# 最良生産工程選択のための寿命試験システムに関する一考察 : 2つのワイブル・プロセスの定数打ち切り方式による判別

Kigawa, Shun’ichi / 城川, 俊一

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学工学部研究集報 / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
13
(開始ページ / Start Page)
51
(終了ページ / End Page)
57
(発行年 / Year)
1977-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004187

# 最良生産工程選択のための寿命試験システムに関する一考察

## ——2つのワイブル・プロセスの定数打ち切り方式による判別——

城川 俊一*

# Life Testing Systems for Selecting the Best Production process

## ——Discrimination between Two Weibull Processes by the Fixed Number Testing Method——

Shunichi KIGAWA

**Abstract**

Given two production processes, the units from which fail in accordance with the Weibull distribution with unknown scale parameter, the problem of selecting the paticular process with the larger mean life is considered from the standpoint of hypothesis testing. Life testing is the fixed number testing. In this article, two types of the hypothesis, $H_1 : \lambda_2/\lambda_1 \leqq \Delta_0$ and $H_2 : \lambda_2/\lambda_1 = \Delta_0$, are constructed and derived the UMP unbiased tests. By the characteristics of these tests, the policy to decide which hypothesis is better is suggested in accordance with the magnitude of the experimenter's risk when the experimenter selects the process.

## §1. 諸　言

同一種類の製品を生産する工程やメーカーがある場合に，いずれの工程やメーカーの製品が品質において一番すぐれているかを知ることは工程の設計や製品の品質設計を行う際の重要な問題であり，そのための寿命試験システムを開発することが必要である。

本報告では，2つのワイブル・プロセスをする工程について定数打ち切り方式による判別を仮説検定論の立場から定式化し論じることにする。仮説検定論的立場に従って，ワイブル・プロセスの尺度パラメータに関する帰無仮説 $H_1 : \lambda_2/\lambda_1 \leqq \Delta_0$，及び $H_2 : \lambda_2/\lambda_1 = \Delta_0$ の2つの場合について，UMP 不偏検定を構成しあわせて検出力を導びき，それらの特性に従って良製品を採用する場合の実験者が受ける損失の大小の立場のちがいによってどちらの仮説を使うべきかを提案する。

## §2. 問題の提起

今2つの工程 $\Pi_1$，$\Pi_2$ から製品のロットが生産されたとする。$\Pi_1$ からのロットは $N_1$ 個，$\Pi_2$

* 経営工学科

からのロットは $N_2$ 個から成る。2つのロットの製品が同一条件のもとで同時に試験にかけられたものとする。故障は互いに独立に，$m$，$\lambda_i^0(i=1,\ 2)$ をパラメータにもつワイブル分布，

$$f(x|\lambda_i^0,\ m)=m(\lambda^0{}_i)^m x^{m-1}\exp[-(\lambda^0{}_i x)^m] \tag{1}$$

に従って起こるものとする。しかし，この分布は，$(\lambda_i^0)^m=\lambda_i$，$x^m=t$ なる変換によって，指数分布

$$g(t|\lambda_i)=\lambda_i\exp[-\lambda_i t],\ i=1,\ 2 \tag{2}$$

になる。したがって以下では指数分布について論議する。ここで尺度パラメータ $\lambda_i(i=1,2)$ は未知で工程ごとに異なるものとする。試験は取替なしの定数打ち切り方式で行うものとする。その時，問題は，帰無仮説 $H_1:\lambda_2/\lambda_1\leqq\varDelta_0$，及び $H_2:\lambda_2/\lambda_1=\varDelta_0$ のの2つ場合についてその UMP 不偏検定と検出力を求めることである。

## §3.　各種の検定の構成と検出力

試験方式が，取替なしの定数打ち切り方式であるので，$\Pi_1$ のロットで $r_1$ 個，$\Pi_2$ のロットで $r_2$ 個の故障が観測されたとき試験を終了させ仮説を検定する。$\Pi_1$ のロットでの $r_1$ 個の故障時点を $X_1$，$X_2$，$\cdots X_{r_1}$ とし，$\Pi_2$ のロットでの $r_2$ 個の故障時点を $Y_1$，$Y_2$，$\cdots Y_{r_2}$ とする。するとこれらの同時密度関数は，

$$p(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{r_1},\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{r_2}:\lambda_1,\ \lambda_2)=C\cdot\lambda_1^{r_1}\lambda_2^{r_2}\exp\left\{-\lambda_1\left[\sum_{i=1}^{r_1}x_i+(N_1-r_1)x_{r_1}\right]\right.$$
$$\left.-\lambda_2\left[\sum_{j=1}^{r_2}y_j+(N_2-r_2)y_{r_2}\right]\right\} \tag{3}$$

