グラフの平面性判定に関する一解法アルゴリズム

FUKUMA, Toshiko / 福馬, 敏子

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Technical College of Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
12
(開始ページ / Start Page)
27
(終了ページ / End Page)
36
(発行年 / Year)
1976-01
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004202

グラフの平面性判定に関する一解法アルゴリズム

福 馬 敏 子*

A Computational Algolithm for Determining Whether a Graph is Planar

Toshiko FUKUMA

Abstract

One of the computational algolithms is presented for determining whether a graph is planar.

All of the operations of the algolithm are expressed in terms of the incidence matrix of the graph. If the graph is nonplaner, the algolithm systematically identifies a set of edges whose delation yields a subgraph that is planar.

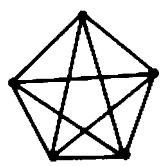
The algolithm has been programmed for a computer and is computationally efficient.

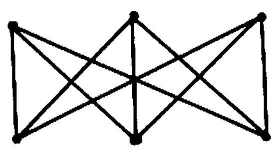
The program can also be used to obtain a planar partition of a nonplanar graph.

The algolithm is based on a decomposition theorem which reduces the problem of testing the planarity of an arbitrary graph G to the problem of testing Kuratowski's theorem.

§1 緒 言

一般のグラフが平面グラフであるかどうかの問題は，輸送網，電気通信，回路網の各分野でさかんに利用されつつある。この問題は，クラトフスキーが，与えられたグラフが下の２つの


K_5


K_{33}

グラフを部分グラフとして含んでいるかどうかを調べることによって，平面グラフかどうかを判定できることを証明した。

そこで，クラトフスキーによる定理「与えられたグラフが平面グラフであるための必要十分条件は，そのグラフの枝のいくつかの開放除去，短絡除去によって，K_5，K_{33}の二つのグラフ

* 経営工学科

のいずれも生じないことである。」と，その補題をもとに，これをアルゴリズム化し，実際に電子計算機によって処理を行った。

〔**諸定義**〕

グラフに関する用語を次のように定義する。

1. グラフ$G=(V, E)$は点（節点，頂点）の集合Vと，枝の集合Eからなるものであり，各枝$e(\epsilon E)$は，点v_i, $v_g(\epsilon V)$の非順序対（v_i, v_j）である。
2. 点と枝を交互に並べた系列$p=(v_1\ e_1\ v_2\ e_2 \cdots\cdots v_{n-1}\ e_{n-1}\ v_n)$で各枝$e_i$が$e_i=(v_i,\ v_{i+1})$であるとき，その系列を$v_1$と$v_n$を結ぶ　長さ$n-1$のウオークといい，同じ点を2度以上通らないウォークを道という。とくに閉じた道を閉路（*tiset*）という。
3. グラフGの任意の2点間を結ぶ道があるとき，Gは連結であるという。
4. 閉路がないグラフを林とよび，連結な林を木とよぶ。特にグラフGのすべての点をもつ部分グラフで，かつ木であるものを，単にそのグラフGの木という。
5. 連結グラフGで$G-\{v\}$ $(v\epsilon V)$が非連結であるとき，vは可分点という。非連結グラフ，あるいは可分点をもつグラフは，可分グラフといい，そうでないグラフは非可分グラフという。
6. 点v_iと枝e_jが接続しているとき$b_{ij}=1$，そうではないとき0とした$|V|$行$|E|$列の行列を接続行列（incidencematrix）という。
7. グラフGの各木に対応する行，各枝に対応する列をもつ行列でi番目の木Z_iが枝e_jを含むとき，$T_{ij}=1$，そうでないとき0とした行列を木行列（Tree matrix）という。
8. Gの各閉路に対応する行，各枝に対応する列をもつ行列で，i番目の閉路Z_iが枝e_jを含むときに，$C_{ij}=1$，そうでないときに0とした行列を閉路行列（tieset matrix）という。
9. 枝eを除去したグラフを，グラフGから枝eを開放除去して得られるグラフといい，枝eの両端点を同一の点として枝eを除去したグラフを，グラフGから枝eを短絡除去して得られるグラフという。
10. 連結グラフGの一つの木Tに対し，Tに属さないすべての枝からなる部分グラフを補木という。
11. Tに対して，その補木枝をつけ加えることにより得られる閉路を基本閉路とよぶ。
12. 周囲を一つの閉路で囲まれた平面の部分領域を窓という。

