微積雛形論

TANAKA, George / 田中, 穣二

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Technical College of Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
18
(開始ページ / Start Page)
23
(終了ページ / End Page)
32
(発行年 / Year)
1982-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004106

微　積　雛　形　論

田　中　稜　二*

George TANAKA

Abstract

The difficulty of mathematical analysis depends upon the traditional and confusing definition of real numbers. In this respect, we examine non-standard analysis, but this model is also confusing.

On the contrary of Euclides definition of line, we use the very clear definition of line and construct the new model of differential and integral calculus which is called "Biseki Hinagata Ron".

1.　ギリシャは後世に２つの重大な知的遺産を寄贈した。それはピタゴラスに始まり，ユークリッドで結晶する数学と，宇宙と人間存在について統一ある学的体系としてのギリシャ哲学である。

ギリシャ数学の代表的成果であるユークリットの原論は23の定義，５つの公準，９つの公理から始るが，その最初の部分をあげると

定義 (1) 点とは部分なきものである。

(2) 線とは幅なき長さである。

(3) 線の端は点である。

公準 (1) 任意の点より任意の点まで直なる線を引き得ること。

(2) 限られた直なる線を続けて直に延長し得ること。

(3) 任意の中心および半径にて円を画き得ること。

公理 (1) 同じものに等しきものはたがいに相等しい。

(2) 等しきものに等しきものを加えれば，その全体は等しい。

(3) 等しきものより等しきものを取去れば，その残りは相等しい。

などである。

2.　17世紀に，ニュートンの"プリンシピア，(自然哲学の数学的原理)"では微積分学（流率法といわれる）を使って，運動の３法則を述べ，流体力学，宇宙構造論を論じている。

*　経営工学科

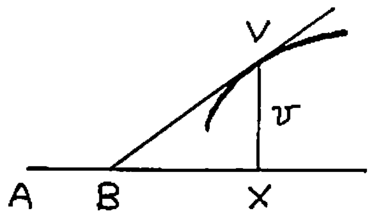

図1 曲線Vの接線 VB

またライプニッツは“極大極小の新方法”（1684年）で次のように述べている。

曲線 V から軸 AX に下した垂線を VX, その長さを v で表わす。AX の長さは x で表わす。VB は曲線上の点Vにおける曲線の接線とする。任意の1つの線分をとって dx と名づける。そのとき dx に対して v が, XB に対する比と同じ比をもつような線分を dv で表わし, v の差 differentia と名づける。このように定義すると次のような計算規則がなりたつ。

a が定数ならば $da=0$, $d(ax)=adx$. V, v と同様に, W, w を定義すると

$$d(v\pm w)=dv\pm dw$$

$$d(xv)=xav+vdx$$

$$d\frac{w}{v}=\frac{vdw-wdv}{v^2}$$

など, 現代の微積分の教科書とほとんど変らないことが述べられている。

3. 現代の微積分学または解析の権威のある教科書, たとえば Dieudonné, Modern Analysis などでは, 実数Rを連続の公理を満す順序体として定義するものが多い。すなわち, 実数体Rとは (i) $R\times R$ から R の中への2つの関数, $(x,y)\to x+y$, $(x,y)\to xy$, (ii) Rの中の要素 x, y に対して, 関係 $x\leqq y$ が定義され, 次のⅠ～Ⅳの公理を満す集合Rである。

（Ⅰ） Rは体である。

（1） $x+(y+z)=(x+y)+z$;

（2） $x+y=y+x$;

（3） いかなる $x\in R$ に対しても, $0+x=x$ である要素 $0\in R$ が存在する；

（4） いかなる $x\in R$ に対しても, $x+(-x)=0$ である要素 $-x\in R$ が存在する；

（5） $x(yz)=x(yz)$;

（6） $xy=yz$；

（7） いかなる $x\in R$ に対しても, $1\cdot x=x$ である $1\in R$, $1\fallingdotseq 0$ が存在する；

（8） いかなる $x\in R$, $x\fallingdotseq 0$ に対しても $xx^{-1}=1$ である要素 $x^{-1}\in R$ が存在する；

（9） $x(y+z)xy+xz$;

（Ⅱ） Rは順序体である。

(10) $x\leqq y$, $y\leqq z$ ならば $x\leqq z$;

(11) $x\leqq y$, $y\leqq x$ は $x=y$ と同じ；。

(12) いかなる $x, y\in R$ に対しても $x\leqq y$ であるか, または $y\leqq x$;

