

構造解析とマイクロコンピュータ

OHCHI, Yozo / 大地, 羊三

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部
研究集報

(巻 / Volume)

16

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

17

(発行年 / Year)

1980-03

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004144>

構造解析とマイクロコンピュータ

大 地 羊 三*

Structural Analysis and Micro Computer

Yozo OHCHI

Abstract

Since last several years, the progress of a micro-computer is remarkable. The micro-computer used in the last report, is seems already to be the old fashion. And nowadays the one which has several times larger memories and higher speed, appears in the market with a few percent lower price. If this advance of micro-computer is continued for next several years, we have a vague fear of what a situation will be happened.

It was two or three years ago that the author was aware of this fact, and he has given himself to study the good use of the micro-computer. In the last report, we discussed the problems which were given arise when the program of the structural analysis written for the large size computer was copied into the micro-computer. But carrying out some numerical experiments, it becomes clear that the micro-computer has some demerits though it has many merits. Then we make up our mind to review the theorem of the displacement method, and to remake the program for the micro-computer.

In this paper, an alternative form of the member's stiffness matrix, a formula for displacements and member forces at the intermediate points of a member and a new method for constructing the influence lines are discussed, and then some examples on the frame and grid structures are explained.

§ 1. 緒 言

過去数年来、超小型電算機の進歩はめざましいものがある。昨年の報告で使用した電算機もすでに旧くなっており、現在ではメモリー・速度共に数倍のものが、数%安い価格で発売されている。このいきおいで進むと、数年後にはどのような事態がおきるか、そろそろ怖い感じがえさる。著者がこの事態に気がついたのは数年前のことであるが、それ以来超小型電算機を利用することを考えてきた。昨年は大型機で開発した構造解析用のプログラムを超小型電算機に移行するにあたって問題になった点を報告したが、実際に計算を行ってみると、超小型電算機にも長所・短所があり改良しなければならない問題点も解ってきた。そこで構造解析の理論から検討しなおし、超小型電算機のための汎用プログラムを作りなおすことを思いついた次第である。

* 土木工学科

超小型電算機には、つねにメモリーと計算速度の問題がつきまといっている。小じんまりした、しかも計算時間の早いシステムが望ましい。メモリーの面でいうと、節点数をできるだけ少なくすることが必要になるが、このことは裏をかえすと中間に荷量が作用する部材を考慮しなければならないことにつながる。また、汎用の構造解析プログラムという以上、種々の形状をした部材が処理できなければならないが、大型機の場合のように部材の形状が異なる毎に別々のサブルーチンを用意し剛性行列をつくることにすると、サブルーチンばかり増えてメモリーを圧縮するし、これをフロッピー・ディスクに格納しておくで計算速度がおちる原因になる。この問題を解決するには、種々の形状をした部材の剛性行列が、一つのサブルーチンで計算できるようにすることが望ましい。

§ 2. 要素剛性行列の改造

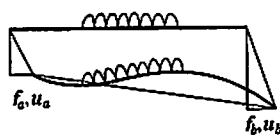


図 1

弾性体である構造物は力を受けると変形する。そして、この力と変位は比例すると考えるのが普通である。電算機で構造物を解析する場合には、図 1 に示すように、その構造物から部材（構造要素ともいう）を切り出し、切り口に現われる断面力 f_a , f_b と、両端の変位 u_a , u_b との関係式を作ることから初める。この関係式は次のように書かれ、基本式とよばれている。

$$\begin{aligned} f_a &= k_{aa}u_a + k_{ab}u_b + f_{fa} \\ f_b &= k_{ba}u_a + k_{bb}u_b + f_{fb} \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、右辺の f_{fa} , f_{fb} は、部材の両端をかりに固定したときに、作用外力と釣合うように両端に現われる固定端断面力であり、 k_{aa} , ..., k_{bb} は力と変位の比例関係を表わす行列で、要素の剛性行列とよばれている。固定端断面力については次節で説明することにし、本節では剛性行列について検討してみる。

上記の剛性行列は、当然のことではあるが、部材の形状、使用条件あるいは部材端と他の部材との結合状態によって異なる形をしている。大型の電算機では、条件が異なる毎に別々に剛性行列を作るサブルーチンを用意しておき、必要に応じてそのいずれかを呼び出すようにしてあるが、超小型電算機でこの手法をそのまま採用することには問題がある。超小型電算機のメモリーが大きくなったといっても、フロッピー・ディスクの容量が大きくなっただけで、コア・メモリーは CPU の関係で現在の時点では 64K バイト以上にするには困難である。したがって、使用頻度の少ないサブルーチンのコアに入れておくとメモリーを圧縮するし、だからといってフロッピー・ディスクに格納しておいたのでは計算時間で問題になる。この問題を解決するためには、出来るだけ多くの条件に適応できるサブルーチンを用意することが良策であろう。

図 2 に示すように、任意の形状をした部材の両端に剛体の棒 aa' , bb' を取りつけ、 a' , b' が

任意の一点 O で向かい合っている構造要素を想定し、 a, b 端の断面力と変位を a', b' 点に移し、この点での断面力と変位の関係式を作ることを考えてみよう。このためには、剛体上の 1 点における力あるいは変位を他の点の力あるいは変位で表現する公式を用意する必要がある。剛体の 1 点 a に作用する力と同じ効果を持つ a' 点の力を求めるためには、 a 点の力を a' 点まで平行移動し、しかるのち a' 点の力の方向に応じて座標変換を行えばよい（図 3(a)参照）。一般に 3 次元空間の一点に作用する力は、3 方向の成分を持つ力のベクトルと、同じ方向の 3 成分を持つモーメントのベクトルで表現できる。これらを p_a, m_a とすると、力の平行移動は下の左、座標の変換は下の右のように書くことができるので

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_{a'} \\ \bar{m}_{a'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ w_{a'a} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_a \\ m_a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{p}_{a'} \\ \bar{m}_{a'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{a'a} & 0 \\ 0 & c_{a'a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{a'} \\ \bar{m}_{a'} \end{bmatrix} \quad (2)$$

これらをひとまとめにすると、剛体の a 点に作用する力を a' 点に作用する力に変換する公式が次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_{a'} \\ \bar{m}_{a'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{a'a} & 0 \\ 0 & c_{a'a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ w_{a'a} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_a \\ m_a \end{bmatrix} \quad (3)$$

ただし、 $w_{a'a}$ は a 点の座標系を用いて求めた a' 点の座標 (x, y, z) を要素とする交代行列（逆対線行列）であり、 $c_{a'a}$ は a 点の座標系から a' 点の座標系への座標変換行列で、それぞれ次の形をしている。

$$w_{a'a} = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \quad c_{a'a} = \begin{bmatrix} n_{x'x} & n_{x'y} & n_{x'z} \\ n_{y'x} & n_{y'y} & n_{y'z} \\ n_{z'x} & n_{z'y} & n_{z'z} \end{bmatrix}$$

