

平板状振動層流の理論

TAKEDA, Shin' ichiro / 武田, 晋一郎

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部
研究集報

(巻 / Volume)

17

(開始ページ / Start Page)

23

(終了ページ / End Page)

32

(発行年 / Year)

1981-03

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004129>

平板状振動層流の理論

武田 晋一郎*

Theory of Laminar Oscillatory Flow between Parallel Plates

Shin'ichiro TAKEDA

Abstract

The velocity distribution of laminar oscillatory flow of fluid (air) in a circular pipe was calculated in the former report (Report of the Technical College of Hosei University, No. 1, May 1956), and the phenomenon of raising up of the velocity distribution curves near the periphery of the section of pipe walls was observed. To decide the cause of this phenomenon, the velocity distribution of laminar oscillatory flow between parallel plates was calculated, as the latter flow is simpler than the former flow. The velocity distribution curves of the two cases resemble very well and the raising up phenomena were very clearly recognized, and we can conclude that the raising up of velocity distribution curves is the result of flow continuity law, the accelerating of flow near the periphery is caused by the slow down of velocity of flow nearer to the wall as the viscosity effect becomes stronger.

§1. 緒 言

円形管の振動層流の速度分布については、さきに法政大学工学部研究報告第1号(昭31年)において研究した通りであるが、その後大学院生栗山昭一君が円管内の流れについて振動層流の臨界レイノルズ数の変化の研究(昭和51年)を実験的に行ったが、その際円管周縁部における速度分布の盛り上りが問題となった。この盛り上りを研究するため、円管よりはより簡単な境界条件であると考えられる平板状振動層流の速度分布を計算することにした。

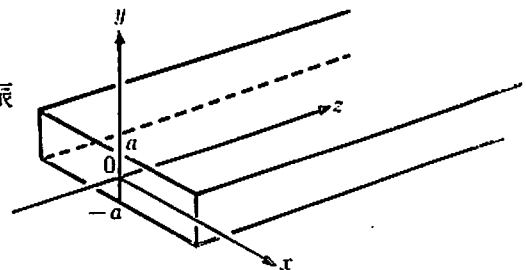
§2. 平板状振動層流の速度分布の計算

(1) 平板状振動層流の基礎方程式とその解法

座標軸を右図のように定め、流速を u とする。 e^{int} の振動と考える。

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial z} e^{int}$$

(1)



* 電気工学科，計測制御専攻

x -方向の斉一性, 線形化を仮定し, $u \propto ue^{int}$ を代入すれば

$$\rho \cdot inue^{int} = \mu e^{int} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial z} e^{int}$$

e^{int} で約して, $\nu \equiv \mu/\rho$ を導入すると

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dy^2} - i \frac{n}{\nu} u = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}} \quad (2)$$

これが解くべき基本式である。(2)の同次方程式の解は $u = e^{\rho y}$ において

$$\rho^2 - i \frac{n}{\nu} = 0, \quad \rho^2 = i \frac{n}{\nu}, \quad \rho = \pm \sqrt{i \frac{n}{\nu}}$$

$\sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\rho = \sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i) \quad \text{および} \quad -\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i) \quad (3)$$

となる。方程式(2)の特解 u_s は $\frac{d^2 u}{dy^2}$ の項をはぶいた式より

$$-i \frac{n}{\nu} u_s = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}$$

$$u_s = -\frac{\nu}{n\mu i} \frac{dp}{dz} = \frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} \quad (4)$$

となるので, 方程式(2)の一般解は

$$\boxed{u = Ae^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)y} + Be^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)y} + \frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz}} \quad (5)$$

となる。未定係数 A, B は境界条件より決定する。

境界条件は壁面で速度 $u=0$ であることより

$$u(a)=0, \quad u(-a)=0 \quad (6)$$

(5)を(6)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} Ae^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} + Be^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} + \frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} &= 0 \\ Ae^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} + Be^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} + \frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