となり，これは指数分布族

$$dP_{\theta},\ \vartheta(x)=C(\theta,\ \vartheta)\exp\left[\theta U(x)+\sum_{i=1}^{k}\vartheta_i T_i(x)\right]d\mu(x) \tag{4}$$

で，$\theta=-\lambda_1$，$\vartheta_1=-\lambda_2$，$\vartheta_i=0\ (i=2,\ \cdots,\ k)$ 及び十分統計量

$$U=\sum_{i=1}^{r_1}X_i+(N_1-r_1)X_{r_1}\triangleq S_X$$

$$T_1=\sum_{j=1}^{r_2}Y_j+(N_2-r_2)Y_{r_2}\triangleq S_Y,\qquad T_i=0\ (i=2,\ \cdots,\ k)$$

としたものである。$\vartheta=(\vartheta_1,\ \cdots\vartheta_k)$，$T=(T_1,\ \cdots,\ T_k)$ とする。

この分布族は，パラメータを

$$\theta^*=-\lambda_1+\lambda_2/\varDelta_0,\ \vartheta_1^*=\vartheta_1=-\lambda_2,$$

及び統計量を

$$U^*=S_X,\ T_1^*=S_Y+S_X/\varDelta_0$$

を用いて表現してもまったく同等である。したがって帰無仮説 $H_1':\theta^*\leqq 0$，$H_2':\theta^*=0$ が，それぞれ帰無仮説 $H_1$，$H_2$ と同等である。

以下で必要なので E. L. Lehmann〔1〕による次の1つの系と1つの定理をのべておく。

**定理1.** (E. L. Lehmann)

$X$の分布が(4)で与えられ，仮説 $H_1: \theta \leqq \theta_0$ 及び $H_2: \theta = \theta_0$ を考えるとき，$\theta = \theta_0$ のとき $V = h(U, T)$ が$T$と独立であるとする。このとき，もし関数$h$が各$t$に対して$u$の増加関数であれば，次の(5)の $\phi_1$ は $H_1$ を検定するための UMP 不偏検定であり，(7)の $\phi_2$ はもし

$$h(u, t) = a(t)u + b(t), \quad a(t) > 0$$

であれば，$H_2$ の UMP 不偏検定である。

$$\phi_1(v) = \begin{cases} 1 & v > C_0 \\ \gamma_0 & v = C_0 \\ 0 & v < C_0 \end{cases} \tag{5}$$

ここで $C_0$, $\gamma_0$ は $t$ に依存せず

$$E_{\theta_0}[\phi_1(V)] = \alpha \tag{6}$$

から定められる。

$$\phi_2(v) = \begin{cases} 1 & v < C_1 \text{ または } v > C_2 \\ \gamma_i & v = C_i, (i = 1, 2) \\ 0 & C_1 < v < C_2 \end{cases} \tag{7}$$

ここで，$C_i$, $\gamma_i$ は

$$E_{\theta_0}[\phi_2(V)] = \alpha \tag{8}$$

$$E_{\theta_0}[V\phi_2(V)] = \alpha E_{\theta_0}(V) \tag{9}$$

から定められる。

**系1.** (E. L. Lehmann)

$X$の分布族が，(4)で$\theta$をある値に固定して得られる指数分布族とする。このとき統計量$V$がすべての$\vartheta$に対して$T$と独立であるための必要十分条件は，$V$の分布が$\vartheta$に依存しないことである。