なお、 $c_{a'a}$ の各列 $(n_{x'x}, n_{y'x}, n_{z'x}), \dots, (n_{x'z}, n_{y'z}, n_{z'z})$ は a 点の座標系の各軸 (x, y, z) 軸の a' 点の座標系に対する方向余弦である。今後は式(3)を簡単に次のように書くことにする。

$$f_{a'} = C_{a'a} T_{a'a} f_a \quad \text{またわ簡単に} \quad f_{a'} = \bar{C}_{a'a} f_a \quad (4)$$

次に、剛体の a 点と a' 点の変位をむすぶ公式であるが、これを求めるには剛体の仮想変位の原理を使えばよい。剛体の a, a' 点に釣合った力 $f_a, f_{a'}$ が作用しているものとする。この剛体が仮想変位を受け、図 3(b)に示すように a 点で u_a 、 a' 点で $u_{a'}$ だけ変位したとすると、剛体の仮想変位の原理は次のように書ける。

$$u_a^T f_a + u_{a'}^T f_{a'} = 0 \quad (5)$$

上式に f_a と $f_{a'}$ が釣合っているという条件を入れるために、式(4)を用いて f_a を a' 点に移し、これと $f_{a'}$ との釣合条件 $(\bar{f}_{a'} + f_{a'} = 0)$ を考慮すると、式(5)は

$$u_a^T f_a - u_{a'}^T (C_{a'a} T_{a'a}) f_a = 0$$

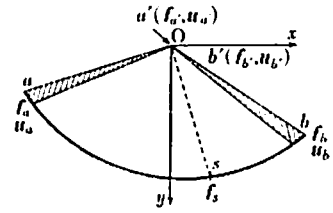


図 2

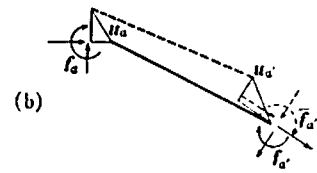
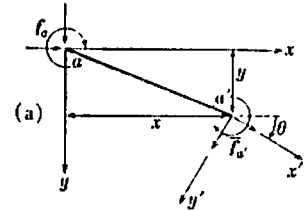


図 3

と書きかえられる。これを整理することにより、 u_a と $u_{a'}$ の間には次の関係のあることが証明できる。

$$u_a = (C_{a'a} T_{a'a})^T u_{a'} \quad \text{またわ} \quad u_a = \bar{C}_{a'a}^T u_{a'} \quad (6)$$

準備が長くなったが、図2にもどって a' , b' 点の断面力と変位の関係式を求めてみよう。このためには仮想力の原理が有効である。部材の中間の断面に現われる断面力を f_s とすると、この原理は

$$\int \delta f_s^T D^{-1} f_s ds - (\delta f_a^T u_{a'} + \delta f_b^T u_{b'}) = 0 \quad (7)$$

と書くことができる。ただし、 D は部材の伸び剛性 (EA) や曲げ剛性 (EI) を対角線に並べた行列である。部材の中間に作用外力がないものとする、断面 s の左側に作用する力は $f_{a'}$ と $f_{b'}$ だけであるからこの2力は釣合っていないなければならない。また部材全体で考えると $f_{a'}$ と $f_{b'}$ は釣合っている。故に

$$f_s + C_{sa'} T_{sa'} f_{a'} = 0 \quad f_{a'} + f_{b'} = 0 \quad (8)$$

これらを式(7)に代入して整理すると

$$\delta f_{a'}^T \left\{ \left[\int (C_{sa'} T_{sa'})^T D^{-1} (C_{sa'} T_{sa'}) ds \right] f_{a'} - (u_{a'} - u_{b'}) \right\} = 0 \quad (9)$$

式を簡単にするためには、積分を含む大かっこ内の行列を k^{-1} とおき、中かっこの中身を0とおくと下の左の式が得られ、さらにこれを式(8)の第2式に代入すると下の右の式が得られる。

$$f_{a'} = k(u_{a'} - u_{b'}) \quad f_{b'} = -k(u_{a'} - u_{b'}) \quad (10)$$

以上で所期の目的は達成した。さらに式(4)、(6)を用いて、式(10)の a' , b' 点の断面力と変位を a , b 点の断面力と変位に変換すると、次の2式が得られる。

$$\begin{aligned} f_a &= (C_{aa'} T_{aa'}) k (C_{aa'} T_{aa'})^T u_a - (C_{aa'} T_{aa'}) k (C_{bb'} T_{bb'})^T u_b \\ f_b &= -(C_{bb'} T_{bb'}) k (C_{aa'} T_{aa'})^T u_a + (C_{bb'} T_{bb'}) k (C_{bb'} T_{bb'})^T u_b \end{aligned} \quad (11)$$

上式は式(1)で、 f_{fa} , f_{fb} を0とおいたものに対応している。すなわち、一般に式(1)の形で表わされる要素の剛性行列 $k_{aa} \sim k_{bb}$ は、式(11)の形をしていることが解った。骨組構造物の構造要素に対して、式(11)が具体的にどのような形になるかといった議論は、5, 6節にゆずるが、もし図2の点0を適当に働かして、行列 k を対角行列にすることができるならば、式(11)に含まれる要素の剛性行列は、単純な計算で求められることだけは理解できるであろう。

なお、式(9)で定義した k^{-1} は、構造力学の教科書で説明されている余力法の弾性方程式の係数 δ_{ij} と関係の深いことが、次のように証明されることを附記しておく。簡単のために、平面構造物の場合について説明しよう。図2の a' 点に作用する断面力を不静定力とみなして弾性方程式を作ると

$$\sum_{j=1}^3 \delta_{ij} X_j + \delta_{i0} = \Delta_i \quad (i=1 \sim 3) \quad (12)$$

が得られる。ただし、 δ_{ij} は不静定力 X_j が作用した場合の X_i 方向の変位であり、 X_j が作用した場合の部材の任意点の断面力を N_j, S_j, M_j とすると

$$\delta_{ij} = \int \left(\frac{N_i N_j}{EA} + \kappa \frac{S_i S_j}{GA} + \frac{M_i M_j}{EI} \right) ds \quad (13)$$

で計算される量である。また Δ_i は a' 点と b' 点の相対変位の X_i 方向の成分を表わしている。もし、部材の中間に作用外力がないものとする、式(12)は

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{a'} - u_{b'} \\ v_{a'} - v_{b'} \\ \theta_{a'} - \theta_{b'} \end{bmatrix}$$

となるし、上式の δ_{ij} に式(13)を代入すると

$$\left\{ \int \begin{bmatrix} N_1 & S_1 & M_1 \\ N_2 & S_2 & M_2 \\ N_3 & S_3 & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix} ds \right\} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{a'} - u_{b'} \\ v_{a'} - v_{b'} \\ \theta_{a'} - \theta_{b'} \end{bmatrix}$$