連立方程式(7)より A, B を求めると,

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} & e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \\ -\frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} & e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \\ e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} & e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \\ e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} & e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} & -\frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} \\ e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} & -\frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} \\ e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} & e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \\ e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} & e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \end{vmatrix}}, \quad B = \frac{\begin{vmatrix} e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} & -\frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} \\ e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} & -\frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} \\ e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} & e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \\ e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} & e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} & e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} - e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \\ -\frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} & e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} - e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \\ e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} & e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \\ e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} & e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \end{vmatrix}}$$

$$A = \frac{-\frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} \left(e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} - e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \right)}{e^{\sqrt{\frac{2n}{\nu}}(1+i)a} - e^{-\sqrt{\frac{2n}{\nu}}(1+i)a}} \quad (8)$$

$$B = \frac{-\frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} \left(e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} - e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} \right)}{e^{\sqrt{\frac{2n}{\nu}}(1+i)a} - e^{-\sqrt{\frac{2n}{\nu}}(1+i)a}}$$

$A=B$ である。(8)を(5)に代入すれば

$$u = -\frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} \frac{e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} - e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a}}{e^{\sqrt{\frac{2n}{\nu}}(1+i)a} - e^{-\sqrt{\frac{2n}{\nu}}(1+i)a}} \left(e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)y} + e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)y} \right) + \frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz}$$

$$u = \frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} \left[1 - \frac{e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} - e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a}}{e^{\sqrt{\frac{2n}{\nu}}(1+i)a} - e^{-\sqrt{\frac{2n}{\nu}}(1+i)a}} \left(e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)y} + e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)y} \right) \right]$$

これが境界条件に合致した解である。更に簡単化すれば

$$u = \frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} \left[1 - \frac{e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)y} + e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)y}}{e^{\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a} + e^{-\sqrt{\frac{n}{2\nu}}(1+i)a}} \right] \quad (9)$$

$u(a)=u(-a)=0$ となることは、(9)によれば明白に見られる。

(2) 解の無次元化

計算を進める前に、関係式の無次元化をしておく必要がある。

$\frac{y}{a} \equiv \eta$ とおいて、無次元座標を導入する。

$$y = a\eta, \quad dy = a d\eta, \quad \frac{du}{dy} = \frac{du}{a d\eta}, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2u}{d\eta^2}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} - i \frac{n}{\nu} u = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \rightarrow \frac{d^2u}{d\eta^2} - i \frac{na^2}{\nu} u = \frac{a^2}{\mu} \frac{dp}{dz}$$

$u = e^{\rho\eta}$ とおけば、

$$\rho^2 = i \frac{na^2}{\nu}, \quad \rho = \pm \sqrt{i \frac{n}{\nu}} a$$

$k \equiv \sqrt{\frac{n}{2\nu}} a$ とおく。

$$u = A e^{k(1+i)\eta} + B e^{-k(1+i)\eta} + \frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz}$$

境界条件：

$$u(\eta=1)=0, \quad u(\eta=-1)=0$$

一般解：

$$u = \frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} \left[1 - \frac{e^{k(1+i)\eta} + e^{-k(1+i)\eta}}{e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}} \right] \quad (10)$$

$\frac{u}{\frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz}} \equiv u$ とおけば、これは無次元速度である。

$$\left[\frac{i}{n\rho} \frac{dp}{dz} \right] = \frac{1}{\frac{1}{T} \cdot \frac{M}{L^3}} \frac{ML^{-1}T^{-1}}{L} = \frac{TL^3ML^{-1}T^{-2}}{ML} = \frac{L}{T} : \text{速度の次元。}$$

無次元量を使った解式は

$$u = 1 - \frac{e^{k(1+i)\eta} + e^{-k(1+i)\eta}}{e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}} \quad (11)$$

となる。

(3) 速度 u の絶対値の計算

(11)による速度は複素数であるから、流速分布を求める場合には $|u|$ が必要である。絶対値は u の共役複素数 $\bar{u}$ との積の平方根をとればよい。

$$\bar{u} = 1 - \frac{e^{k(1-i)\eta} + e^{-k(1-i)\eta}}{e^{k(1-i)} + e^{-k(1-i)}} \quad (12)$$