§2 理　論

いま与えられたグラフGは非可分であるとする。（可分なきときは，その非可分部分の一つ一つについて平面性を判定すればよい。）Gに含まれる一つの閉路Xの枝を短絡除去して得られるグラフをその非可分部分に応じて分割すると，いくつかの枝の部分集合が求まる。これ等を，

E_1，E_2，E_3，……E_dとする。(図1，2）

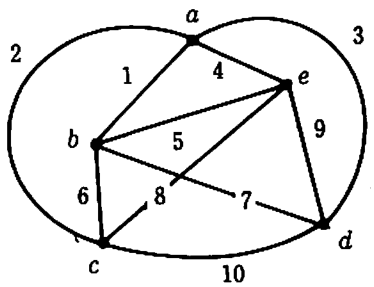


図　1

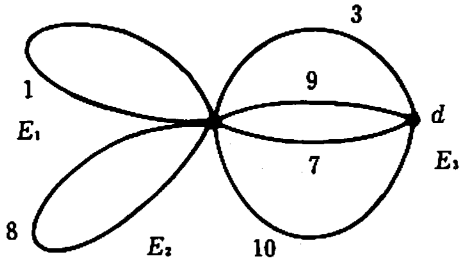


図　2

ここで$d \geqq 2$と仮定して，E_1，E_2，E_3，……E_dのうちの一つたとえばE_1を選びそれ以上の部分集合の枝をもとのグラフから開放除去したグラフを求める。このグラフとXとの和集合をg_1とし，同様にE_2，E_3，……E_dに対応するものを，各々g_2，g_3……g_dとする。(図3）

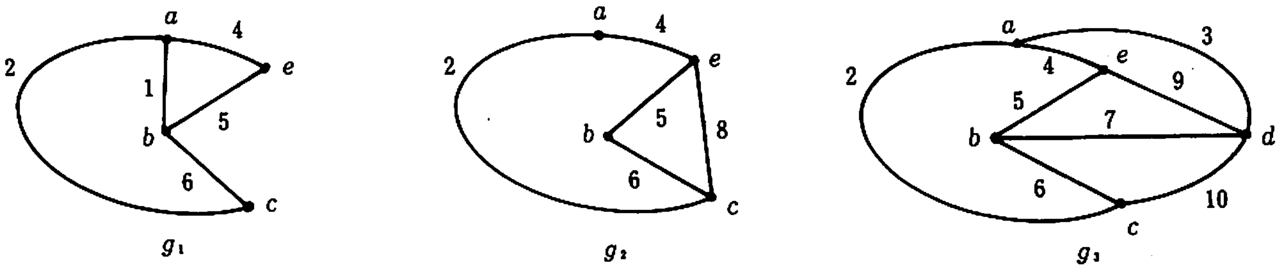


図　3

与えられたグラフが平面グラフであると仮定すると，g_m $(m=1,2,3,\cdots\cdots p)$は，すべて平面グラフでなければならない。いまg_mがすべて平面グラフであるならば，二つのグラフg_iとg_jが重なり合っているときには，E_iがXの内側に描かれるなら，E_jはXの外側に描かれなければならない。(図4）

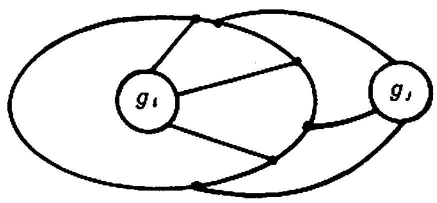


図　4

またg_iとg_jが互いに重なり合っていないとすると，g_iとg_jをXを共通にし，まとめて平面上に描こうとすると，E_iの枝からなる部分グラフをXの内側に，E_jの枝からなる部分グラフをXの外側に描くことができる。またXを軸として折り返してXの内側に描くことも可能である。(図5）