まず $H_1$ について考察すると，$\lambda_2 = \Delta_0 \lambda_1$ のとき，統計量

$$V = \frac{S_X}{S_Y}$$

の分布は $\lambda_2$ に依存しないので，系1によって$V$は $T_1^*$ と独立である。それゆえ棄却域は，

$$\frac{S_X/2r_1}{\Delta_0 S_Y/2r_2} \geqq C_0 \tag{10}$$

と書ける。$\lambda_2 = \Delta_0 \lambda_1$ のとき，(10)の左辺の統計量は2つの独立な $\chi^2$ 変数 $2\lambda_2 S_Y$ 及び $2\lambda_1 S_X$ をそれぞれ自由度で割ったものの比になっている。この比の分布は自由度 $2r_1$, $2r_2$ の$F$分布であり，その密度関数は，

$$f_{2r_1, 2r_2}(v) = \frac{\Gamma(r_1 + v_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{r_1} v r_1 - 1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} v\right)^{-(r_1 + r_2)} \tag{11}$$

で与えられる。そうして(10)の定数 $C_0$ は

$$\int_{C_0}^{\infty} f_{2r_1,2r_2}(v)dv=\alpha \tag{12}$$

から定まる。$r_1=r_2=R_1$, $\Delta_0=1$ のとき $C_0=1$ である。

$V$の定義からその分布は $\lambda_2/\lambda_1$ なる比だけに依存しており，それゆえ検定(10)の検出力は変数 $\Delta=\lambda_2/\lambda_1$ だけの関数である。それは$F$分布をつかって具体的に表わすと

$$P_1(\Delta)=P\left\{\frac{\lambda_1 S_X/2r_1}{\lambda_2 S_Y/2r_2}\geqq\frac{C_0\Delta_0}{\Delta}\right\}=\int_{\frac{\Delta_0}{\Delta}C_0}^{\infty} f_{2r_1,\ 2r_2}(x)dx \tag{13}$$

次に，$H_2$ について考察すると，$\lambda_2=\Delta_0\lambda_1$ のとき，

$$W=\frac{S_X/\Delta_0}{S_Y+(1/\Delta_0)S_X} \tag{14}$$

の分布は，系1によって $T_1^*$ と独立であり，$U^*$ の1次関数になっているので定理1から，$H_2$ の UMP 不偏検定の受容域は

$$C_1\leqq W\leqq C_2 \tag{15}$$

であり，$W$の分母子に $2\lambda_1$ をかければ，$\lambda_2=\Delta_0\lambda_1$ のとき，統計量$W$は $W_2/(W_1+W_2)$ という比になり，$W_1$, $W_2$ はそれぞれ自由度，$2r_1$, $2r_2$ の独立な $\chi^2$ 変数である。$W$の分布は$B$分布であり，その密度関数は，

$$\beta_{r_1,\ r_2}(w)=\frac{\Gamma(r_1+r_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}w^{r_1-1}(1-w)^{r_2-1} \tag{16}$$

で与えられる。(8), (9)の条件は，

$$E(W)=\frac{r_1}{r_1+r_2} \tag{17}$$

及び

$$w\beta_{r_1,r_2}(w)=\frac{r_1}{r_1+r_2}\beta_{r_1+1,r_2}(w) \tag{18}$$

なる関数を用いれば，

$$\int_{C_1}^{C_2}\beta_{r_1,r_2}(w)dW=\int_{C_1}^{C_2}\beta_{r_1+1,r_2}(w)dw=1-\alpha \tag{19}$$

となる。$r_1-r_2=R_2$, $\Delta_0=1$ のとき，$C_1$, $C_2$ の各 $R_2$ での値は表1に示す。

表1. $H_2:\lambda_2/\lambda_1=1$ に対する危険率0.5の受容域
($r_1=r_2=R_2$, $\Delta_0=1$ の場合)

| $R_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | 0.2500 | 0.3263 | 0.3594 | 0.3788 | 0.3918 | 0.4015 | 0.4089 | 0.4149 | 0.4199 | 0.4241 |
| $C_2$ | 0.7500 | 0.6736 | 0.6405 | 0.6211 | 0.6080 | 0.5984 | 0.5909 | 0.5850 | 0.5800 | 0.5758 |

$W$の分布は，$\lambda_2/\lambda_1$ の比だけに依存しており，それゆえ検定(14)の検出力は

$$P_2(\Delta)=1-P\left\{a\leqq\frac{\lambda_1 S_X/2r_2}{\lambda_2 S_Y/2r_2}\leqq b\right\}=1-\int_a^b f_{2r_1,\ 2r_2}(x)dx \tag{20}$$