となるが、この式の未知数 (X_1, X_2, X_3) にかかる係数行列が、式(9)で定義した k^{-1} のものである。

§ 3. 部材中間の断面力と変位

骨組構造物の節点と節点の間、すなわち部材の中間に外力が作用する場合には、これを図4の(b), (c)のように分けて計算しなければならない。しかし、両端固定ばりの固定端断面力は、作用荷量の形式毎に異なるため、これをプログラムすることは厄介なので、大型電算機では、部材の中間にも節点をもうけて、部材中間に作用する荷重は考慮しないようにする方法がよく行われている。このようにすると、解がなければならない連立一次方程式の

元数は急激に増えるが、大型機ではそれほど問題にはならないであろう。しかし、超小型電算機の場合はメモリーの関係もあるので連立一次方程式の元数はできるだけおさえる必要があり、このために部材中間に作用する荷重を考慮しなければならない事態も起ってくる。この場合、部材中間の断面力および変位は、図4の(b), (c)の重ね合わせとして求めなければならない。本節ではこの部材中間の断面力および変位を求める公式を誘導する。

与えられた部材（図5(a)）に対して基本式を作ると

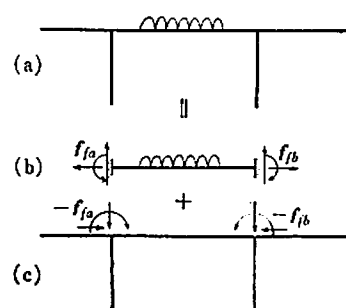


図4

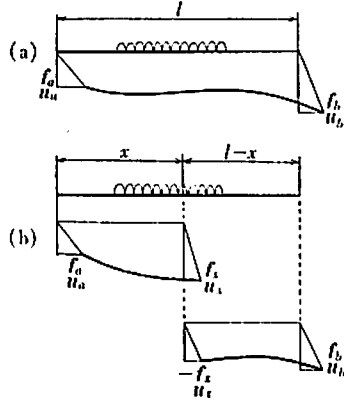


図 5

$$f_a = k_{aa}(l)u_a + k_{ab}(l)u_b + f_{fa}(l) \quad (14)$$

$$f_b = k_{ba}(l)u_a + k_{bb}(l)u_b + f_{fb}(l)$$

となるが、この部材を図(b)のように a 端から x の距離にある点で切断し、それぞれの区間に対して基本式を作ると

$$\left. \begin{aligned} f_a &= k_{aa}(x)u_a + k_{ax}(x)u_x + f_{fa}(x) \\ f_x &= k_{xa}(x)u_a + k_{xx}(x)u_x + f_{fx}(x) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} -f_x &= k_{xx}(l-x)u_x + k_{xb}(l-x)u_b + f_{fx}(l-x) \\ f_b &= k_{bx}(l-x)u_x + k_{bb}(l-x)u_b + f_{fb}(l-x) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

と書くこともできる。式(15)の第2式と式(16)の第1式を加え、これと他の2式をひとまとめにすると

$$\begin{bmatrix} f_a \\ 0 \\ f_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa}(x) & k_{ax}(x) & 0 \\ k_{xa}(x) & k_{xx}(x) + k_{xx}(l-x) & k_{xb}(l-x) \\ 0 & k_{bx}(l-x) & k_{bb}(l-x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_x \\ u_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{fb}(x) \\ f_{fx}(x) + f_{fx}(l-x) \\ f_{fb}(l-x) \end{bmatrix} \quad (17)$$

が得られるが、これより u_x を消却した式が式(14)と等しくならなければならないという条件より、式(14)～(16)の係数行列の間に次の関係が成立つことが解る。

$$\left. \begin{aligned} k_{ax}^{-1}(x)[k_{aa}(l) - k_{aa}(x)] &= k_{bx}^{-1}(l-x)k_{ba}(l) \\ &= -[k_{xx}(x) + k_{xx}(l-x)]^{-1}k_{xa}(x) \equiv N_a(x) \\ k_{bx}^{-1}(l-x)[k_{bb}(l) - k_{bb}(l-x)] &= k_{ax}^{-1}(x)k_{ab}(l) \\ &= -[k_{xx}(x) + k_{xx}(l-x)]^{-1}k_{xb}(l-x) \equiv N_b(x) \\ k_{ax}^{-1}(x)[f_{fa}(l) - f_{fa}(x)] &= k_{bx}^{-1}(l-x)[f_{fb}(l) - f_{fb}(l-x)] \\ &= -[k_{xx}(x) + k_{xx}(l-x)]^{-1}[f_{fx}(x) + f_{fx}(l-x)] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

次に式(17)の第2式より u_x を求め、式(18)を考慮すると

$$u_x = N_a(x)u_a + N_b(x)u_b - [k_{xx}(x) + k_{xx}(l-x)]^{-1}\{f_{fx}(x) + f_{fx}(l-x)\} \quad (19)$$

が得られるし、これを式(15)の第2式に代入して、式(18)を考慮すると

$$\begin{aligned} f_x &= -k_{xx}(l-x)N_a(x)u_a + k_{xx}(x)N_b(x)u_b \\ &\quad + f_{fx}(x) - k_{xx}(x)[k_{xx}(x) + k_{xx}(l-x)]^{-1}\{f_{fx}(x) + f_{fx}(l-x)\} \end{aligned} \quad (20)$$

が得られる。

式(19)、(20)をさらに簡単にするために、作用外力による両端固定ばりの固定端断面力について考えてみよう。図6に、部材の両端が固定されそれに外力が作用する場合と、同じ部材の両端が u_a, u_b だけ変位した場合が画かれているが、この2つの系の間で相反作用の定理を用いると

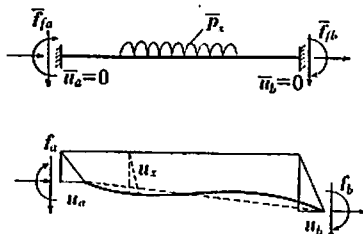


図 6

$$\int u_x^T \bar{p}(x) dx + u_a^T f_{fa} + u_b^T f_{fb} = \bar{o}^T f_a + \bar{o}^T f_b = 0$$

が得られる。上式に含まれる u_x は、式(19)の u_x で作用外力がない場合に相当することを考慮すると

$$\int \{u_a^T N_a^T(x) + u_b^T N_b(x)\} \bar{p}(x) dx + u_a^T f_{fa} + u_b^T f_{fb} = 0$$

となるが、 u_a, u_b は任意に選ぶことができるので、結局

$$f_{fa} = - \int_0^l N_a^T(x) \bar{p}(x) dx \quad f_{fb} = - \int_0^l N_b^T(x) \bar{p}(x) dx \quad (21)$$