図　5

重なり合わないグラフが3個以上のときも同様である。(図6)

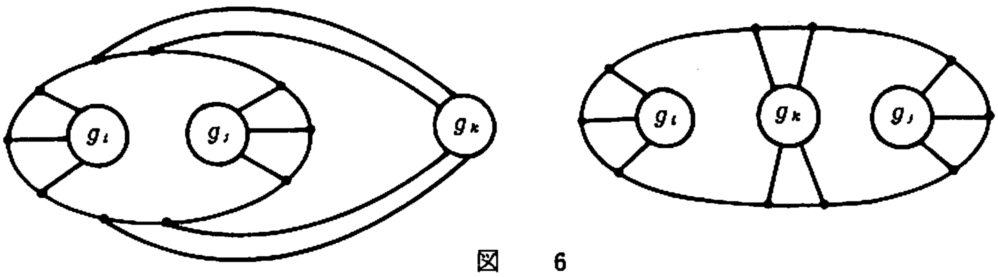


図 6

以上のことから，g_m ($m=1$，2，……p) がすべて平面グラフであるときGが平面である必要十分条件は，g_mを組の中では互いに重なり合わないような2組に分けられることであるといえる。

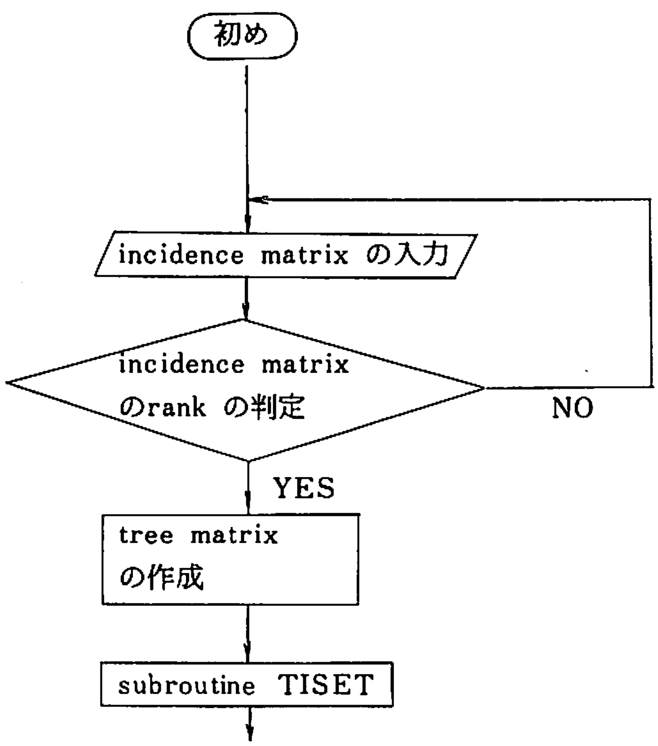
g_m ($m=1$，2，……p) は$P\geqq 2$ならば与えられたグラフGより枝数の少ないグラフであり，Gの平面性判定は，枝数がもとより少ない，いくつかのグラフの平面性の判定をすればよいことになる。なお，$p=1$となる閉路Xは$G=g_1$となり平面性の判定には利用できない。