(11)と(12)との積を作れば

$$\begin{aligned} u\bar{u} &= \left[1 - \frac{e^{k(1+i)\eta} + e^{-k(1+i)\eta}}{e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}} \right] \left[1 - \frac{e^{k(1-i)\eta} + e^{-k(1-i)\eta}}{e^{k(1-i)} + e^{-k(1-i)}} \right] \\ &= 1 - \frac{e^{k(1+i)\eta} + e^{-k(1+i)\eta}}{e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}} - \frac{e^{k(1-i)\eta} + e^{-k(1-i)\eta}}{e^{k(1-i)} + e^{-k(1-i)}} + \frac{[e^{k(1+i)\eta} + e^{-k(1+i)\eta}][e^{k(1-i)\eta} + e^{-k(1-i)\eta}]}{[e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}][e^{k(1-i)} + e^{-k(1-i)}]} \\ &= 1 - \frac{[e^{k(1+i)\eta} + e^{-k(1+i)\eta}][e^{k(1-i)} + e^{-k(1-i)}] + [e^{k(1-i)\eta} + e^{-k(1-i)\eta}][e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}]}{[e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}][e^{k(1-i)} + e^{-k(1-i)}]} \\ &\quad + [e^{2k\eta} + e^{-2k\eta} + e^{2ki\eta} + e^{-2ki\eta}] \end{aligned}$$

右辺分子第1項と第2項の積の計算は下記の通りとなる。

$$\begin{aligned} &[e^{k(1+i)\eta} + e^{-k(1+i)\eta}][e^{k(1-i)} + e^{-k(1-i)}] + [e^{k(1-i)\eta} + e^{-k(1-i)\eta}][e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}] \\ &= e^{k\eta+k} e^{i(k\eta+k)} + e^{-k\eta+k} e^{i(-k\eta-k)} + e^{k\eta-k} e^{i(k\eta+k)} + e^{-k\eta-k} e^{i(-k\eta+k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + e^{k+k\eta} e^{i(k-k\eta)} + e^{-k+k\eta} e^{i(-k-k\eta)} + e^{k-k\eta} e^{i(k+k\eta)} + e^{-k-k\eta} e^{i(-k+k\eta)} \\
 & = e^{k(1+\eta)} (e^{ik(1-\eta)} + e^{-ik(1-\eta)}) + e^{k(1-\eta)} (e^{ik(1+\eta)} + e^{-ik(1+\eta)}) \\
 & \quad + e^{-k(1-\eta)} (e^{ik(1+\eta)} + e^{-ik(1+\eta)}) + e^{-k(1+\eta)} (e^{ik(1-\eta)} + e^{-ik(1-\eta)}) \\
 & = e^{k(1+\eta)} \cdot 2 \cos k(1-\eta) + e^{k(1-\eta)} \cdot 2 \cos k(1+\eta) + e^{-k(1-\eta)} \cdot 2 \cos k(1+\eta) + e^{-k(1+\eta)} \cdot 2 \cos k(1-\eta) \\
 & = 2 \cos k(1-\eta) \cdot (e^{k(1+\eta)} + e^{-k(1+\eta)}) + 2 \cos k(1+\eta) \cdot (e^{k(1-\eta)} + e^{-k(1-\eta)}) \\
 & = 4 \cos k(1-\eta) \cosh k(1+\eta) + 4 \cos k(1+\eta) \cosh k(1-\eta)
 \end{aligned}$$

分母の計算は

$$[e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}][e^{k(1-i)} + e^{-k(1-i)}] = e^{2k} + e^{-2ki} + e^{2ki} + e^{-2k} = 2 \cosh 2k + 2 \cos 2k$$

これらの式を代入すれば

$$\boxed{\bar{u} = 1 - \frac{2 \cos k(1-\eta) \cosh k(1+\eta) + 2 \cos k(1+\eta) \cosh k(1-\eta) - \cosh 2k\eta - \cos 2k\eta}{\cosh 2k + \cos 2k}} \quad (13)$$

