等価回路決定の一方法(2)

NAKAMURA, Kenichi / 中村, 顕一

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
14
(開始ページ / Start Page)
33
(終了ページ / End Page)
39
(発行年 / Year)
1978-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004175

"等価回路決定の一方法"（その2）

中　村　顕　一*

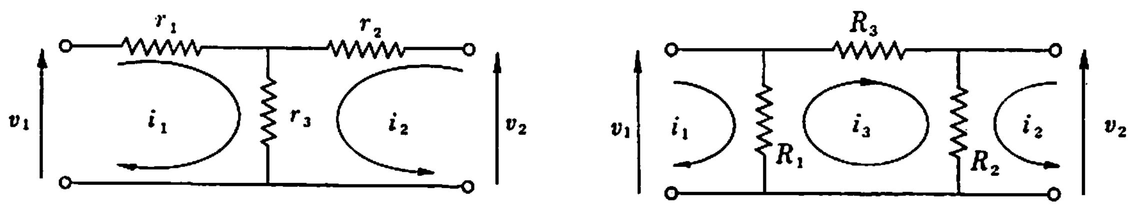
§1.　緒　　　言

同じ題名の論文[1]を書いてから，十年以上たっているのに気付いて全く驚いた。その時の"むすび"における約束を果すのが目的である。

前論文では2端子回路についてのみ実例を挙げて論じたが，その理論を4端子回路に拡張してみよう。

§2.　4端子回路の等価

先づよく知られている等価関係を取扱って，この理論の正当性を確めて見たい。



(a)　　(b)

第1図の(a)と(b)が等価であるための必要かつ充分条件を求めることである。

(a)図と(b)図の回路が等価であるためには，同じ v_1, v_2 に対して，同じ i_1, i_2 が流れればよい。

先づ図1(a)では

$$\begin{pmatrix} r_1+r_3 & r_3 \\ r_3 & r_2+r_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

である。

図1(b)では

$$\begin{pmatrix} R_1 & 0 & -R_1 \\ 0 & R_2 & R_2 \\ -R_1 & R_2 & R_1+R_2+R_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる。(1)と(2)の差を求めるため(1)を書きなおすと

$$\begin{pmatrix} r_1+r_3 & r_3 & 0 \\ r_3 & r_2+r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1$'$}$$

* 電気工学科

（２）－（１）′を求めると

$$\begin{bmatrix} R_1-(r_1+r_3) & -r_3 & -R_1 \\ -r_3 & R_2-(r_2+r_3) & R_2 \\ -R_1 & R_2 & R_1+R_2+R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=0 \qquad (3)$$

したがって，i_1, i_2 および i_3 が有限な解（全部が零でない解）を有するためには

$$\begin{vmatrix} R_1-(r_1+r_3) & -r_3 & -R_1 \\ -r_3 & R_2-(r_2+r_3) & R_2 \\ -R_1 & R_2 & R_1+R_2+R_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

が必要である。ところで２端子回路の場合には，これらの電流の自由度が１であったから，即ち入力電圧 v_1 が定まれば，i_1, i_2, i_3 等は定まったわけであるから，（４）は充分条件でもある。したがって２端子回路の場合には（４）式即ち

$$\varDelta=0 \qquad (4)'$$

が，等価関係の必要かつ充分条件であったわけである。

このことはよく知られているが，念のためその証明をして見よう。

マトリックスは三次として（３）式のマトリックスを一般化すると

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=0 \qquad (5)$$

となる。（５）式のマトリックスを次に示す手順で変形する。

先づ各行を第１列要素で割算すると

$$\begin{bmatrix} 1 & R_{12}^{(1)} & R_{13}^{(1)} \\ 1 & R_{22}^{(1)} & R_{23}^{(1)} \\ 1 & R_{32}^{(1)} & R_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{但し} \quad \begin{aligned} R_{12}^{(1)}&=\frac{R_{12}}{R_{11}}, \quad R_{13}^{(1)}=\frac{R_{13}}{R_{11}} \\ R_{22}^{(1)}&=\frac{R_{22}}{R_{21}}, \quad R_{23}^{(1)}=\frac{R_{23}}{R_{21}} \\ R_{32}^{(1)}&=\frac{R_{32}}{R_{31}}, \quad R_{33}^{(1)}=\frac{R_{33}}{R_{31}} \end{aligned} \qquad (6)$$

