

行列式 $\det(1/m+i+j)$ について

ANDO, Shiro / 安藤, 四郎

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部
研究集報

(巻 / Volume)

10

(開始ページ / Start Page)

15

(終了ページ / End Page)

18

(発行年 / Year)

1973-12

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004219>

行列式 $\det\left(\frac{1}{m+i+j}\right)$ について

安 藤 四 郎*

On the Determinant $\det\left(\frac{1}{m+i+j}\right)$

Shirô ANDÔ

Abstract

Let $\Delta(\varepsilon)$ denote the sum

$$\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

where $a_{ij} = (m+i+j)^{-1}$ ($m \geq 0$), the summation extends over all $n!$ permutations σ of $(1, 2, \dots, n)$ and $\varepsilon(\sigma)$ is an arbitrary function of σ whose values are 1 or -1 . When $\varepsilon(\sigma) = \text{sgn } \sigma$, it is reduced to the determinant of matrix $A = (a_{ij})$.

It is proved that if m is an integer, then

$$\min_{\varepsilon} |\Delta(\varepsilon)| = \det A,$$

by proving

$$\det A = l^{-1}$$

where l denotes the least common multiple of denominators of all terms of $\Delta(\varepsilon)$, and that if m is not an integer, this property is not always preserved.

§ 1. は し が き

以前「数学」¹⁾に米田信夫氏が提出した問題

「 $a_{ij} = (i+j)^{-1}$ を要素にもつ n 次の正方行列を $A = (a_{ij})$ とすると、その行列式は

$$\det A = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \quad \varepsilon(\sigma) = \text{sgn } \sigma$$

(右辺の和で σ は S_n の全体をわたる)

によって定義されるが、この式の $\varepsilon(\sigma)$ に任意に ± 1 の値を与えて作った同様な和のうちで、絶対値が最小になるのは $\varepsilon(\sigma) = \pm \text{sgn } \sigma$ のときではないか」に対し、筆者は、

$$\Delta(\varepsilon) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad (1)$$

$$(\varepsilon(\sigma) = \pm 1)$$

とするとき、

$$\min_{\varepsilon} |\Delta(\varepsilon)| = \det A \quad (2)$$

* 電気工学科 (計測制御専攻) 助教授

を証明し、さらに、 $n=7$ のとき $\varepsilon(\sigma)=\pm \operatorname{sgn} \sigma$ でない和で最小値を与える例を示して、半肯定的な解答を与えた。

この報告では、これを拡張して、

$$a_{ij} = \frac{1}{m+i+j}, \quad (m \geq 0) \quad (3)$$

を要素にもつ行列式についても、 m が整数のときは同様の性質が成り立つことを示し、最小値を与える $\varepsilon(\sigma)$ について検討する。さらに、 m が整数でないときには必ずしもこの性質が成り立たないことを示す。

§ 2. m が整数のとき

補題 1 $A=(a_{ij})$ を、 (i, j) 要素が (3) で与えられる n 次の正方行列とすると、(1) の各項の分母の最小公倍数を

$$l = \text{l.c.m.}_\sigma (a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)})^{-1}$$

とすると、

$$\det A = \frac{1}{l}$$

となる。

証明 よく知られた公式

$$\det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right) = \frac{\prod_{i>k} (a_i - a_k) \prod_{i>k} (b_i - b_k)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}$$

で、 $a_i = m+i$, $b_j = j$ とおくと、

$$(\det A)^{-1} = n! \prod_{r=1}^n \frac{(m+n+r)!}{r! (m+r)! (n-r)!}$$

となり、この値は正の整数である。

定義式から明らかなように、

$$\det A = \frac{k}{l} \quad (k \text{ は整数})$$

となるから、

$$(\det A)^{-1} l$$

一方、

$$\begin{aligned} (\det A)^{-1} \left/ \frac{1}{a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}} \right. &= \prod_{r=1}^n \frac{(m+n+r)!}{(r-1)! (m+r)! (n-r)!} \left/ \prod_{r=1}^n (m+r+\sigma(r)) \right. \\ &= \prod_{r=1}^n \left\{ \frac{(m+n+r)!}{(r-1)! (m+\sigma(r))! (n-\sigma(r))!} \left/ \frac{(m+r+\sigma(r))!}{(m+r+\sigma(r)-1)!} \right. \right\} \end{aligned}$$

$$= \prod_{r=1}^n \left\{ \frac{(m+n+r)!}{(n-\sigma(r))!(m+r+\sigma(r))!} \frac{(m+r+\sigma(r)-1)!}{(r-1)!(m+\sigma(r))!} \right\}$$

は整数だから, $(\det A)^{-1}$ は任意の σ に対して $(a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)})^{-1}$ で割れ, したがって l で割れる。よって,

$$\det A = \frac{1}{l}$$

補題 2 a_{ij} を上と同様とし, $\Delta(\varepsilon)$ を(1)で定義すると, $\Delta(\varepsilon) \neq 0$.