これによって、速度分布がわかるのであるが、速度の不均値 u_{mean} を求めて、その比で表現した方が妥当である。

$$\begin{aligned}
 u_{mean} &= \frac{1}{2a} \int_a^u u d\eta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u d\eta = \int_0^1 u d\eta \\
 &= \int_0^1 \left[1 - \frac{e^{k(1+i)\eta} + e^{-k(1+i)\eta}}{e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}} \right] d\eta \\
 &= \left[\eta - \frac{1}{k(1+i)} \frac{e^{k(1+i)\eta}}{e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}} - \frac{1}{k(1+i)} \frac{e^{-k(1+i)\eta}}{e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}} \right]_0^1 \\
 &= 1 - \frac{1}{k(1+i)} \frac{e^{k(1+i)} - e^{-k(1+i)}}{e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}} \\
 &= 1 - \frac{1}{k(1+i)} \frac{e^{k(1+i)} - e^{-k(1+i)}}{e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}} \quad (14)
 \end{aligned}$$

u_{mean} の共役数 $\bar{u}_{mean}$ を求めると

$$\bar{u}_{mean} = 1 - \frac{1}{k(1-i)} \frac{e^{k(1-i)} - e^{-k(1-i)}}{e^{k(1-i)} + e^{-k(1-i)}} \quad (14')$$

u_{mean} の絶対値を求めるため、 $u_{mean} \cdot \bar{u}_{mean}$ を計算する。

$$\begin{aligned}
 u_{mean} \cdot \bar{u}_{mean} &= \left[1 - \frac{1}{k(1+i)} \frac{e^{k(1+i)} - e^{-k(1+i)}}{e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}} \right] \left[1 - \frac{1}{k(1-i)} \frac{e^{k(1-i)} - e^{-k(1-i)}}{e^{k(1-i)} + e^{-k(1-i)}} \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{k(1-i)} \frac{e^{k(1-i)} - e^{-k(1-i)}}{e^{k(1-i)} + e^{-k(1-i)}} - \frac{1}{k(1+i)} \frac{e^{k(1+i)} - e^{-k(1+i)}}{e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}} \\
 & \quad + \frac{1}{k^2(1-i)^2} \frac{[e^{k(1+i)} - e^{-k(1+i)}][e^{k(1-i)} - e^{-k(1-i)}]}{[e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}][e^{k(1-i)} + e^{-k(1-i)}]} \\
 &= 1 - \frac{k(1+i)[e^{k(1-i)} - e^{-k(1-i)}][e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}] + k(1-i)[e^{k(1+i)} - e^{-k(1+i)}][e^{k(1-i)} + e^{-k(1-i)}]}{2k^2 \cdot (e^{2k} + e^{-2ki} + e^{2ki} + e^{-2k})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (e^{2k} - e^{-2ki} - e^{2ki} + e^{-2k}) \\
= & 1 - \frac{k(1+i)(e^{2k} - e^{2ki} + e^{-2ki} - e^{-2k}) + k(1-i)(e^{2k} - e^{-2ki} + e^{2ki} - e^{-2k}) - 2 \cosh 2k + 2 \cos 2k}{4k^2 \cdot (\cosh 2k + \cos 2k)} \\
= & 1 - \frac{k(1+i) \cdot 2 \cdot (\sinh 2k - i \sin 2k) + k(1-i) \cdot 2 \cdot (\sinh 2k + i \sin 2k) - 2 \cosh 2k + 2 \cos 2k}{4k^2 \cdot (\cosh 2k + \cos 2k)} \\
= & 1 - \frac{k \sinh 2k + ik \sinh 2k - ik \sin 2k + k \sin 2k + k \sinh 2k - ik \sinh 2k + ik \sin 2k + k \sin 2k}{2k^2 \cdot (\cosh 2k + \cos 2k)} \\
& - \cosh 2k + \cos 2k \\
= & 1 - \frac{2k \sinh 2k + 2k \sin 2k - \cosh 2k + \cos 2k}{2k^2 \cdot (\cosh 2k + \cos 2k)} \\
& \boxed{u_m \bar{u}_m = 1 - \frac{2k(\sinh 2k + \sin 2k) - \cosh 2k + \cos 2k}{2k^2 \cdot (\cosh 2k + \cos 2k)}} \quad (15)
\end{aligned}$$