（６）式のマトリックスを変形して次の形とする。即ち

$$\begin{bmatrix} 1 & R_{12}^{(1)} & R_{13}^{(1)} \\ 0 & R_{22}^{(2)} & R_{23}^{(2)} \\ 0 & R_{32}^{(2)} & R_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{但し} \quad \begin{aligned} R_{22}^{(2)}&=R_{22}^{(1)}-R_{12}^{(1)} \\ R_{23}^{(2)}&=R_{23}^{(1)}-R_{13}^{(1)} \\ R_{32}^{(2)}&=R_{32}^{(1)}-R_{12}^{(1)} \\ R_{33}^{(2)}&=R_{33}^{(1)}-R_{13}^{(1)} \end{aligned} \qquad (7)$$

（７）を次の形に変形する

$$\begin{bmatrix} 1 & R_{12}^{(1)} & R_{13}^{(1)} \\ 0 & 1 & R_{23}^{(3)} \\ 0 & 1 & R_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \quad \text{但し} \quad \begin{aligned} R_{23}^{(3)}&=R_{23}^{(2)}/R_{22}^{(2)} \\ R_{33}^{(3)}&=R_{33}^{(2)}/R_{32}^{(2)} \end{aligned} \qquad (8)$$

（８）をまた次の形にする。

$$\begin{bmatrix} 1 & R_{12}^{(1)} & R_{13}^{(1)} \\ 0 & 1 & R_{23}^{(3)} \\ 0 & 0 & R_{33}^{(4)} \end{bmatrix} \quad 但し \quad R_{33}^{(4)} = R_{33}^{(3)} - R_{23}^{(3)} \tag{9}$$

(5)→(6)の変換は

$$\begin{bmatrix} R_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{21}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & R_{31}^{-1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

であり，(6)→(7)の変換は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

(7)→(8)の変換は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{22}^{(2)-1} & 0 \\ 0 & 0 & R_{32}^{(2)-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

(8)→(9)の変換は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

である。式(9)のマトリックスの行列式は $R_{33}^{(4)}$ であるから

$$R_{33}^{(4)} = R_{22}^{(2)-1} R_{32}^{(2)-1} R_{11}^{-1} R_{21}^{-1} R_{31}^{-1} \varDelta \tag{14}$$

さて，(10)，(11)，(12)，(13)の変換により(5)式は

$$\begin{bmatrix} 1 & R_{12}^{(1)} & R_{13}^{(1)} \\ 0 & 1 & R_{23}^{(3)} \\ 0 & 0 & R_{33}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

となるが，これは先づ(15)式の最後の式は

$$R_{33}^{(4)} i_3 = 0 \tag{16}$$

であってこの式が任意の i_3 に対して成立するためには(14)より

$$\varDelta = 0 \tag{17}$$

が，必要かつ充分である。i_3 を任意に定めれば，(15)式の第2の式より

$$i_2 + R_{23}^{(3)} i_3 = 0 \tag{18}$$

となり，i_2 が定まり，第3の式，即ち

$$i_1 + R_{12}^{(1)} i_2 + R_{13}^{(1)} i_3 = 0 \tag{19}$$

より，i_1 が定まるのである。

以上は2端子回路の場合であったが，4端子回路の場合には，i_1, i_2, i_3 の自由度は2である。即ち i_1, i_2, i_3 は v_1, v_2 の函数であるからである。

このときは $\varDelta=0$ は必要条件であっても充分条件ではない。即ち(３)式あるいは(５)式を(７)式の形に変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & R_{12}{}^{(1)} & R_{13}{}^{(1)} \\ 0 & R_{22}{}^{(2)} & R_{23}{}^{(2)} \\ 0 & R_{32}{}^{(2)} & R_{33}{}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{20}$$

となる。即ち

$$\begin{bmatrix} R_{22}{}^{(2)} & R_{23}{}^{(2)} \\ R_{32}{}^{(2)} & R_{33}{}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{21}$$

である。任意の i_2, i_3 に対して(21)が成立つためには

$$\begin{bmatrix} R_{22}{}^{(2)} & R_{23}{}^{(2)} \\ R_{32}{}^{(2)} & R_{33}{}^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \tag{22}$$

でなければならない。逆に(22)式が成立てば，(20)式の第１の式により任意の i_2, i_3 に対して(20)式が成立するように i_1 を決定することが出来る。

$$R_{22}{}^{(2)}=0,\quad R_{23}{}^{(2)}=R_{32}{}^{(2)}=0,\quad R_{33}{}^{(2)}=0 \tag{23}$$