が結論される。この結果を式(19)、(20)の $f_{fx}(x), f_{fx}(l-x)$ に適用すると

$$f_{fx}(x) = - \int_0^x k_{ax}^T(x) k_{as}^{-T}(s) p(s) ds, \quad f_{fx}(l-x) = - \int_x^l k_{bx}^T(l-x) k_{bs}^{-T}(l-s) p(s) ds$$

とすることができる。これらを式(19)、(20)に代入し、式(18)を考慮しながら変形すると

$$\begin{bmatrix} u_x \\ f_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_a(x) & N_b(x) \\ -k_{xx}(l-x)N_a(x) & k_{xx}(x)N_b(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a - \int_0^x k_{as}^{-T}(s) p(s) ds \\ u_b - \int_x^l k_{bs}^{-T}(l-s) p(s) ds \end{bmatrix} \quad (22)$$

が得られる。ただし、上式の誘導にあたって $k_{ax}^T(x) = k_{xa}(x)$, $k_{bx}^T(l-x) = k_{xb}(l-x)$ の関係を用いた。これで本節の目的は達成したわけであるが、最後に前節の式(11)の結論を用いると

$$-k_{xx}(l-x)N_a(x) = -(C_{xb}T_{xb})k_{ba}(l), \quad k_{xx}(x)N_b(x) = (C_{xa}T_{xa})k_{ab}(l)$$

と書くこともできることを附記しておく。式(22)の具体的な形 5, 6 節を参照されたい。

§ 4. 影響線の計算

土木の分野で取扱う構造物には、自動車や列車が载荷される。したがって、これらが構造物上を走行するとき、最大でどの位の変位が現われるか、あるいは最大でどの程度の断面力を生ずるか、といった問題を解決しなければならない。この問題の最も単純な解決策は、移動荷重を構造物の端から少しずつずらしながら载荷し、特定な点（着目点とよんでいる）の変位や断面力を次々に計算して、その中から最大値を求める方法であろう。しかし、これでは大変な計算量になる。そこで、我々はあらかじめ影響線を計算しておき、これを用いて要領よく最大値を求める方法を採用している。

影響線とは、単位荷重を構造物上で移動させ、それぞれの载荷位置での着目点の変位なり断面力なりを、载荷点の下に図示した線図である。これが求められていると、自動車や列車がある位置に载荷されたときの変位なり断面力は、輪重とその下の影響線の縦距を掛けて総和を取るだけ

で計算できる。

影響線を計算する方法にも、単位荷重を実際に移動させる方法、逆行列を用いる方法、ミューラー・ブレスラウの原理を用いる方法等があるが、大型機で計算する場合は、どの方法を採用してもそれが致命的な欠陥となることはないであろう。しかし、超小型電算機で計算する場合は、上記の方法では、メモリーまたは計算時間のいずれかで問題があるので、次に示す方法を開発した。これは山下、久保等が土木学会年次学術講演会で報告した手法を拡張したものである。

図4でも説明したように、部材の中間に作用する荷重の影響は、図(b), (c)に分けて計算しなければならない。式(22)をこのように分けると

$$\begin{bmatrix} u_{fx} \\ f_{fx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_a(x) & -N_b(x) \\ k_{xx}(l-x)N_a(x) & -k_{xx}(x)N_b(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^x k_{as}^{-T}(s)p(s)ds \\ \int_a^l k_{bs}^{-T}(l-s)p(s)ds \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ f_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_a(x) & N_b(x) \\ -k_{xx}(l-x)N_a(x) & k_{xx}(x)N_b(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} \quad (23)$$

とすることができる。前者が図(b), 後者が図(c)に対するものである。単位荷重が走行する場合も同じことがいえ、着目部材に荷重がないときは式(23)の後の式だけで着目点の変位や断面力が計

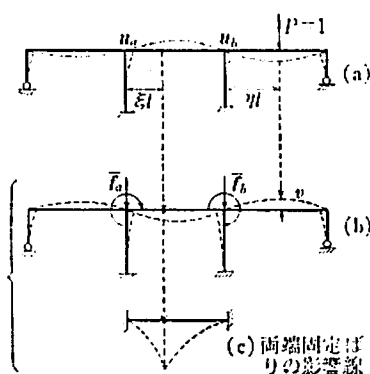


図7

算できるが、着目部材に単位荷重がのるときは式(23)の後の式に前の式を加算しなければならない。

着目部材に単位荷重がのっていない場合から初めよう。図7の(a), (b)に示す2つの系について考える。図(a)は単位荷重が作用している実際の系であり、図(b)は着目部材の両端の節点に仮想の外力を作用させた系である。この2つの系の間で相反作用の定理を適用すると

$$1 \cdot v = f_a^T u_a + f_b^T u_b \quad (24)$$

となるが、 u_a, u_b は図(a)のように単位荷重が作用したとき、着目部材の両端に現われる変位であるから、式(24)の右边が着目点（図に示す×印）の変位または断面力となるためには、 f_a^T, f_b^T が式(23)の後の式の右边にある係数行列の対応する一行に等しく取られていけばよい。このように選ばれた f_a, f_b を節点荷重とする図(b)のたわみ曲線 v が影響線の縦距になる。

着目部材の影響線の縦距はこれだけでは不足である。この場合は着目部材に単位荷重がのっている、図(c)に示すような、着目部材を両端固定ばりとしたときの着目点の影響線を図(b)に重ね合わさなければならない。図(c)の影響線は、式(23)の前半の $p(s)$ に単位荷重を代入したもので計算できるが、その具体的な例は5, 6節で示すことにする。

最後に支点反力の影響線について一言しておこう。一般にはこの影響線は色々苦勞して作られているようであるが、ミューラー・ブレスラウの原理を準用すれば、全く単純に計算できる。ミ

ユーラ・ブレスラウの原理によると、支点を単位量だけ沈下させたときのたわみ曲線が影響線になる。そこで支点到無限大に近いばねを入れ、その支点到ばね定数に等しい荷重を載荷したときのたわみ曲線を求めれば、これがそのまま支点反力の影響線になっている。

§5. 例題1——平面構造物の場合

2節以下で展開した理論を、平面構造物に含まれる部材に適用してみる。この場合は、部材端の断面力は x, y 軸方向の力 P_x, P_y と z 軸まわりのモーメント M_z だけであり、変形も x, y 軸方向の変位 V_x, V_y と z 軸まわりの回転 θ_z だけが現われるから、式(3), (6)の断面力および変位の変換式は次のように表わされる（図8参照）。

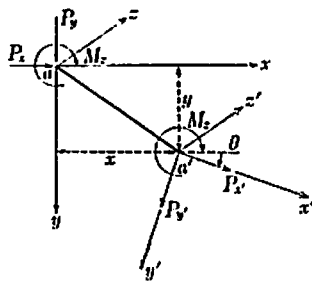


図8

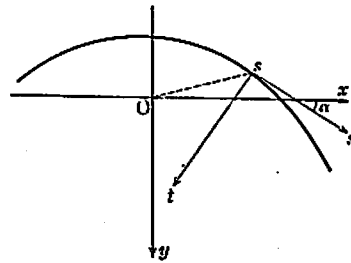


図9

$$\begin{bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \\ M_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ \theta_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & y \\ \sin \theta & \cos \theta & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (25)$$