(13)と(15)によって, $|u|$ と $|u_{mean}|$ とがわかり, これによって $\frac{|u|}{|u_{mean}|}$ の速度分布曲線を描くことができる。

(4) パラメータ k の値に対する吟味

パラメータ k は $\sqrt{\frac{n}{2\nu}} a$ であって, 無次元数である。 k の値の変化に対する物理的意味とその極限值と上の計算式の極限值とが一致するか否かを吟味する。

(a) $k \rightarrow 0$ の場合

$k \rightarrow 0$ は振動数 $n \rightarrow 0$, 壁間距離 $a \rightarrow 0$ に対応し, 粘性の影響が強く効いて定常層流に近い状態となる。 $k \rightarrow 0$ のとき式(11)が定常層流の速度分布式 $(1 - \eta^2)$ に一致するかどうかをしらべる。

$$\begin{aligned}
u &= 1 - \frac{e^{k(1+i)\eta} + e^{-k(1+i)\eta}}{e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}} = 1 - \frac{e^{k\eta} e^{ik\eta} + e^{-k\eta} e^{-ik\eta}}{e^k e^{ki} + e^{-k} e^{-ki}} \\
&= 1 - \frac{1 + k(1+i)\eta + \frac{k^2}{2}(1+i)^2\eta^2 + \dots + 1 - k(1+i)\eta + \frac{k^2}{2}(1+i)^2\eta^2 + \dots}{1 + k(1+i) + \frac{k^2}{2}(1+i)^2 + \dots + 1 - k(1+i) + \frac{k^2}{2}(1+i)^2 + \dots} \\
&= 1 - \frac{2 + k^2(1+i)^2\eta^2 + \dots}{2 + k^2(1+i)^2 + \dots} = 1 - \frac{2 + 2ik^2\eta^2 + \dots}{2 + 2ik^2 + \dots} \\
&= 1 - (1 + ik^2\eta^2 + \dots)(1 + ik^2 + \dots)^{-1} = 1 - 1 + ik^2 - ik^2\eta^2 + \dots \\
&= ik^2(1 - \eta^2) + \dots
\end{aligned}$$

となって, $k \rightarrow 0$ のとき右辺の第2項以下は高次の無限小となって, 速度分布は放物線状となり

定常層流の場合に帰着する。

(b) $k \rightarrow \infty$ の場合

$k \rightarrow \infty$ は振動数 $n \rightarrow \infty$, 壁間距離 $a \rightarrow \infty$ の場合に対応し, 粘性の影響は小さく, 平らな速度分布になる。式(11)によれば, k が大きいとき e^{-k} は小さいので

$$\begin{aligned} u &= 1 - \frac{e^{k(1+i)\eta} + e^{-k(1+i)\eta}}{e^{k(1+i)} + e^{-k(1+i)}} \approx 1 - \frac{e^{k(1+i)\eta} + \dots}{e^{k(1+i)} + \dots} \\ &= 1 - e^{k(1+i)\eta - k(1+i)} = 1 - e^{k(\eta-1) + ik(\eta-1)} \end{aligned}$$

$\eta < 1$ であるから, e の指数は負となり, $k \rightarrow \infty$ のとき右辺第2項は0となる。 u の値は1となり, 平らな速度分布となる。ただし, $\eta = 1$ では0となる。