(13) $x\leqq y$ ならば $x+z\leqq y+z$;

(14) $0\leqq x$, $0\leqq y$ ならば $0\leqq xy$;

（Ⅲ）　Rはアルキメデス順序体である。

(15)　いかなる $x, y \in R$, $0 \leqq x$, $0 \neq x$, $0 \leqq y$ に対しても，$y \leqq n \cdot x$ なる整数nが存在する。

（Ⅳ）　Rは区間縮小の公理（連続の公理）を満す。$a \leqq b$, $a \neq b$ に対して，閉区間を $[a, b] = \{x;\ a \leqq x \leqq b\}$ であらわす。

(16)　いかなる n に対しても，$a_n \leqq b_n$, $a_n \leqq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leqq b_n$ である閉区間の列 $([a_n, b_n])$ は，その共通部分が空ではない。

以上の(1)から(16)までの公理を満す集合Rを実数という。

4.　$x \in R$ に対して，xの絶対値 $|x|$ を

$$|x| = \max\{x,\ -x\}$$

で定義する。xの近傍 $U(x)$ を

$$U(x) = \{y;\ |y-x| < \varepsilon\}$$

で定義する。

Rの部分集合Aに対し，いかなる $x \in A$ に対しても，$U(x) \subseteqq A$ なるUが存在するとき，Aを開集合と呼ぶ。

Aが開集合のとき $B = R \sim A = \{x \in R,\ x \notin A\}$ を閉集合と呼ぶ。

いかなる $x \in B$ に対しても，$|x| \leqq m$ である $m \in R$ が存在するとき，Aは有界であるという。

ハイネ・ボレルの定理

$B \subseteqq R$ を有界な閉集合とする。いかなる $x \in B$ に対しても，近傍 $U(x)$ が一つずつ対応しているとき，有限コの点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を適当に選べば

$$B \subseteqq U(x_1) \cup U(x_2) \cup \cdots \cup U(x_n)$$

すなわち，Bは有限コの $U(x)$ でおおわれる。この性質をBはコンパクトであるという。

5.　コンパクトである集合Bを定義域とした関数 $f\colon R \to R$ を仮定して，関数fの微分または積分を論じるのが，現代の権威あるとされている教科書の標準的な方法である。この場合次のような定理が議論の基本になる。

(1)　コンパクトである集合は有界閉集合に限る。

(2)　Bがコンパクトならば，$\max B$, $\min B$ が存在する。

(3)　連続関数 $y = f(x)$ の定義域Bがコンパクトであれば，Bの像 $f(B) = \{y;\ y = f(x),\ x \in B\}$ もコンパクトである。

(4)　連続関数 $y = f(x)$ の定義域Bがコンパクトであれば，$f(x)$ はBにおいて一様連続である。すなわち，いかなる $\varepsilon > 0$ に対しても，$x, x' \in B$, $|x - x'| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ である $\delta > 0$ が存在する。

以上のような定理が伝統的な微積分学の基礎になっている。

しかし，わが国では，以上のことを理解し，応用できる学生がほとんどいない。

6. 以上のような伝統的な微積分学の状態を改善するために，実数Rを含む超実数 R^* を定義して行く，超準解析（エイブラハム・ロビンソンが10年程前に開発した Non-Standard Analysis あるいは Infinitesimal Calculus といわれる方法）がある。

実数Rに，普通の性質を持つ無限大，無限小を加えた，実数の自然延長として超実数 R^* を定義する。

無限小 $\Delta x \in R^*$ に対して，Δx の標準部分（Standard Part）をとる $st(\Delta x)=0\in R$ なる関数 st を仮定する。これを使うと微分の定義は次のようになる。関数 $f: R^* \to R^*$ に対して，$\dfrac{df(x)}{dx}\in R$ がfの $x\in R$ での微分係数であるとは，任意の0でない無限小 $\Delta x\in R^*$ に対して，

$$\frac{df(x)}{dx}=st\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$$

であることをいう。

たとえば，

$$\frac{d(f+g)}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}$$

の証明は次のようになる。

Δx を0でない無限小，$y=f(x)+g(x)$ とする

$$\Delta y=f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)+st\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}$$

超実数 R^* は実数Rに無限小や無限大を加えたもので，実数Rと同じ計算法則にしたがうと考える。

この方法で，伝統的な微積分学の $\delta-\varepsilon$ 論法は避けられるが，R^* 超実数の性質があいまいで，すべての議論が通俗的な微積分学の方法と同じになってしまう欠点を持っている。このことは st を $\lim\limits_{\Delta x\to 0}$ におきかえればあきらかであろう。