である。

ここで，$a=\dfrac{C_1\Delta_0 r_2}{\Delta(1-C_1)r_1}$，$b=\dfrac{C_2\Delta_0 r_2}{\Delta(1-C_2)r_1}$ である。

(13)と(20)のグラフは，それぞれ Fig. 1，2 に示す。

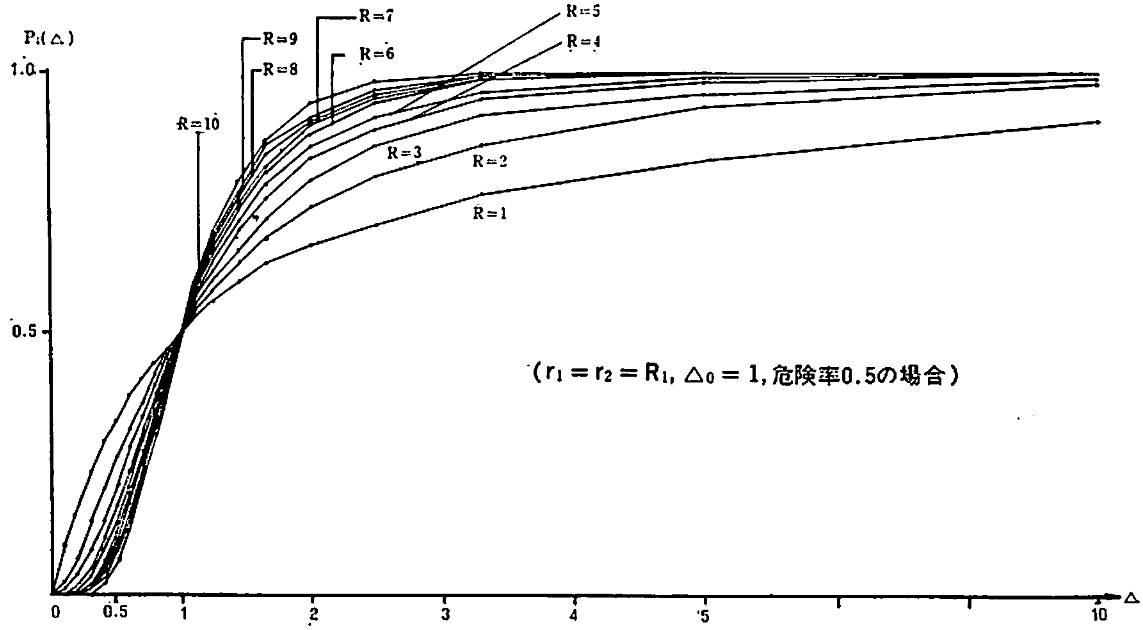


Fig. 1　$H_1$ : $\lambda_2/\lambda_1 \leqq 1$ に対する検出力曲線

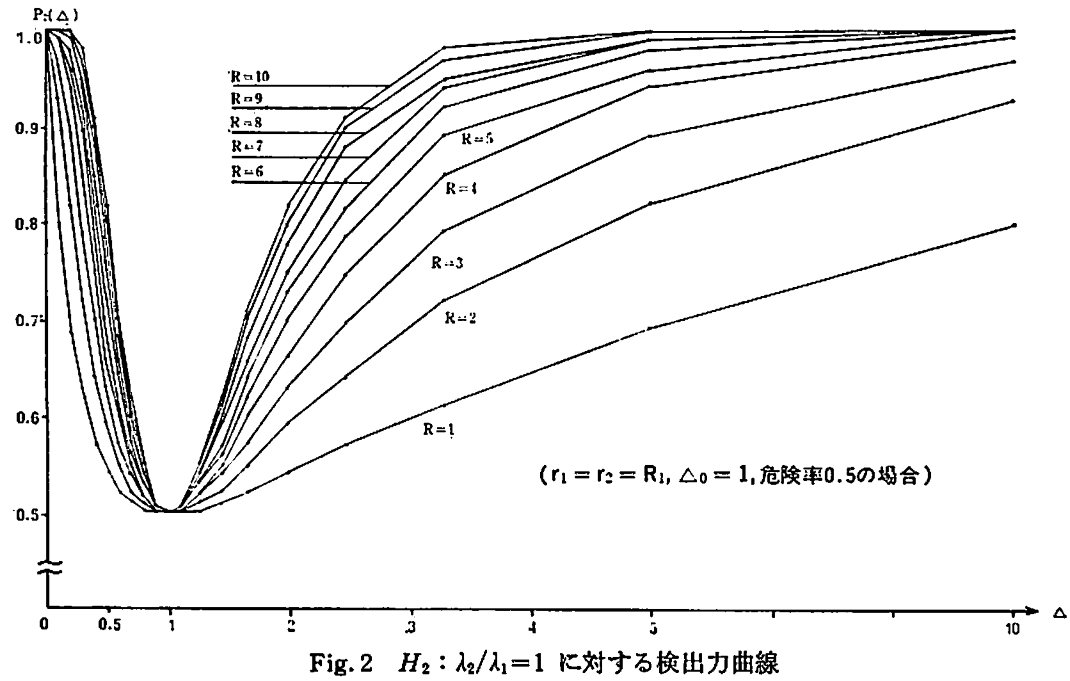


Fig. 2　$H_2$ : $\lambda_2/\lambda_1=1$ に対する検出力曲線

## §4.　結果及び考察

最良生産工程を選択することは，今の議論ではより小さい $\lambda$ をもつ生産工程（つまりより長い平均寿命をもつ工程）を選択することである。

その際，試験者のおかれた状況によって検定のたて方が異なる。つまり，帰無仮説 $H_1$ では，試験者が工程 $\Pi_1$ と工程 $\Pi_2$ のいずれかがよいかを無条件に選択する，いわば急進的な状況を表