(5) 速度分布の計算

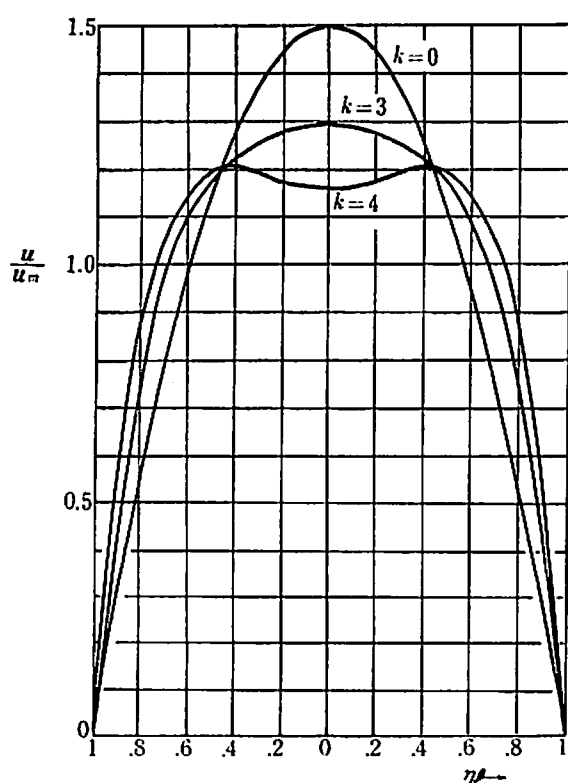
速度分布曲線を描くには, 式(13)によって u の絶対値を (その平方根をとって) 求め, 式(15)によって平均速度の絶対値を求め

$$\frac{\sqrt{u\bar{u}}}{\sqrt{u_m\bar{u}_m}} = \frac{|u|}{|u_m|}$$

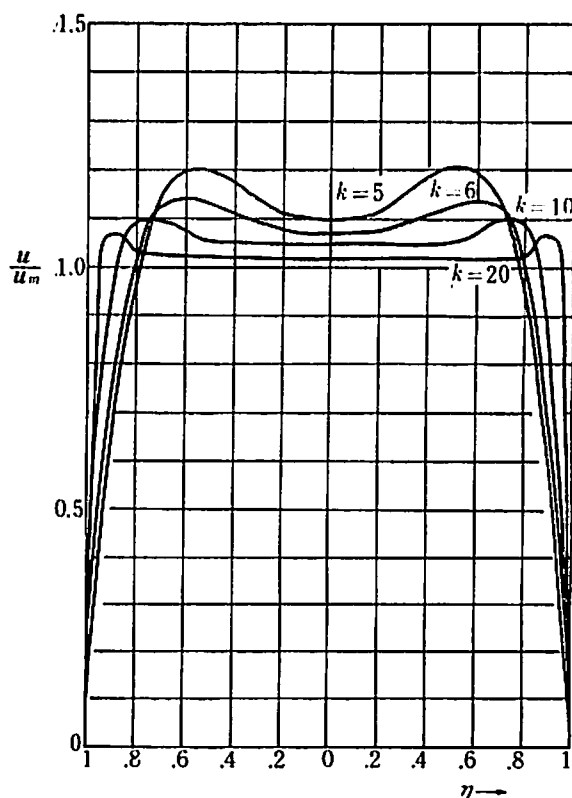
の値を計算すればよい。

$$\eta = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$$

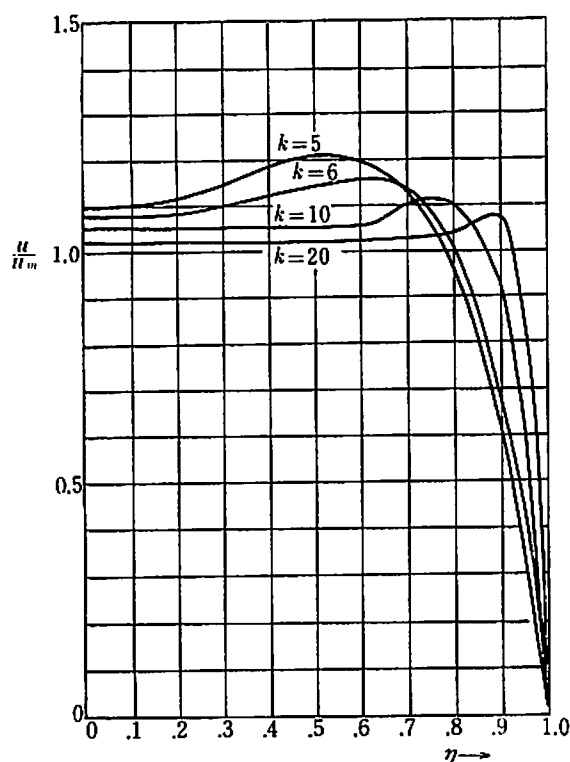
$$k = 0, 1.0, 1.5, 2.5, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 10, 20$$



