^2-0.01138\times10^2}{10\times15\times(10+15)}=0.0015123$$

$$\beta=\frac{\eta_2h+\eta_0k}{-hk(h+k)}=\frac{0.01138\times10+0.03026\times15}{-3750}=-0.00015138$$

公式(12)により，最大点の座標 x_m, y_m を求めると

$$x_m=x_1-\frac{\alpha}{2\beta}=85°-\frac{0.0015123}{-2\times0.00015138}=85°+4^{\circ}\!.99504=\underline{89^{\circ}\!.99504}$$

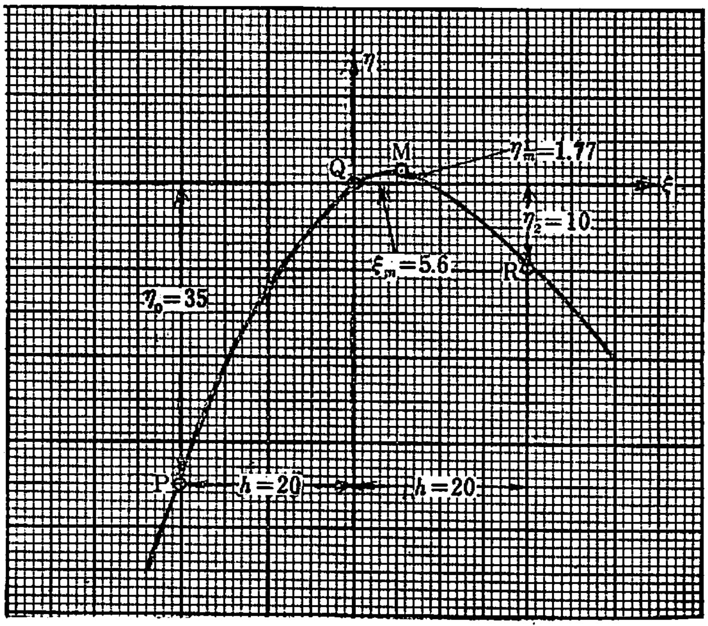
$$y_m=y_1-\frac{\alpha^2}{4\beta}=0.99619-\frac{(0.0015123)^2}{-4\times0.00015138}=0.99619+0.003777$$

$$=\underline{0.999967}$$

正確な $x_m=90°$，$y_m=1.00000$ であるから，これとの一致は実用上十分な精度のものである。

(6) 方眼紙に画かれた共振曲線の最大値を求める操作例：

第3図のように最大値点を求める曲線の点が方眼紙の上にすでに画かれている場合には，図示の通り P 点の原点 Q に対する位置（ξ_0, η_0）を方眼の目数を測って定め，また R 点の位置（ξ_2, η_2）を定める。



第3図　方眼紙上に画かれた点についての操作例

第3図の場合： $h=20,\quad \eta_0=35,\quad \eta_2=10$

公式(11)により

$$\xi_m=\frac{35-10}{35+10}\cdot\frac{20}{2}=\frac{25}{45}\cdot 10=\frac{250}{45}=5.6$$

$$\eta_m=\frac{25\times 25}{45}\cdot\frac{1}{8}=1.7_7$$

のように簡単迅速に最大値点Mの位置を定めることができる。実験データの解析に速応できるものである。

上記の諸例において最大値の値が正確な値より，ごく僅かながら小さく（undershooting）計算されたのは，諸例の関数の最大点近傍の級数展開式の x^4 の項の係数が正であるためであることが，詳しい解析によって知ることができる。すなわち，

$y=\sin x$ の $x=90°$の附近は $y=\cos x=1-\dfrac{x^2}{2\,!}+\dfrac{x^4}{4\,!}$の $x=0$ の附近対応するし，また

$$y=J_0(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{64}$$

であって，何れも x^4 の項の係数が正であるからである。

これと反対に $y=\cosh x=1+\dfrac{x^2}{2\,!}+\dfrac{x^4}{4\,!}$ の極小点の問題では x^2 の項と x^4 の項の符号が同じで，極小点の値の行過ぎ（overshooting）を示すことが計算例によって明らかになる。

7. 結　　言

実験または計算によって求められグラフ化された共振曲線の最大点の位置を求める数値計算公式をきわめて簡単な形で求め，その応用例をよく知れた関数および線形共振曲線について実用上十分なる精度を有することを示した。とくに，方眼紙上での計算がきわめて容易なことも示した。

この計算公式は，対象とする共振曲線への近似放物線を決定しその最大値点（頂点）の位置を求める方法によって求めたものである。