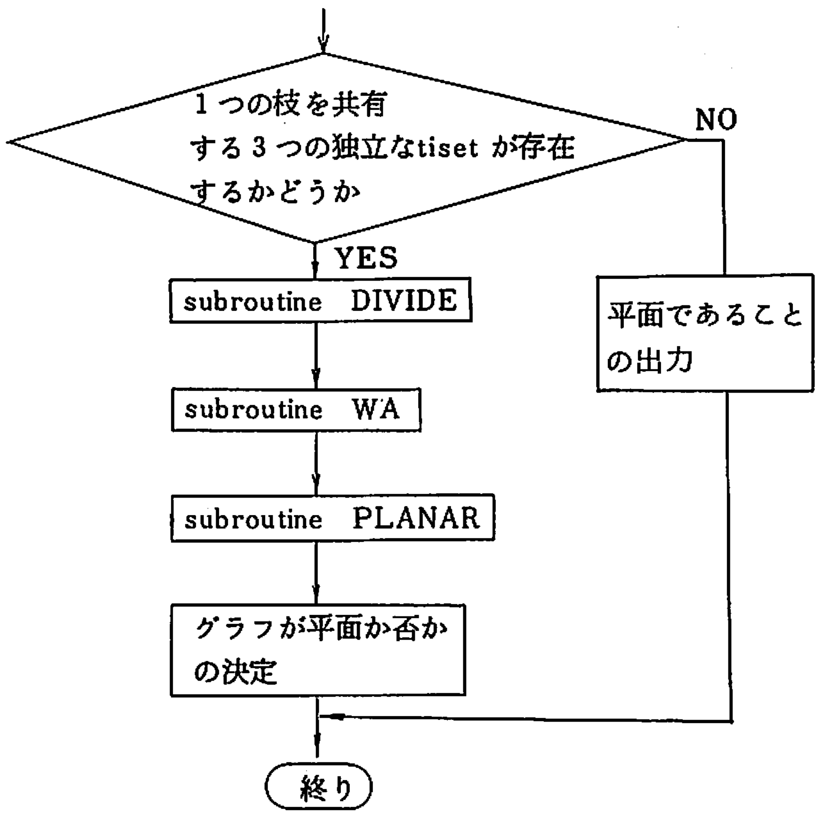
また平面グラフにおいて1本の枝は3個以上の窓に含まれることはない。ゆえにグラフGの枝を1本選んで，この枝を含む3つの独立な閉路を選ぶことができるとき，これ等の閉路を各々短絡除去して得られるグラフがいずれも非可分であれば非平面グラフである。

以上をアルゴリズムとしてまとめると，次のようになる。

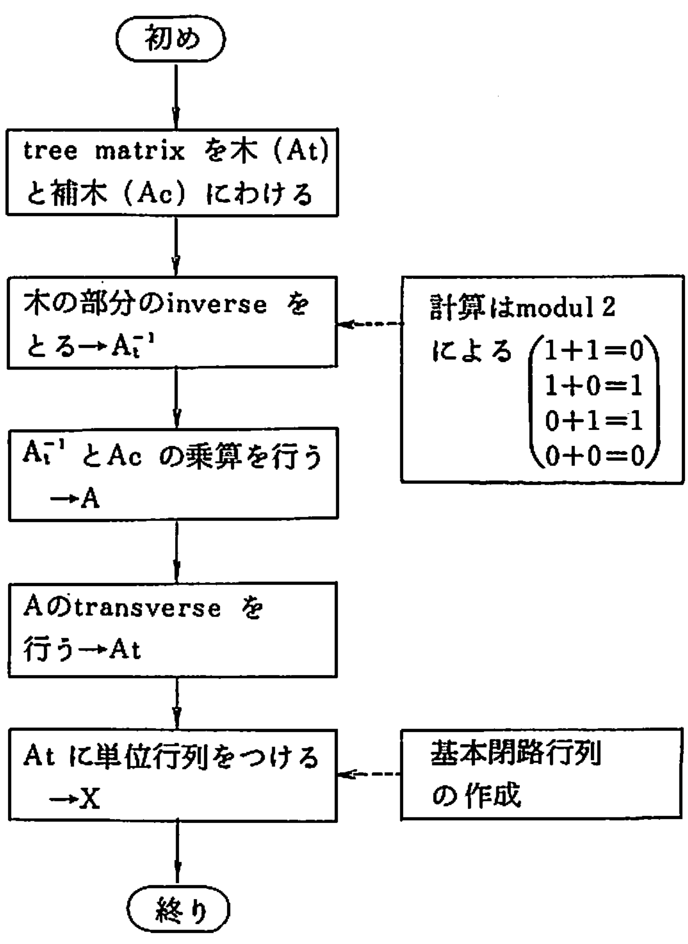
(注．閉路行列を作成するまでの説明は本論中では省略してあるが，下記のアルゴリズムによって明らかであろう。)