7. 微積離形論は超準解析のようなあいまいさを持たず，また伝統的微積分のような困難さを持たない，誰にでも理解できる明確な数学である。しかも微積分学の有効性をほとんど失っていない。

関数fの定義域は整数 I または I の部分集合であるとする。ただし必要な場合には，定義域は $\{a+x;\ a\in R,\ x\in I\}$ としてもよく，また小数点3ケタまでの実数としてもよい。

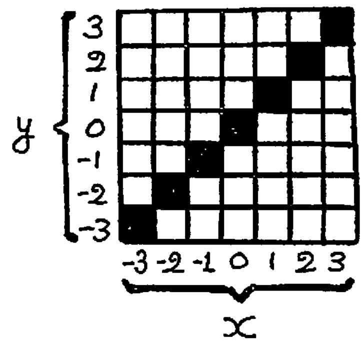

図２　$y=x$ のグラフ

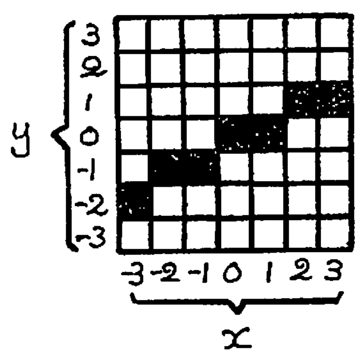

図３　$y=\frac{1}{2}x$（切捨て）の図

点または線はユークリッドのように巾のないものとはせず，一定の幅を持つとする。したがって

$$f(x)=x$$

なる恒等関数は右のような図２であらわされる。

$f(x)=\frac{1}{2}x$ の図は，もし，y の１が x の１の $\frac{1}{2}$ に等しい，すなわち，

$$1_y=\frac{1}{2}1_x \qquad 2_y=\frac{1}{2}2_y$$

とすればやはり図２であらわされる。

また，切捨てを用いれば図３のようにあらわすこともできる。切上げを使っても同様である。これは先に述べた方法と比較すると近似的な方法である。

図２，図３は連続関数の例である。連結関数は連続したグラフを持つ関数として定義することができるであろう。この場合，さきに述べたコンパクトである性質を持つので，有界閉区間（この場合は $\{-3, -2, 0, 1, 2\}=[-3, 3]$ で定義された連続関数が，定義域の点で最大値，最小値を持つこと，中間値の定理がなりたつことなど明らかである。

ただしこの方法であると，普通は連続であるといわれている曲線のグラフが不連続になることも起る。たとえば，$y=x^2$ のグラフを連続にするためには y 軸の目盛りを，0, 1, 4, 9……に変更する必要が起る。

8.　離形論では微分係数を次のように定義する。$y=f(x)$ に対して

$$dx=1$$

$$dy=df(x)=f(x+1)-f(x)$$

したがって，

$$\frac{dy}{dx}=f(x+1)-f(x)$$

これから

$$\frac{d(f+g)}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d(\lambda f)}{dx}=\lambda\frac{df}{dx} \quad \lambda\in R$$

などが導かれる。積と商の微分公式は修正を必要とする。

$$\frac{df(x)g(x)}{dx}=\frac{df(x)}{dx}g(x)+f(x+1)\frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d(f(x)/g(x))}{dx}=\frac{\dfrac{df(x)}{dx}g(x)-f(x)\dfrac{dg(x)}{dx}}{g(x)g(x+1)}$$

また，正整数 $n\geqq 1$ に対して

$$x^{(n)}=x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

を定義すれば

（1）　$\dfrac{dx^{(n)}}{dx}=nx^{(n-1)}$

がなりたつ。ただし $x^{(0)}=1$ とする。

$$x^{(-n)}=\frac{1}{(x+n)^{(n)}}$$

で定義すると，上と同様な微分公式がなりたつ。ただし

$$x^{(n)}x^{(-n)}\neq x^{(0)}$$

である。

また $y=2^x$ に対しては

$$\frac{dy}{dx}=2^x$$

がなりたつ。

$f(x)$ の $x=0$ におけるテーラー展開は次のようになる。

（2）　$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{d^kf(0)}{k!}x^{(k)}$

なりたつことなど明らかである。

n にくらべて，x が大きいときには，$x^{(n)}$ は x^n にほぼ等しいから，

$$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

がほぼなりたつ。

9.　雑形論では積分を次のように定義する。a, b が整数で，$a<b$ のとき

（1）　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\sum_{x=a}^{b-1}f(x)dx=\sum_{x=a}^{b-1}f(x)$