証明 $\det A$ の展開式の分母が l になるように通分したとき, 分子の和が1になることから, 分子が奇数の項は奇数個である。したがって, $\Delta(\varepsilon)$ の展開式でも同様となり,

$$\Delta(\varepsilon) = \frac{k}{l} \quad (k \text{ は奇数})$$

と表わされる。よって, $\Delta(\varepsilon) \neq 0$.

これらの補題から, ただちに次の定理が得られる。

定理 $\min_{\varepsilon} |\Delta(\varepsilon)| = \det A$

§ 3. 最小値を与える $\Delta(\varepsilon)$ の考察

$\min_{\varepsilon} |\Delta(\varepsilon)| = \Delta$ とすると, $\det A = \Delta$ であるから,

$$\varepsilon = \pm \operatorname{sgn} \sigma \quad (4)$$

に対応する $\Delta(\varepsilon)$ 以外に,

$$|\Delta(\varepsilon)| = \Delta \quad (5)$$

となるものがあるための条件は, $\det A$ の展開式の真の部分で0となるものが存在することである。

命題 1 $n \leq 3$ のとき, (5)が成り立つのは(4)の場合に限る。

証明 この場合, 項の大きさを考えると, 2つの項が1つの項と打ち消すことはないから, 真の部分で0になるものがあるとすれば, 1つの正項と1つの負項で打ち消さなければならないが, 正項と負項で絶対値の等しいものはないから, このようなことは起こらない。

命題 2 $n \geq 5$ のとき, (4)で与えられる $\Delta(\varepsilon)$ のほかに(5)をみたすものがある。

証明 $\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = +1, \quad \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -1$

だから, $a_{ij} = (m+i+j)^{-1}$ に対し,

$$a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}a_{66} \cdots a_{nn} - a_{12}a_{25}a_{33}a_{41}a_{54}a_{66} \cdots a_{nn}$$

は $\det A$ の展開式の真の部分で, 値は0である。

注意 $n=4$ のときは, m の値によって結果が異なる。たとえば, $m=0$ のときは $\det A$ の真の部分で0となるものはないが, $m=1$ のときは, 真の部分で

$$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}, a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$$

等が 0 となる。

§ 4. m が整数でないとき

この場合には必ずしも § 2. の定理の性質は成り立たない。以下にその例を示す。

$n \geq 4$ とし, $a_{ij} = (x+i+j)^{-1}$ (x は正の実数) に対する $\det A$ の部分

$$S(x) = a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}a_{55} \cdots a_{nn} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55} \cdots a_{nn}$$

をとる。ここで, $x=1+t$ とおくと,

$$S(1+t) = - \frac{2t}{(t+7)(t^3+17t^2+90t+144)(t^3+17t^2+80t+144) \prod_{r=5}^n (t+2r+1)}$$

x に対する $\det A$ の値を $D(x)$ とおくと, $D(1) > 0$. よって,

$$|t| < \delta_1 \text{ のとき } D(1+t) > \frac{1}{2} D(1)$$

となるような δ_1 がある。また, 適当な δ_2 をとると,

$$-\delta_2 < t < 0 \text{ のとき } 0 < S(1+t) < \frac{1}{2} D(1)$$

よって, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと,

$$-\delta < t < 0 \text{ のとき } |D(1+t) - 2S(1+t)| < D(1+t)$$

そこで, このような t の 1 つを t_0 とし, $m=1+t_0$ とおく。この m に対する $\det A$ で, 定義式の $S(x)$ の部分の符号を変えたものを $\Delta(\epsilon)$ とすると,

$$|\Delta(\epsilon)| < \det A$$

となる。

§ 5. あ と が き

(3) をさらに一般化した

$$a_{ij} = \frac{1}{m+pi+qj} \quad (p, q \text{ は正の整数})$$

の場合が考えられるが, $p=q$ としても必ずしも定理が成り立たないことが, § 4. の反例で m を有理数にとれることからわかる。

また, $m=0$ のとき, 各要素から $\frac{1}{(p,q)}$ をくり出せば $(p,q)=1$ としてよいが, この場合, 一般には $\det A$ (既約分数で表わしたもの) の分子は 1 とならず, p, q の因数が残る。そういう意味で (3) は補題 1 が成り立つかなり一般の形である。

参 考 文 献

- 1) 日本数学会編集, 数学 8 巻 1 号, 3 号, 4 号