が，二つの４端子回路が等価のために必要かつ充分であることがわかる。この場合 i_1 は

$$i_1+R_{12}{}^{(1)}i_2+R_{13}{}^{(1)}i_3=0 \tag{24}$$

より，i_2 および i_3 の函数として定まるのである。(23)式を行列式の形で表すために次の計算をする。即ち

$$\begin{aligned} R_{22}{}^{(2)}&=R_{22}{}^{(1)}-R_{12}{}^{(1)}=\frac{R_{22}}{R_{21}}-\frac{R_{12}}{R_{11}}=\frac{R_{11}R_{22}-R_{12}R_{21}}{R_{21}R_{11}}=\frac{\varDelta_{33}}{R_{21}R_{11}} \\ R_{23}{}^{(2)}&=R_{23}{}^{(1)}-R_{12}{}^{(1)}=\frac{R_{23}}{R_{21}}-\frac{R_{13}}{R_{11}}=\frac{-\varDelta_{32}}{R_{21}R_{11}} \\ R_{32}{}^{(2)}&=R_{32}{}^{(1)}-R_{12}{}^{(1)}=\frac{R_{32}}{R_{31}}-\frac{R_{12}}{R_{11}}=\frac{-\varDelta_{23}}{R_{31}R_{11}} \\ R_{33}{}^{(2)}&=R_{33}{}^{(1)}-R_{13}{}^{(1)}=\frac{R_{33}}{R_{31}}-\frac{R_{13}}{R_{11}}=\frac{\varDelta_{22}}{R_{31}R_{11}} \end{aligned} \tag{25}$$

となるので，結局

$$\varDelta_{33}=\varDelta_{22}=\varDelta_{32}=0 \tag{26}$$

が，４端子回路の等価のための必要かつ充分条件となる。

さて(25)式を一般化することは簡単で，若し二つの回路の閉路電流の数の大きい方を n とすれば

$$\varDelta_{nn}=\varDelta_{n-1,n-1},\ =\varDelta_{n,n-1}=0 \tag{27}$$

となるわけである。

ところで電流の式(３)の式の列べ方の順序はどうでもよいから(25)の代りに

$$\varDelta_{11}=\varDelta_{22}=\varDelta_{12}=0 \tag{28}$$

でもよいし，もっと一般に，$1\leqslant k<l\leqslant n$ として

$\Delta_{kk}=\Delta_{ll}=\Delta_{kl}=0$ でもよいわけである。

さて変換(10)および(11)により(7)式が得られるので

$$\begin{vmatrix} R_{22}^{(2)} & R_{23}^{(2)} \\ R_{32}^{(2)} & R_{33}^{(2)} \end{vmatrix} = R_{11}^{-1}R_{21}^{-1}R_{31}^{-1}\Delta \tag{29}$$

となる。(25)と(29)から

$$\frac{\Delta_{33}\Delta_{22}-\Delta_{32}\Delta_{23}}{R_{11}}=\Delta \tag{30}$$

$$R_{11}=\Delta_{3322}$$

であるから，(30)は結局

$$\Delta_{33}\Delta_{22}-\Delta_{32}\Delta_{23}=\Delta_{3322}\cdot\Delta \tag{31}$$

となり，これは周知である。さてここで具体例である(4)式の左辺の行列式 Δ においては

$$\Delta_{11}=\begin{vmatrix} R_2-(r_2+r_3) & R_2 \\ R_2 & R_1+R_2+R_3 \end{vmatrix}=0 \tag{32}$$

$$\Delta_{12}=\begin{vmatrix} -r_3 & R_2 \\ -R_1 & R_1+R_2+R_3 \end{vmatrix}=0 \tag{33}$$

$$\Delta_{22}=\begin{vmatrix} R_1-(r_1+r_3) & -R_1 \\ -R_1 & R_1+R_2+R_3 \end{vmatrix}=0 \tag{34}$$

が，等価のための必要かつ充分条件であるから

(32)より
$$(r_2+r_3)=\frac{R_1R_2+R_2R_3}{R_1+R_2+R_3} \tag{35}$$

(33)より
$$r_3=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3} \tag{36}$$

(34)より
$$r_1+r_3=\frac{R_1R_2+R_1R_3}{R_1+R_2+R_3} \tag{37}$$

(35), (36), (37)より

$$\left.\begin{aligned} r_1&=\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3} \\ r_2&=\frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3} \\ r_3&=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3} \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