〔アルゴリズム〕

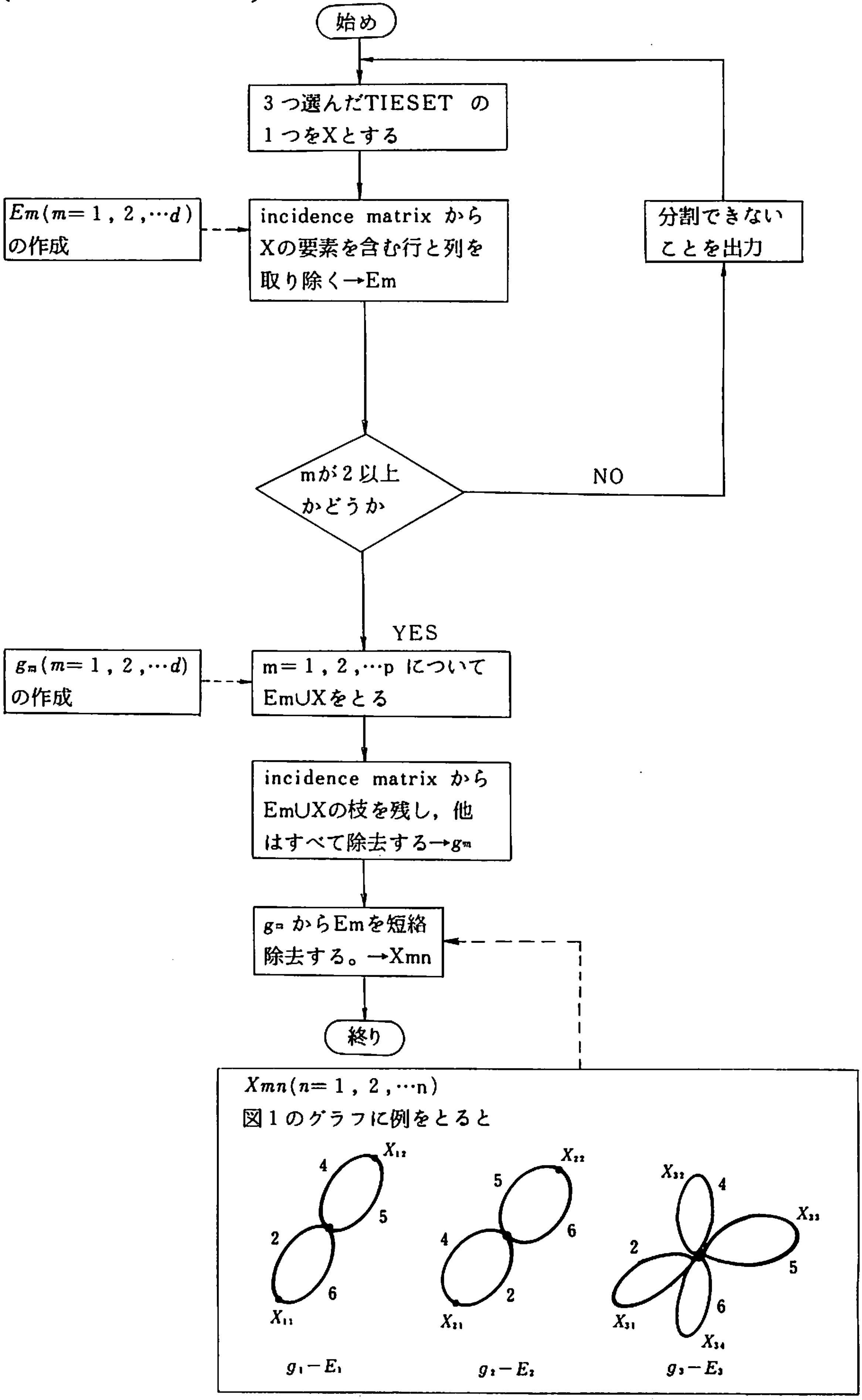




〔SUBROUTINE TIESET〕



〔SUBROUTINE DIVIDE〕



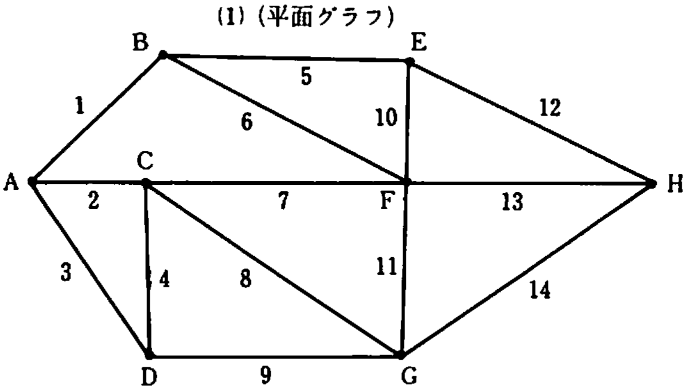
§3　結　び

グラフの平面性判定を，グラフ(1)，グラフ(2)について行った結果，
グラフ(1)は平面グラフであり，(2)は非平面グラフであることがわかる。

また共通な枝を含む3個の独立なタイセットを選ぶときには，できるだけ多くの枝を含むタイセットを選ぶのが有効であることもわかる。

計算はFACOM230-45Sを使用したものであり，計算時間は，グラフ(1)で，任意の木，6本の各々について判定したもので16秒258マイクロ秒，グラフ(2)で，任意の木，8本の各々については，14秒504マイクロ秒であった。

(1)（平面グラフ）



INCIDENCE MATRIX

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
D	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
F	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
G	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1

TREE MATRIX NO. 1

	1	5	2	3	10	11	14	4	6	7	8	9	12	13
A	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
C	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
D	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
E	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
F	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
G	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0

INVERSE MATRIX

1	0	-1	-1	0	0	0
-1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
1	-1	-1	-1	1	0	0
-1	1	1	1	-1	1	0
1	-1	-1	-1	1	-1	1

FUNDAMENTAL TIE SET MATRIX

	1	5	2	3	10	11	14	4	6	7	8	9	12	13