この変換式を使い、式(9)で定義した k^{-1} を計算すると、図9の曲線部材の場合には

$$\begin{aligned} k^{-1} &= \int_a^b \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & y \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa}{GA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix} ds \\ &= \int_a^b \begin{bmatrix} \left(\frac{y^2}{EI} + \frac{\cos^2 \alpha}{EA} \right) & -\left(\frac{xy}{EI} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{EA} \right) & \frac{y}{EI} \\ -\left(\frac{xy}{EI} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{EA} \right) & \left(\frac{x^2}{EI} + \frac{\sin^2 \alpha}{EA} \right) & -\frac{x}{EI} \\ \frac{y}{EI} & -\frac{x}{EI} & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} ds \quad (26) \end{aligned}$$

となる。ただし、一般に行われているように、せん断変形は無視することにし、 $\kappa/GA=0$ として右辺を計算した。とくに式(26)の(3.1), (3.2)要素が0となるように座標原点を選び、(1.2)要素が0となるように u, v 軸を回転すると、 k^{-1} は対角行列になる。この操作は、古くから使われている余力法の一分派である重心法が採用している手法に似ており、重心法の定義でい

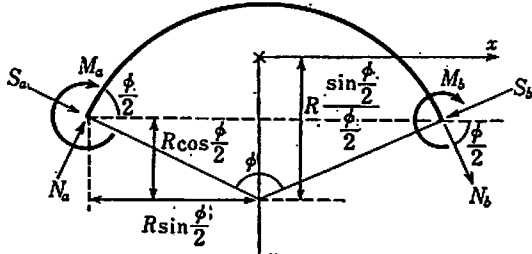


図10

うと、「部材の弾性重心に座標原点を選び、 u , v 軸を弾性主軸方向にむける」ことと同じ操作である。

とくに図10に示す等断面の円弧部材の場合は、 $\times$ 印が弾性重心で、 x , y 軸方向が弾性主軸の方向である。この x , y 軸を採用すると、 k^{-1} は対

角行列となり、その対角要素は

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{11}} &= \left(\frac{R^3}{EI} + \frac{R}{EA} \right) \frac{\phi + \sin \phi}{2} - \frac{2R^3}{EI} \frac{1 - \cos \phi}{\phi} \\ \frac{1}{k_{22}} &= \left(\frac{R^3}{EI} + \frac{R}{EA} \right) \frac{\phi - \sin \phi}{2} \quad \frac{1}{k_{33}} = \frac{R\phi}{EI} \end{aligned} \quad (27)$$

となるし、式(11)は図10の記号を用いると次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_a \\ S_a \\ M_a \\ \vdots \\ N_b \\ S_b \\ M_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) & -\sin(\phi/2) & 0 \\ \sin(\phi/2) & \cos(\phi/2) & 0 \\ y_a & -x_a & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\cos(\phi/2) & -\sin(\phi/2) & 0 \\ \sin(\phi/2) & -\cos(\phi/2) & 0 \\ -y_b & x_b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) & \sin(\phi/2) & y_a & -\cos(\phi/2) & \sin(\phi/2) & -y_b \\ -\sin(\phi/2) & \cos(\phi/2) & -x_a & -\sin(\phi/2) & -\cos(\phi/2) & x_b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ \theta_a \\ \vdots \\ u_b \\ v_b \\ \theta_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{ただし、} -x_a = x_b = R \sin(\phi/2) \quad y_a = y_b = R \left(\frac{\sin(\phi/2)}{\phi/2} - \cos(\phi/2) \right)$$

さらに等断面の直線部材の場合は、式(27), (28)で $R = \infty$, $\phi = 0$, $R\phi = l$ とすればよいので

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_a \\ S_a \\ M_a \\ \vdots \\ N_b \\ S_b \\ M_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l/2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & l/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 0 \\ 0 & 0 & EI/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l/2 & 0 & -1 & l/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ \theta_a \\ \vdots \\ u_b \\ v_b \\ \theta_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

となるし、等断面の直線部材でせん断変形を考慮する場合は、式(26)の κ/GA を 0 とおかないで計算を進めればよいので

$$\frac{1}{k_{11}} = \frac{l}{EA}, \quad \frac{1}{k_{22}} = \frac{l^3(1+Q)}{12EI}, \quad \frac{1}{k_{33}} = \frac{l}{EI} \quad \left(\text{ただし } Q = \frac{12\kappa EI}{GA l^2} \right)$$

となる。また変断面の直線部材の場合は、 a 端から弾性重心までの距離を λ とすると

$$\frac{1}{k_{11}} = \int_0^l \frac{1}{EA} dx, \quad \frac{1}{k_{22}} = \int_0^l \frac{x^2}{EI} dx - \lambda^2 \int_0^l \frac{1}{EI} dx, \quad \frac{1}{k_{33}} = \int_0^l \frac{1}{EI} dx$$

$$\lambda = \int_0^l \frac{x}{EI} dx / \int_0^l \frac{1}{EI} dx, \quad x_a = -\lambda, \quad x_b = l - \lambda, \quad y_a = y_b = 0$$

とすればよい。

次に式(22)より部材中間の変位と断面力を求めてみよう。式を簡単にするために、等断面の直線部材の場合だけについて考えてみる。 $N_a(x)$, $N_b(x)$ は式(18)で計算すればよい。直線部材の場合は、 $x \equiv \xi l$ とすると

$$k_{xx}(l-x) = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l(1-\xi)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3(1-\xi)^3} & \frac{6EI}{l^2(1-\xi)^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2(1-\xi)^2} & \frac{4EI}{l(1-\xi)} \end{bmatrix} \quad k_{ba}(l) = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$k_{bx}^{-1}(l-x) = \begin{bmatrix} -\frac{l(1-\xi)}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3(1-\xi)^3}{6EI} & \frac{l^2(1-\xi)^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{l^2(1-\xi)^2}{2EI} & -\frac{l(1-\xi)}{EI} \end{bmatrix} \quad k_{xx}(x) = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3\xi^3} & -\frac{6EI}{l^2\xi^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2\xi^2} & \frac{4EI}{l\xi} \end{bmatrix}$$

$$k_{ab}(l) = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \quad k_{ax}^{-1}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{l\xi}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3\xi^3}{6EI} & -\frac{l^2\xi^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l^2\xi^2}{2EI} & -\frac{l\xi}{EI} \end{bmatrix}$$

であるから、式(22)を計算した結果は図11のようになる。

最後に影響線であるが、図11ができていれば計算は容易である。4 節でも説明したように、着目部材以外の影響線は式(24)で、また着目部材の影響線は式(24)に両端固定ばりの影響線を重ね