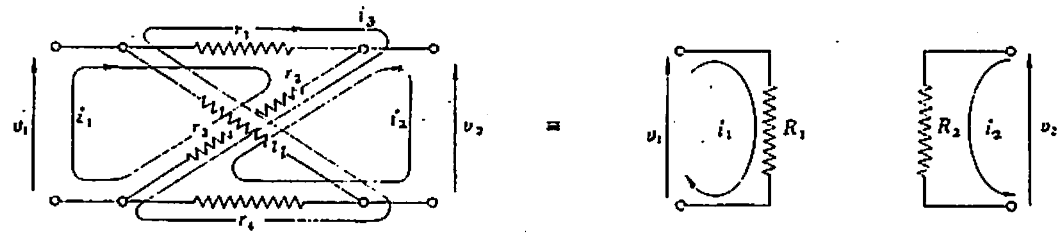
という周知の $\Delta-Y$ 変換の公式を得る。

次にもう一つの例題を解いて見よう。

第2図(a)の格子型回路と等価な(b)を考える。

図2(a)では

$$\begin{pmatrix} r_1+r_2 & r_2 & r_1+r_2 \\ r_2 & r_2+r_4 & r_2+r_4 \\ r_1+r_2 & r_2+r_4 & r_1+r_2+r_3+r_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$



(a)　　(b)

図2(b)では

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

(39)−(40)より

$$\begin{bmatrix} r_1+r_2-R_1 & r_2 & r_1+r_2 \\ r_2 & r_2+r_4-R_2 & r_2+r_4 \\ r_1+r_2 & r_2+r_4 & r_1+r_2+r_3+r_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=0 \tag{41}$$

i_1, i_2, i_3 の自由度は2であるから

式(41)の左辺のマトリックスの行列式$\varDelta$において，

$$\varDelta_{33}=\begin{vmatrix} r_1+r_2-R_1 & r_2 \\ r_2 & r_2+r_4-R_2 \end{vmatrix}=0 \tag{42}$$

$$\varDelta_{32}=\begin{vmatrix} r_1+r_2-R_1 & r_1+r_2 \\ r_2 & r_2+r_4 \end{vmatrix}=0 \tag{43}$$

$$\varDelta_{22}=\begin{vmatrix} r_1+r_2-R_1 & r_1+r_2 \\ r_1+r_2 & r_1+r_2+r_3+r_4 \end{vmatrix}=0 \tag{44}$$

(42)より

$$r_1r_2+r_1r_4+r_2r_4-R_1(r_2+r_4)-R_2(r_1+r_2)+R_1R_2=0 \tag{45}$$

(43)より

$$R_1=\frac{r_4(r_1+r_2)}{r_2+r_4} \tag{46}$$

(44)より

$$R_1=\frac{(r_1+r_2)(r_3+r_4)}{r_1+r_2+r_3+r_4} \tag{47}$$

(46)と(47)より R_1 を消去すれば

$$r_1r_4=r_2r_3 \tag{48}$$

として，ブリッジの平衡条件が得られた。

(45)と(43)から

$$R_2=\frac{(r_2+r_4)r_1}{r_1+r_2} \tag{49}$$

(47)，(48)，(49)から

$$R_1R_2=r_1r_4=r_2r_3 \tag{50}$$

という重要な結果が得られる。

§3. 結　　言

以上で一般に２ｎ端子回路の等価の条件は得られた。

２端子回路においては，（４)式のような

$$\Delta=0 \tag{51}$$

が必要かつ充分条件である。

４端子回路においては，Δの cofactor に関して

$$\Delta_{11}=0,\ \Delta_{22}=0,\ \text{および}\ \Delta_{12}=0 \tag{52}$$

が等価条件である。

６端子回路においては

$$\begin{array}{l}\Delta_{11}=0,\ \Delta_{22}=0,\ \Delta_{33}=0\\ \Delta_{12}=0,\ \Delta_{13}=0,\ \Delta_{23}=0\end{array} \tag{53}$$

となるわけである。

（昭53. 1. 25）

参　考　文　献

1）中村顕一：等価回路決定の一方法，法政大学工学部研究集報，第４号，1967年３月。