第1図 全断面における流速分布 $k=0, 3, 4$ の場合



第2図 全断面における流速分布 $k=5, 6, 10, 20$ の場合



第3図 半断面における流速分布 $k=5, 6, 10, 20$ の場合

について計算する。

指数関数と正弦関数の計算を含むので、林桂一；高等函数表(岩波書店)を使用し、電卓にて計算した。 e の指数の大きいことがあるので、注意して計算した。また、のちに複素数を用いる式(11)の計算を Texas Instruments 社の小型プログラム電卓によって行って同様の数値を得た。

流速分布 (u/u_m とパラメータ k および η との関係) は9頁の表とこれをグラフにて表わした第1～3図の通りになる。予想される通り、 k が小さい場合は定常層流の分布に近く、 k が大きい場合は平板状分布となるが、その中間の k の値においては周縁部の分布曲線の盛り上がり矢張り認められ、円管の場合よりも少し顕著とみられる。これは実験(後述)よりも認められることである。

実験との対応を便にするため、31頁の表および第1～3図に表わされた分布曲線のパラメータ k が実験の規定値 c/s あるいは r.p.m とどのような関係にあるかを

空気の動粘性係数 (20°Cの温度) : $\nu=0.150 \text{ cm}^2/\text{s}$

壁間距離 $2a=10 \text{ mm}=1.0 \text{ cm}$, : $a=0.5 \text{ cm}$

を標準値としてしらべておく。

$k=\sqrt{\frac{n}{2\nu}} a$ から n を求めると

$$n (\text{rad/s}) = 2\nu \frac{k^2}{a^2} = 1.20 k^2$$

$$N (\text{c/s}) = \frac{2\nu}{2\pi} \frac{k^2}{a^2} = \frac{\nu k^2}{\pi a^2} = 0.1910 k^2$$

$$N_1 (\text{r.p.m}) = 60 \frac{\nu k^2}{\pi a^2} = 11.46 k^2$$

k	$n (\text{rad/s})$	$N (\text{c/s})$	$N_1 (\text{r.p.m.})$
0	0	0	0
1	1.200	0.1910	11.46
2.5	7.500	1.194	71.63
3	10.80	1.719	103.14
4	19.20	3.056	183.36
5	30.00	4.775	286.50
6	43.20	6.876	412.56
10	120.0	19.10	1146.
20	480.0	76.40	4584.

壁間距離が大きくなれば、上の値をその自乗の割合で小さくすればよい。

§ 3. 結 言

円管内の流体の流れについて、振動層流の速度分布の前の研究に見られた分布曲線の管壁近くでの盛り上りは一見予期しないような現象と考えられ、この点を一層明確にするため、より境界条件の簡単であると考えられる平行板の間の流れについて、同様な振動層流の速度分布を理論的に計算した。計算結果に本文及びその図の通りで、やはり明瞭な管壁近くでの盛り上りの現象が認められた。

この盛り上りの現象の発生の理由は、管の直ぐ近傍（境界層）では粘性摩擦の直接の影響で速度はその大きさが管壁では零にまで下るため、流体の流れの区間的な流量が小さくなる。この分の流量はその外の周縁部の速度増加を来たし、それらがほぼ釣り合うような状況になっていると思われる。図を見ると、大体において速度減少部の面積（流量減少）と盛り上り部の面積が等しいことはこの見解の正しいことを意味しているようである。

平行板の間の振動層流の実現とその速度分布の実測は可成り困難な仕事である。鈴木廣志君はこの困難な研究を完成して見事なる速度分布曲線の実測に成功して著者の考察を助けて呉れた。記して感謝の意を表する次第である。次記の実験的研究を参照せられたい。

本研究は昭和52年度法政大学特別研究助成を受けたことを付記する。