わしていると考えられる。一方帰無仮説 $H_2$ では，試験者が工程 $\Pi_1$ と工程 $\Pi_2$ のいずれかがよいかを，まずいずれの工程も同様によいかどうかを検討した上で選択するいわば保守的な状況を表わしていると考えられる。2つの状況を Fig.1，2 から考察するためにこれを正しく選択する確率で書きかえると Fig.3 の様になる。ここでは打ち切り個数が1と10の場合が示してある。

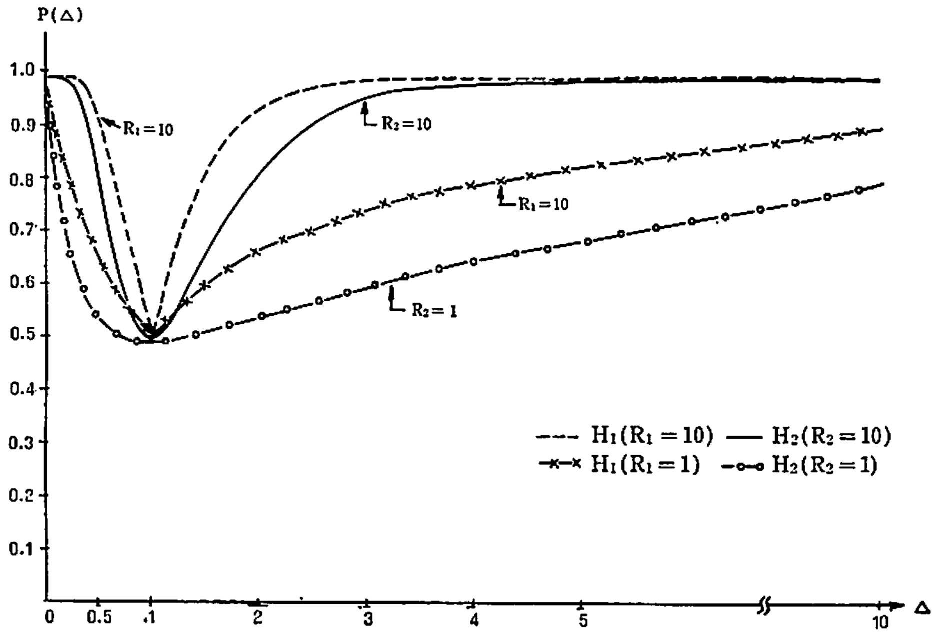


Fig.3　$H_1$ と $H_2$ の正しく選択される確率

これより，工程 $\Pi_1$ あるいは工程 $\Pi_2$ がすぐれている場合には $H_1$ の方が正しく選択する確率は $H_2$ より高くなっている。しかし，ここで最良工程選択の結果現在のシステムの変更による費用を考えるならばかならずしも $H_1$ がよいとはいえない。その費用が高ければ $H_1$ によって急進的に選択することはリスクが大きい。したがって $H_2$ を使うことがよいであろう。一方その費用が高くなければ $H_1$ を使うことがよいであろう。