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \\ N \\ S \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & (1-\xi)^3(1+2\xi) & (1-\xi)^2\xi l & 0 & \xi^3(3-2\xi) & -\xi^2(1-\xi)l \\ 0 & -\frac{6}{l}(1-\xi)\xi & (1-\xi)(1-3\xi) & 0 & \frac{6}{l}\xi(1-\xi) & \xi(-2+3\xi) \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2}(1-2\xi) & -\frac{2EI}{l}(2-3\xi) & 0 & \frac{6EI}{l^2}(1-2\xi) & -\frac{2EI}{l}(1-3\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ \theta_a \\ u_b \\ v_b \\ \theta_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{l\eta}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3\eta^3}{6EI} & \frac{l^2\eta^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{l^2\eta^2}{2EI} & -\frac{l\eta}{EI} \\ \frac{l(1-\eta)}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3(1-\eta)^3}{6EI} & -\frac{l^2(1-\eta)^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l^2(1-\eta)^2}{2EI} & -\frac{l(1-\eta)}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ m_3 \\ p_2 \\ p_3 \\ m_3 \end{bmatrix} l d\eta$$

図11

合わせて計算すればよい。たとえば、曲げモーメントの影響線の場合は、式(24)の f_a^T, f_b^T は図11の係数行列の第6行、すなわち

$$\left(0 \quad -\frac{6EI}{l^2}(1-2\xi) \quad -\frac{2EI}{l}(2-3\xi) \right), \left(0 \quad \frac{6EI}{l^2}(1-2\xi) \quad -\frac{2EI}{l}(1-3\xi) \right)$$

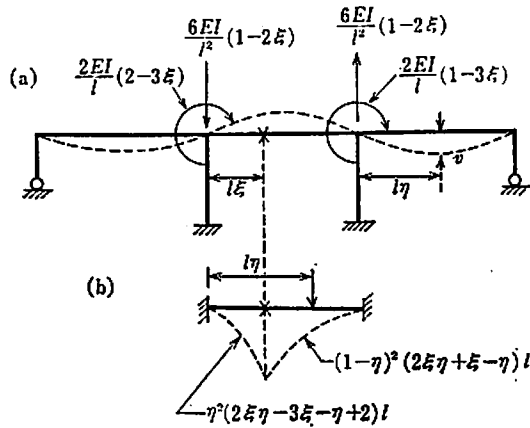


図12

であるから、図12(a)に示す荷重をかけて各節点の変位を求めればよい。ただし、図11の曲げモーメントは、ティモシェンコの符号の定義とは逆で、上側がそる場合を正としているので、一般に行われている符号に合わせるために、図12(a)ではすべての作用荷重の符号をかえて示してある。各節点の変位が求まれば、各部材のたわみ曲線（影響線）は、図11の第2行を用いて

$$v(\eta) = (1-\eta)^2(1+2\eta)v_a + (1-\eta)^2\eta l\theta_a + \eta^2(3-2\eta)v_b - \eta^2(1-\eta)l\theta_b$$

で計算できる。着目部材に対してだけは、このたわみ曲線に図12(b)に示す両端固定ばりの影響線を重ね合わさなければならないが、これは図11から次のように計算できる。両端固定ばり上を単位荷重が走行する場合は、 $u_a, v_a, \theta_a, u_b, v_b, \theta_b$ および p_x, m_x が0で、 p_y がa端から ηl の点に作用する単位荷重になるから、これらを代入して実際に計算すると表1が得られる。曲げモーメントの場合は、この表の最後の行を用いればよい。ただし、図12(b)では、さきに説明した曲げモーメントの符号の定義にしたがい式の符号は逆にしてある。

以上は曲げモーメントの影響線であるが、その他の場合も同様に考えればよい。たとえば、せん断力の影響線の場合は、図11の係数行列の5行目

$$\left(0 \quad -\frac{12EI}{l^3} \quad -\frac{6EI}{l^2} \right) \left(0 \quad \frac{12EI}{l^3} \quad -\frac{6EI}{l^2} \right)$$

を着目部材の両端の節点に载荷してたわみ曲線を求め、着目部材には表1の5行目の式を重ね合

第1表 両端固定ばりの影響線（平面構造物の場合）

	$\eta \leq \xi$ の場合	$\xi \leq \eta$ の場合
軸 方 向 変 位	0	0
た わ み	$-(1-\xi)^2\eta^2(2\xi\eta-3\xi+\eta)\frac{l^3}{6EI}$	$-\xi^2(1-\eta)^2(2\xi\eta+\xi-3\eta)\frac{l^3}{6EI}$
た わ み 角	$(1-\xi)\eta^2(2\xi\eta-3\xi+1)\frac{l^3}{2EI}$	$-\xi(1-\eta)^2(2\xi\eta+\xi-2\eta)\frac{l^3}{2EI}$
軸 力	0	0
せん断力	$-\eta^2(3-2\eta)$	$(1-\eta)^2(1+2\eta)$
曲げモーメント	$-\eta^2(2\xi\eta-3\xi-\eta+2)l$	$-(1-\eta)^2(2\xi\eta+\xi-\eta)l$

わせればよい。

§ 6. 例題 2 —— 格子構造物の場合

格子構造の場合、部材端の断面力は x, y 軸まわりのモーメント M_x, M_y と z 軸方向の力 P_z だけであり、変形も x, y 軸まわりの回転 θ_x, θ_y と z 軸方向の変位 V_z だけが現われるから、式(3)、(6)の断面力および変位の変換式は次のようになる（図13参照）。

$$\begin{bmatrix} M_{x'} \\ M_{y'} \\ P_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -y \\ -\sin \theta & \cos \theta & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \theta_{x'} \\ \theta_{y'} \\ V_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -y & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad (30)$$

この変換式を使い、式(9)で定義した k^{-1} を計算すると、図14の曲線部材の場合は

$$k^{-1} = \int_a^b \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa}{GA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ds \equiv \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \quad (31)$$