$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)dx+c$ とおけば次の微分積分の基本定理がなりたつ。

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

（1）の代りに

（2）　$\displaystyle\int_a^b g(x)dx=\sum_{x=a+1}^{b}g(x)$

で積分を定義したときには，微分の定義も変更して，

$$Dx=1,\quad DG(x)=G(x)-G(x-1)$$

とし，

$$G(x)=\int_a^b g(x)dx+c$$

とおけば，基本定理は次のようになる。

$$\frac{D}{Dx}\int_a^x g(x)dx=\frac{DG(x)}{Dx}=g(x)$$

$$\int_a^b g(x)dx=G(b)-G(a)$$

10.　次に，二重積分とグリーンの定理を離形論で述べよう。右の図のように，曲線 $y_1(x)$，$y_2(x)$ でかこまれた領域をDとしよう。fをDの上に定義された関数とする。

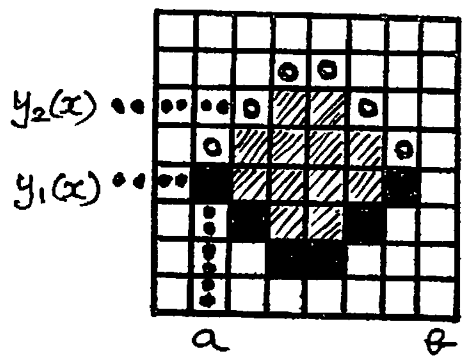

図4　領域D
$D=\{(x,y);\ a\leqq x<b,$
$y_1(x)\leqq y<y_2(x)\}$

このとき，D上のfの二重積分を次の式で定義する。

$$(1)\quad \iint_D f(x,y)dxdy=\int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx=dxdy\sum_{x=a}^{b-1}\sum_{y=y_1(x)}^{y_2(x)-1} f(x,y)$$

$$=\sum_{x=a}^{b-1}\sum_{y=y_1(x)}^{y_2(x)-1} f(x,y)$$

次に偏微分係数を微分dによって定義する。

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\left[\frac{df(x,y)}{dy}\right]_{x=\text{const}}=f(x,y+1)-f(x,y)$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\left[\frac{dg(x,y)}{dx}\right]_{x=\text{const.}}=g(x+1,y)-g(x,y)$$

図4の2曲線 $y_1(x)$, $y_2(x)$ を反時計まわりにみて，これをcであらわそう。

$$(2)\quad \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial f}{\partial y}dy\right]dx=\int_a^b\Big[f(x,y)\Big]_{y=y_1(x)}^{y_2(x)}dx$$

$$=\int_a^b[f(x,y_2(x))-f(x,y_1(x))]dx=\int_a^b f(x,y_2(x))dx-\int_a^b f(x,y_1(x))dx$$

$$=-\int_a^b f(x,y_2(x))dx-\int_a^b f(x,y_1(x))dx=-\int_c f((x,y)dx$$

9の(1)式では，$a<b$ のときの積分の定積を述べたが，積分の範囲がbからaのときは

$$\int_b^a fdx=-\int_a^b fdx=-\sum_{x=a}^{b-1}f(x)=\sum_{x=a}^{b-1}f(x)dx$$

によって，積分を定義すれば，上の(2)の3番目から4番目の式への変形が可能である。

同様にして

$$\iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dxdy = \int_c g dy$$

がなりたつ。これと(2)とを合計すると，グリーンの定理がなりたつ。すなわち

$$(3)\quad \int_c (fdx+gdy) = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy$$

11. 三重積分の雛形論を述べよう。

$$V_1 = \{(x, y, z);\ 0 \leqq x < a,\ 0 \leqq y < b,\ 0 \leqq z < c\}$$

のときには，$dv = dxdydz$ として

$$(1)\quad \iiint_{V_1} fdxdydz = \iiint_{V_1} fdv = \sum_{x=0}^{a-1} \sum_{y=0}^{b-1} \sum_{z=0}^{c-1} f(x, y, z)$$

$$V_2 = \{(x, y, z);\ 0 \leqq x < a,\ 0 \leqq y < b(x),\ 0 \leqq z < c(x, y)\}$$

のときは

$$(2)\quad \iiint_{V_2} fdxdydz = \iiint_{V_2} fdv = \sum_{x=0}^{a-1} \sum_{y=0}^{b(x)-1} \sum_{z=0}^{c(x,y)-1} f(x, y, z)$$

$$V = \{(x, y, z);\ 0 \leqq x < a,\ y_1(x) \leqq y < y_2(x),\ z_1(x, y) \leqq z \leqq z_2(x, y)\}$$