T 1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
T 2	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
T 3	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
T 4	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
T 5	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
T 6	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
T 7	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1

WHEN WE CHOOSE FUNDAMENTAL TIESET NO. 4

E 1

3	4	9
1	1	0
1	0	1

B 1

	1	5	2	3	10	11	4	8	9
4	1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
5	1	1	0	1	1	1	0	0	1

E 2

14	12	13
1	1	0
1	0	1

B 2

	1	5	2	10	11	14	8	12	13
4	1	1	1	1	1	0	1	0	0
6	0	0	0	1	1	1	0	1	0
7	0	0	0	0	1	1	0	0	1

E 3

6
1

B 3

	1	5	2	10	11	6	8
4	1	1	1	1	1	0	1
2	0	1	0	1	0	1	0

E 4

7
1

B 4

	1	5	2	10	11	7	8
4	1	1	1	1	1	0	1
3	1	1	1	1	0	1	0

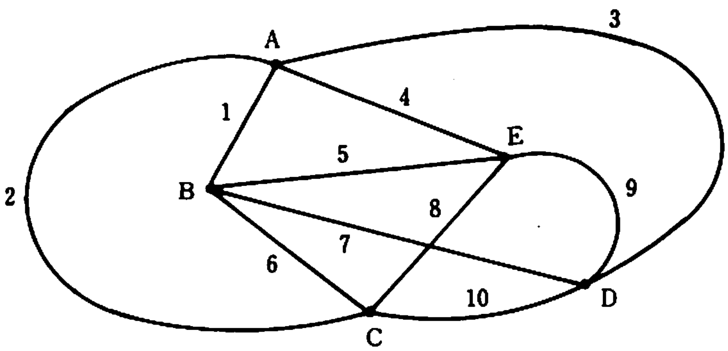
WHEN WE TAKE TIE SET (1 5 2 10 11 8)

COMBINATION IS (1 5 10 11)

COMBINATION IS (1 5 2 8)

PLANAR (1 5 10 11 2 8)

(2) (非平面グラフ)



参 考

INCIDENCE MATRIX

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AI	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
BI	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
CI	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1
DI	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1