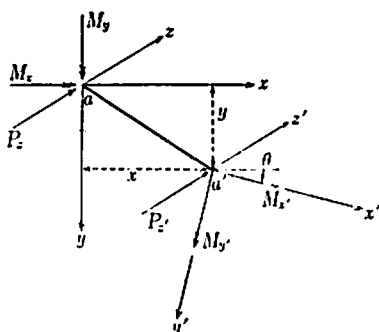


図13

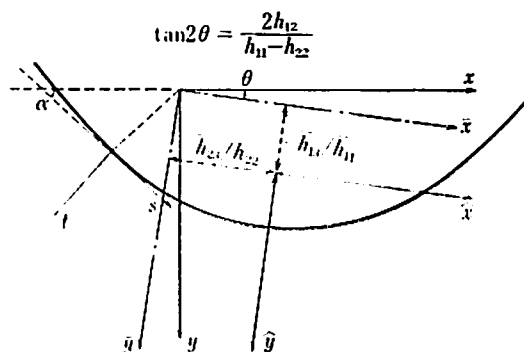


図14

となる。一般に行われているように、せん断変形を無視することにしても、上式の積分記号の中にある行列の内容を具体的に書くとかなり複雑なので、 k^{-1} の要素を簡単に h_{ij} と書くことにした。平面構造物の場合と同じように、 h_{13}, h_{23} が0となるように座標原点を選び、 h_{12} が0となるように座標軸を回転すると、 k^{-1} が対角行列になり要素の剛性行列を簡単な形で表示できるが、この計算も平面構造物よりかなり厄介である。そこで、 h_{12} が0となるように座標軸を回転し、そのあとで k^{-1} の逆行列を求めてみると、

$$\bar{k}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \bar{h}_{11} & 0 & \bar{h}_{13} \\ 0 & \bar{h}_{22} & \bar{h}_{23} \\ \bar{h}_{31} & \bar{h}_{32} & \bar{h}_{33} \end{bmatrix}$$

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\bar{h}_{13}/\bar{h}_{11} \\ 0 & 1 & -\bar{h}_{23}/\bar{h}_{22} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\bar{h}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\bar{h}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\bar{h}_{31}/\bar{h}_{11} & -\bar{h}_{32}/\bar{h}_{22} & 1 \end{bmatrix}$$

となる。ただし,

$$\tan^2 \theta \equiv \frac{2h_{12}}{h_{11} - h_{22}} \quad h_{33}^* \equiv \bar{h}_{33} - \frac{\bar{h}_{31}\bar{h}_{13}}{\bar{h}_{11}} - \frac{\bar{h}_{32}\bar{h}_{23}}{\bar{h}_{22}}$$

とおいた。 $\bar{k}$ の右辺に示した左右の行列は、式(30)を参照すると、座標の平行移動の行列である

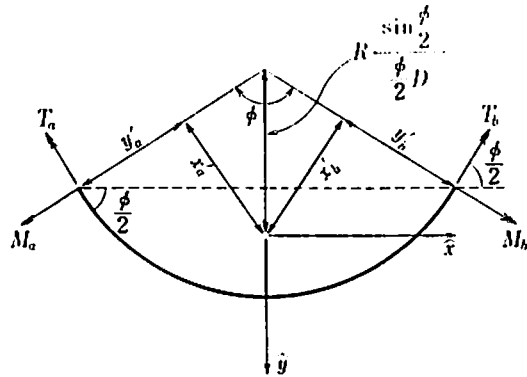


図15

ことが解る。ゆえに、図14に示すように、式(31)を計算したときの座標軸 x, y を θ だけ回転し、さらに x 方向に $\bar{h}_{23}/\bar{h}_{22}$, y 方向に $-\bar{h}_{13}/\bar{h}_{11}$ だけ平行移動して $\bar{x}, \bar{y}$ 軸を作ると、この座標軸に関する行列 $\bar{k}$ は対角行列となり、その対角要素は $1/\bar{h}_{11}, 1/\bar{h}_{22}, 1/h_{33}^*$ である。

とくに図15に示す等断面の円弧部材の場合は、

図に示す $\bar{x}, \bar{y}$ 軸を採用すると、 k^{-1} は対角行列

となり、その対角要素は

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{11}} &= \frac{R\phi}{GJ} D, & \frac{1}{k_{22}} &= \frac{R\phi}{EI} \left\{ \left(1 - \left(\frac{EI}{GJ} \right)^2 \right) \frac{\phi + \sin \phi}{2\phi} + \left(\frac{EI}{GJ} \right)^2 D \right\}, \\ \frac{1}{k_{33}} &= \frac{R^3}{EI} \frac{\phi - \sin \phi}{2D} \left\{ 1 + \frac{EI}{GJ} \left(\frac{\phi + \sin \phi}{\phi - \sin \phi} - \frac{2(1 - \cos \phi)}{\phi(\phi - \sin \phi)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

となるし、式(11)は図15の記号を用いると次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} T_a \\ M_a \\ S_a \\ \vdots \\ T_b \\ M_b \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) & \sin(\phi/2) & -y_a' \\ -\sin(\phi/2) & \cos(\phi/2) & x_a' \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\cos(\phi/2) & \sin(\phi/2) & y_b' \\ -\sin(\phi/2) & -\cos(\phi/2) & -x_b' \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) & -\sin(\phi/2) & 0 & \vdots & -\cos(\phi/2) & -\sin(\phi/2) & 0 \\ \sin(\phi/2) & \cos(\phi/2) & 0 & \vdots & \sin(\phi/2) & -\cos(\phi/2) & 0 \\ -y_a' & x_a' & 1 & \vdots & y_b' & -x_b' & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \theta_a \\ w_a \\ \vdots \\ \varphi_b \\ \theta_b \\ w_b \end{bmatrix} \quad (33)$$

ただし,

$$-x_a' = x_b' = \frac{R \sin^2(\phi/2)}{(\phi/2)D} \quad y_a' = y_b' = R \left(1 - \frac{\sin(\phi/2) \cos(\phi/2)}{(\phi/2)D} \right)$$

$$D \equiv \frac{\phi + \sin \phi}{2\phi} \left\{ 1 + \frac{GJ}{EI} \frac{\phi - \sin \phi}{\phi + \sin \phi} \right\}$$

等断面の直線部材の場合は、式(32)、(33)で $R = \infty$, $\phi = 0$, $R\phi = l$ とすればよいので

$$\frac{1}{k_{11}} = \frac{l}{GJ}, \quad \frac{1}{k_{22}} = \frac{l}{EI}, \quad \frac{1}{k_{33}} = \frac{l^3}{12EI}, \quad -x_a = x_b = \frac{l}{2}, \quad y_a = y_b = 0$$

となるし、さらにせん断変形まで考慮すると

$$\frac{1}{k_{11}} = \frac{l}{GJ}, \quad \frac{1}{k_{22}} = \frac{l}{EI}, \quad \frac{1}{k_{33}} = \frac{l^3(1+\Omega)}{12EI} \quad \left(\text{ただし } \Omega = \frac{12KEI}{GA l^2} \right)$$

とすればよい。また変断面の直線部材の場合は、 a 端から $\hat{x}$, $\hat{y}$ 座標の原点までの距離を λ とすると

$$\frac{1}{k_{11}} = \int_0^l \frac{1}{GJ} dx, \quad \frac{1}{k_{22}} = \int_0^l \frac{1}{EI} dx, \quad \frac{1}{k_{33}} = \int_0^l \frac{x^2}{EI} dx - \lambda^2 \int_0^l \frac{1}{EI} dx$$

$$\lambda = \int_0^l \frac{x}{EI} dx / \int_0^l \frac{1}{EI} dx, \quad x_a = -\lambda, \quad x_b = l - \lambda, \quad y_a = y_b = 0$$