## Appendix A. 〔4〕

(12)による $C_0$ の決め方は，F分布とB分布との関係から，

$$Q(C_0;\ 2r_1,\ 2r_2)=\int_{C_0}^{\infty} f_{2r_1,2r_2}(x)dx=I_{y_1}(r_2,\ r_1) \tag{A-1}$$

が成立する。

ここで，　$I_y(r_2,\ r_1)=\dfrac{1}{B(r_2,\ r_1)}\displaystyle\int_0^y x^{r_2-1}(1-x)^{r_1-1}dx,\quad y_1=\dfrac{r_2}{r_2+r_1C_0}$

また，B分布と2項分布との関係から，

$$I_{y_1}(r_2,\ r_1)=1-\sum_{i=0}^{r_2-1}\binom{r_1+r_2-1}{i}y_1^{\,i}(1-y_1)^{r_1+r_2-1-i} \tag{A-2}$$

したがって，$I_{y_1}(r_2,\ r_1)=\alpha$ から $C_0$ を求めることが出来る。一方，同様な議論によって(13)も

$$Q\left(\frac{\Delta_0}{\Delta}C_0\,;\,2r_1,\ 2r_2\right)=I_{y_2}(r_2,\ r_1)=1-\sum_{i=0}^{r_2-1}\binom{r_1+r_2-1}{i}y_2{}^i(1-y_2)^{r_1+r_2-1-i} \qquad \text{(A-3)}$$

が成立する。

ここで，
$$y_2=\frac{r_2\Delta}{r_2\Delta+r_1\Delta_0C_0}$$

## Appendix B

(19)による $C_1$，$C_2$ の決め方は，B分布の漸化式の性質

$$I_x(r_1+1,\ r_2)=I_x(r_1,\ r_2)-\frac{x^{r_1}(1-x_1)^{r_2}}{(r_1+r_2)\cdot B(r_1+1,\ r_2)} \qquad \text{(B-1)}$$

から，(19)は，

$$I_{C_2}(r_1,\ r_2)-\frac{C_1{}^{r_1}(1-C_1)^{r_2}}{(r_1+r_2)\cdot B(r_1+1,\ r_2)}-I_{C_1}(r_1,\ r_2)+\frac{C_1{}^{r_1}(1-C_1)^{r_2}}{(r_1+r_2)\ B(r_1+1,\ r_2)}$$

$$=I_{C_2}(r_1,\ r_2)-I_{C_1}(r_1,\ r_2)=1-\alpha \qquad \text{(B-2)}$$

とかける。ゆえに上式から

$$\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{r_1}\left(\frac{1-C_2}{1-C_1}\right)^{r_2}=1 \qquad \text{(B-3)}$$

である。ここで $r_1=r_2$ ならば，(B-3) から $C_1+C_2=1$ が導かれ (B-2) は

$$I_{1-C_1}(r_1,\ r_2)-I_{C_1}(r_1,\ r_2)=1-I_{C_1}(r_1,\ r_2)-I_{C_1}(r_1,\ r_2)=1-\alpha \qquad \text{(B-4)}$$

となり

$$2I_{C_1}(r_1,\ r_2)=\alpha \qquad \text{(B-5)}$$

が導かれ，(B-5) から $C_1$ を求めればよい。(20)は Appeudix A からもとめられる。

## 参考文献


1) E. L. レーマン：「統計的検定論」岩波書店 (1950)

2) 城川俊一：「最良生産工程選択のための寿命試験システムに関する一考察 (第1報)—3つのワイブル・プロセスの判別のための寿命試験システム—」 昭和50年度秋季研究発表予稿集，p. 417～422.

3) 城川俊一：「最良生産工程選択のための寿命試験システムに関する一考察 (第2報)—仮説検定論的アプローチー」 昭和51年度春季研究発表予稿集，p. 161～164.

4) 日本規格協会：統計数値表，JSA—1972.