TREE MATRIX NO. 5

I	1	5	6	3	2	4	7	8	9	10
AI	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
BI	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
CI	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
DI	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1

INVERSE MATRIX

1	0	0	-1
-1	1	-1	1
0	0	1	0
0	0	0	1

FUNDAMENTAL TIE SET MATRIX

I	1	5	6	3	2	4	7	8	9	10
T 1I	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
T 2I	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
T 3I	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
T 4I	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
T 5I	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
T 6I	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1

WHEN WE CHOOSE FUNDAMENTAL TIESET NO. 1

WE CAN NOT DICOMPOSE

WHEN WE CHOOSE FUNDAMENTAL TIESET NO. 2

WE CAN NOT DICOMPOSE

WHEN WE CHOOSE FUNDAMENTAL TIESET NO. 3

WE CAN NOT DICOMPOSE

WHEN WE CHOOSE FUNDAMENTAL TIESET NO. 4

WE CAN NOT DICOMPOSE

WHEN WE CHOOSE FUNDAMENTAL TIESET NO. 5

E 1

6	2	8	10
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1

B 1

I	1	5	6	3	2	8	9	10
5I	1	1	0	1	0	0	1	0
1I	1	0	1	0	1	0	0	0
4I	0	1	1	0	0	1	0	0
6I	1	0	1	1	0	0	0	1

E 2

4
1

B 2

I	1	5	3	4	9
5I	1	1	1	0	1
2I	1	1	0	1	0

E 3

7
1

B 3

I	1	5	3	7	9
5I	1	1	1	0	1
3I	1	0	1	1	0

WHEN WE TAKE TIE SET (1 5 3 9)

COMBINATION IS (1)

COMBINATION IS (1 5)

NOT PLANAR (1 5)

COMBINATION IS (1)

COMBINATION IS (3 9)

NOT PLANAR (1 3 9)

COMBINATION IS (5)

COMBINATION IS (1 5)

NOT PLANAR (5 1)

COMBINATION IS (5)

COMBINATION IS (3 9)

NOT PLANAR (5 3 9)

COMBINATION IS (3)

COMBINATION IS (1 5)

NOT PLANAR (3 1 5)

COMBINATION IS (3)

COMBINATION IS (3 9)

NOT PLANAR (3 9)

COMBINATION IS (9)

COMBINATION IS (1 5)

NOT PLANAR (9 1 5)

COMBINATION IS (9)

COMBINATION IS (3 9)

NOT PLANAR (9 3)

COMBINATION IS (1)

COMBINATION IS (1 3)

NOT PLANAR (1 3)

COMBINATION IS (1)

COMBINATION IS (5 9)

NOT PLANAR (1 5 9)

COMBINATION IS (5)

COMBINATION IS (1 3)

NOT PLANAR (5 1 3)

COMBINATION IS (5)

COMBINATION IS (5 9)

NOT PLANAR (5 9)

COMBINATION IS (3)

COMBINATION IS (1 3)

NOT PLANAR (3 1)

COMBINATION IS (3)

COMBINATION IS (5 9)

NOT PLANAR (3 5 9)

COMBINATION IS (9)

COMBINATION IS (1 3)

NOT PLANAR (9 1 3)