のときには，(2)から

$$(3)\quad \iiint_V fdxdydz = \iiint_V fdv = \sum_{x=0}^{a-1} \sum_{y=y_1(x)}^{y_2(x)-1} \sum_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)-1} f(x, y, z)$$

$$D = \{(x, y);\ (x, y, z) \in V\}$$

のとき

$$(4)\quad \iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dxdydz = \sum_{x=0}^{a-1} \sum_{y=y_1(x)}^{y_2(x)-1} \sum_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)-1} \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= \sum_{x=0}^{a-1} \sum_{y=y_1(x)}^{y_2(x)-1} [f(x, y, z_2(x, y)) - f(x, y, z_1(x, y))]$$

$$= \iint_D f(x, y, z_2(x, y)) dxdy - \iint_D f(x, y, z_1(x, y)) dxdy$$

12. 次に面積分の雛形論を述べよう。i, j, k を正規直交の右手系とする。

$$\vec{s} = \{p;\ p = xi + yj + zk,\ z = g(x, y)\}$$

$$D = \{(x, y);\ (x, y, z) \in \vec{s}\}$$

$\vec{s}$ は曲面をあらわし，曲面 $\vec{s}$ の x 軸と y 軸を含む平面への射影を D とする。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = i + k\frac{\partial g}{\partial x} = i + kg_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = j + k\frac{\partial g}{\partial y} = j + kg_y$$

のとき，これらの外積は

$$\frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{\partial p}{\partial y}=(i+kg_x)\times(j+kg_y)=k-ig_x-jg_y$$

$$G(x,y)=\sqrt{1+[g_x(x,y)]^2+[g_y(x,y)]^2}$$

としたとき

（1）　曲面$\vec{s}$の面積$=s=\iint_D\left|\frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{\partial p}{\partial y}\right|dxdy=\iint_D\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dxdy$

$$=\sum_{a}^{b-1}\sum_{y_1(x)}^{y_2(x)-1}G(x,y)$$

ただし

$$D=\{(x,y);\ a\leqq x<b,\ \ y_1(x)\leqq y<y_2(x)\}$$

とする。

曲面$\vec{s}$の上に，スカラ場 $f(x,y)$ があたえられたときの，関数 f の $\vec{s}$ での面積分は

（2）　$\int_s fds=\iint_D f(x,y)\left|\frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{\partial p}{\partial y}\right|dxdy=\iint_D f(x,y)G(x,y)dxdy$

$$=\sum_{x=a}^{b-1}\sum_{y=y_1(x)}^{y_2(x)-1}f(x,y)G(x,y)$$

であたえられる。

またベクトル場

$$A(x,y,z)=a(x,y,z)i+b(x,y,z)j+c(x,y,z)k$$

があたえられたときはベクトルAの$\vec{s}$上での面積分は次のようになる。

$\vec{s}$の法線ベクトルをNとすると

$$N=\frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{\partial p}{\partial y}\Big/\left|\frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{\partial p}{\partial y}\right|=\frac{k-ig_x-jg_y}{G}$$

$$ds=\left|\frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{\partial p}{\partial y}\right|dxdy=Gdxdy$$

$$\vec{ds}=\frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{\partial p}{\partial y}dxdy=(k-ig_x-jg_y)dxdy$$

（2）　Aの$\vec{s}$上の面積分$=\int_s A\vec{ds}=\int_s A\cdot Nds=\iint_D(-ag_x-bg_y+c)dxdy$

$$=\sum_{x=a}^{b-1}\sum_{y=y_1(x)}^{y_2(x)-1}[-a(x,y,g)g_x-b(x,y,g)g_y+c(x,y,g)]$$

であたえられる。

発散定理やストークスの定理も上と同様な方法で導くことができる。

参 考 文 献

田中穣二：Integration on H-Field. 日本数学会，統計数学分科会アブストラクト，p. 25-26，1981.

〃　　：数のモデルと超準解析の考え方。HITAC ユーザ研究会，第28回科学計算分科会，p. 1-8，1979.

J. Dieudonné: Foundations of Modern Analysis. Academic Press 1969.

R.H. Hamming: Numerical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill 1962.

弥永昌吉：現代数学の基礎概念。弘文堂，1962.

高木貞治：解析概論。岩波書店 1961.