となる。

次に式(22)より部材中間の変位と断面力を求めてみよう。式を簡単にするために、等断面の直線部材の場合だけについて考えてみる。 $N_a(x)$, $N_b(x)$ は式(18)で計算すればよい。直線部材の場合は、 $x = \xi l$ とすると、計算に必要な $k_{xx}(l-x)$, $k_{xx}(x)$ 等は

$$k_{xx}(l-x) = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{l(1-\xi)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l(1-\xi)} & \frac{-6EI l^2}{(1-\xi)^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{l^2(1-\xi)^2} & \frac{12EI}{l^3(1-\xi)^3} \end{bmatrix} \quad k_{ba}(l) = - \begin{bmatrix} -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{-6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{-12EI}{l^3} \end{bmatrix}$$

$$k_{bx}^{-1}(l-x) = \begin{bmatrix} -\frac{l(1-\xi)}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-l(1-\xi)}{EI} & \frac{l^2(1-\xi)^2}{2EI} \\ 0 & \frac{-l^2(1-\xi)^2}{2EI} & \frac{l^3(1-\xi)^3}{6EI} \end{bmatrix} \quad k_{xx}(x) = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{l\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l\xi} & \frac{6EI}{l^2\xi^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2\xi^2} & \frac{12EI}{l^3\xi^3} \end{bmatrix}$$

$$k_{ab}(l) = \begin{bmatrix} -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{-12EI}{l^3} \end{bmatrix} \quad k_{ax}^{-1}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{l\xi}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l\xi}{EI} & \frac{l^2\xi^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l^2\xi^2}{2EI} & \frac{l^3\xi^3}{6EI} \end{bmatrix}$$

であるから、式(22)を計算した結果は図16のようになる。

最後に影響線であるが、図16と表2に示す両端固定ばりの影響線があれば、変位および断面力の影響線を作る操作は、平面構造物の場合と同じなので、くわしい説明は省略する。ただし、図16および表2において、たわみ角と曲げモーメントの符号は一般に用いられているものと逆にな

第2表 両端固定ばりの影響線 (格子構造物の場合)

	$\eta \leq \xi$ の場合	$\xi \leq \eta$ の場合
ねじり角	0	0
たわみ角	$-(1-\xi)\eta^2\{2\xi\eta-3\xi+1\}\frac{l^2}{2EI}$	$\xi(1-\eta)\{2\xi\eta+\xi-2\eta\}\frac{l^2}{2EI}$
たわみ	$-(1-\xi)^2\eta^2\{2\xi\eta-3\xi+\eta\}\frac{l^3}{6EI}$	$-\xi^2(1-\eta)^2\{2\xi\eta+\xi-3\eta\}\frac{l^3}{6EI}$
ねじりモーメント	0	0
曲げモーメント	$\eta^2(2\xi\eta-3\xi-\eta+2)l$	$(1-\eta)^2(2\xi\eta+\xi-\eta)l$
せん断力	$-\eta^2(3-2\eta)$	$(1-\eta)^2(1+2\eta)$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \varphi \\ \theta \\ w \\ T \\ M \\ S \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1-\xi & 0 & 0 \\ 0 & (1-\xi)(1-3\xi) & \frac{6}{l}(1-\xi)\xi \\ 0 & -(1-\xi)^2\xi l & (1-\xi)^2(1+2\xi) \\ -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2EI}{l}(2-3\xi) & \frac{6EI}{l^2}(1-2\xi) \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi(-2+3\xi) & -\frac{6}{l}\xi(1-\xi) \\ 0 & \xi^2(1-\xi)l & \xi^2(3-2\xi) \\ \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2EI}{l}(1-3\xi) & -\frac{6EI}{l^2}(1-2\xi) \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \varphi_a \\ \theta_a \\ w_a \end{array} \right] \int_0^\xi \left[\begin{array}{ccc} -\frac{l\eta}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l\eta}{EI} & -\frac{l^2\eta^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{l^2\eta^2}{2EI} & \frac{l^3\eta^3}{6EI} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ p_z \end{array} \right] d\eta \\ \left[\begin{array}{c} \varphi_b \\ \theta_b \\ w_b \end{array} \right] \int_\xi^l \left[\begin{array}{ccc} -\frac{l(1-\eta)}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l(1-\eta)}{EI} & -\frac{l^2(1-\eta)^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{l^2(1-\eta)^2}{2EI} & -\frac{l^3(1-\eta)^3}{6EI} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ p_z \end{array} \right] d\eta \end{array} \right] \end{array}$$

図16

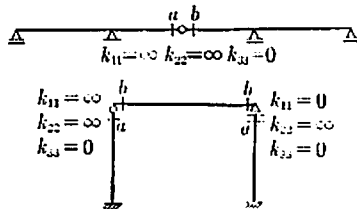


図17

っているので注意が必要である。

本論文の議論は、さらに立体構造物にも拡張できるが、説明が長くなるので省略する。なお、本論文で取扱った部材は、両端が節点に完全に結合している場合についてのものであるが、実際には不完全結合の場合もよくみかけられる。不完全結合の部材に対しては、別のサブルーチンを用意することが一般に行

われているが、このような対応は、2節でも説明したように、超小型電算機には不向きである。そこで図17に示すように、不連続端を含む長さ0の部材を用意し、不連続端の形式に応じて式(28)あるいは式(33)の k_{11} , k_{22} , k_{33} を0または無限大にする方法を取ることにした。このようにすると、部材の数は不連続端の数だけ増大するが、特別なサブルーチンを用意する必要がなくなる。ただし、無限大をどの程度の数にすればよいかという問題は残るが、今までの数値実験の結果では、部材剛性の1000部位の値を用いれば、満足できる結果が得られている。

§ 7. 結 言

本研究は、前年度に引き続き、超小型電算機のための汎用構造解析プログラムを開発するために検討した議論のまとめである。本論文の主旨に従ってプログラムを作成し、現在数値実験を行

っているが、計算の流れや入出力についてまだ不満足な点があるため、所要時間の測定等を行っている。後日、プログラムが完成した時点で報告する予定でいる。

なお、本論文は文部省科学技術研究補助金の交付を受けて行っている研究の一部であることを付記する。

文 献

- 1) 大地 “マトリックス構造解析” コロナ社 (1977)
- 2) 山下・久保 “変形法プログラムにおける 影響線の求め方について” 土木学会年次学術講演会 II-26 (1975)
- 3) 大地 “拘束条件の実用的処理” 土木学会年次学術講演会 I-20 (1978)
- 4) 大地 “超小型電算機による構造解析” 法政大学工学部研究集報15 (1979)
- 5) 大地 “超小型電算機のための剛性行列作成に対する提案” 土木学会年次学術講演会 I-21 (1979)
- 6) 大地 “超小型電算機による構造解析プログラム” 土木学会電算機利用に関する シンポジウム予稿集 (1979)