COMBINATION IS (9)

```
COMBINATION IS ( 5 9 )
NOT PLANAR ( 9 5 )
COMBINATION IS ( 1 5 )
COMBINATION IS ( 1 3 )
NOT PLANAR ( 1 5 3 )
COMBINATION IS ( 1 5 )
COMBINATION IS ( 5 9 )
NOT PLANAR ( 1 5 9 )
COMBINATION IS ( 3 9 )
COMBINATION IS ( 1 3 )
NOT PLANAR ( 3 9 1 )
COMBINATION IS ( 3 9 )
COMBINATION IS ( 5 9 )
NOT PLANAR ( 3 9 5 )
WHEN WE CHOOSE FUNDAMENTAL TIESET NO. 6

E 1

  5  4  8  9
------------
  1  1  0  0
  1  0  1  0
  1  0  0  1

B 1

     I   1  5  6  3  4  8  9 10
-------------------------------
    6I   1  0  1  1  0  0  0  1
    2I   1  1  0  0  1  0  0  0
    4I   0  1  1  0  0  1  0  0
    5I   1  1  0  1  0  0  1  0

E 2

  2
---
  1

B 2

     I   1  6  3  2 10
----------------------
    6I   1  1  1  0  1
    1I   1  1  0  1  0

E 3

  7
---
  1

B 3

     I   1  6  3  7 10
----------------------
    6I   1  1  1  0  1
    3I   1  0  1  1  0
WHEN WE TAKE TIE SET ( 1 6 3 10 )
COMBINATION IS ( 1 )
COMBINATION IS ( 1 6 )
NOT PLANAR ( 1 6 )
COMBINATION IS ( 1 )
COMBINATION IS ( 3 10 )
NOT PLANAR ( 1 3 10 )
COMBINATION IS ( 6 )
COMBINATION IS ( 1 6 )
NOT PLANAR ( 6 1 )
COMBINATION IS ( 6 )
COMBINATION IS ( 3 10 )
NOT PLANAR ( 6 3 10 )
COMBINATION IS ( 3 )
COMBINATION IS ( 1 6 )
NOT PLANAR ( 3 1 6 )
COMBINATION IS ( 3 )
COMBINATION IS ( 3 10 )
NOT PLANAR ( 3 10 )
COMBINATION IS ( 10 )
COMBINATION IS ( 1 6 )
NOT PLANAR ( 10 1 6 )
COMBINATION IS ( 10 )
COMBINATION IS ( 3 10 )
NOT PLANAR ( 10 3 )
COMBINATION IS ( 1 )
COMBINATION IS ( 1 3 )
NOT PLANAR ( 1 3 )
COMBINATION IS ( 1 )
COMBINATION IS ( 6 10 )
NOT PLANAR ( 1 6 10 )
COMBINATION IS ( 6 )
COMBINATION IS ( 1 3 )
NOT PLANAR ( 6 1 3 )
COMBINATION IS ( 6 )
COMBINATION IS ( 6 10 )
NOT PLANAR ( 6 10 )
COMBINATION IS ( 3 )
COMBINATION IS ( 1 3 )
NOT PLANAR ( 3 1 )
COMBINATION IS ( 3 )
COMBINATION IS ( 6 10 )
NOT PLANAR ( 3 6 10 )
COMBINATION IS ( 10 )
COMBINATION IS ( 1 3 )
NOT PLANAR ( 10 1 3 )
COMBINATION IS ( 10 )
COMBINATION IS ( 6 10 )
NOT PLANAR ( 10 6 )
COMBINATION IS ( 1 6 )
COMBINATION IS ( 1 3 )
NOT PLANAR ( 1 6 3 )
COMBINATION IS ( 1 6 )
COMBINATION IS ( 6 10 )
NOT PLANAR ( 1 6 10 )
COMBINATION IS ( 3 10 )
COMBINATION IS ( 1 3 )
NOT PLANAR ( 3 10 1 )
COMBINATION IS ( 3 10 )
COMBINATION IS ( 6 10 )
NOT PLANAR ( 3 10 6 )
```

参考文献

1. Graph Theory of Frank Harary. (Addison-Wesley Publishing Company)
2. M. Iri "On the synthesis of loop and cutset matrices and related problems." RAAG Mem.

3. J. Bruno. K. Steiglitq, and L. Weinberg "A New planarity tert based on 3-connectivity," IEEE Trans. CT−17. (1970)
4. J.E Hopcroft and R.E Tarjan: "Dividing a graph into triconnected components," SIAM J. Comput. Vol.2. (1973)
5. J.E Hopcroft and R.E Tarjan: "Efficient planarity testing", Tech. Rep. 73−165, Dept. of Computen Science, Cornell University. 1973
6. ネットワーク構造を有するオペレーションズ・リサーチ問題の電算機に関する基礎研究ー日本OR学会 (1974)
7. 服部，小澤"グラフ理論解説"昭晃堂 (1974)
8. 尾崎，白川，"グラフとネットワークの理論"コロナ社 (1974)