# 相対化された計算時間問題の複雑性について

TANAKA, Hisao / 田中, 尚夫

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
19
(開始ページ / Start Page)
63
(終了ページ / End Page)
72
(発行年 / Year)
1983-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004092

# 相対化された計算時間問題の複雑性について

田 中 尚 夫*

# On Time Bounded Oracle Turing Machines

Hisao TANAKA

**Abstract**

Various time-bounded oracle Turing machines are considered and we shall show that Baker-Gill-Solovay's results can be extended to other classes of languages. Here we consider the class DELT (resp. NELT) of languages accepted by exponential-logarithmic time-bounded oracle deterministic (resp. nondeterministic) Turning machines and the class DEXT(resp. NEXT)of languages accepted by exponential time-bounded oracle deterministic (resp. nondeterministic) Turing machines. For example, among other things, we show that there exist oracles $A$, $B$, $C$ and $D$ such that (1) $\mathrm{DELT}^A=\mathrm{NELT}^A$, (2) $\mathrm{DELT}^B\neq\mathrm{NELT}^B$, (3) $\mathrm{DEXT}^C=\mathrm{NEXT}^C$ and (4) $\mathrm{DEXT}^D\neq\mathrm{NEXT}^D$. Exact definitions of terminology and notation will be stated in Introduction of this paper.

計算の複雑性の理論（計算量の理論）における最も重要な問題の1つは“非決定性多項式時間限定チューリング計算機で認識される言語が決定性多項式時間限定チューリング計算機で認識されるか”という問題である。決定性多項式時間限定チューリング計算機で認識される言語のクラスをPで表し，非決定性多項式時間限定チューリング計算機で認識される言語のクラスをNPで表すと，上の問題は

（1）　$$\mathrm{P}=?\ \mathrm{NP}$$

ということになる。これは大変困難な問題で今日に至るも未解決である。他方，帰納的関数論における有用な概念の1つに“相対化”と呼ばれるものがある。チューリング計算機 $M$ と oracle と呼ばれる集合 $A$ が与えられ，入力 $x$ 上で $M$ の計算が始まったとする。この計算中，特別な指令（質問指令という）に出合うと $M$ は oracle $A$ に質問テープ上に書かれている記号列が $A$ に属するか否かを問う。Yes という答を教えられるならば $M$ は肯定状態と呼ばれる内部状態に移り，No という答が返されれば否定状態と呼ばれる内部状態に移る。このような計算を oracle $A$ による相対化計算という。この概念は計算量問題にも適用できる。oracle $A$ を用いた決定性（resp. 非決定性）多項式時間限定チューリング計算機で認識される言語のクラスを $\mathrm{P}^A$ (resp. $\mathrm{NP}^A$) で表す。このとき若干の人々によって(1)の相対化は肯定も否定も可能であることが示さ

* 電気工学科計測制御専攻

れた（例えば文献[1]）。すなわち

(2) $$P^A = NP^A$$

(3) $$P^B \neq NP^B$$

なる oracle $A$, $B$ が存在する。((2), (3)以外にも興味ある結果が知られている。) (2), (3) ははからずも(1)の解決が極めて困難であることを証拠だてることとなった。

さて，決定性と非決定性の相違問題は多項式時間限定問題に限るものではない。例えば多項式よりやや急増大な**指数対数時間限定**や，より急激な**指数時間限定**についても，それらの決定性，非決定性間の相違が明らかにされていない。本論文ではこれらの問題についてその相対化を論ずる。主要結果は，決定性指数対数時間限定チューリング計算機で認識される言語のクラスと非決定性のそれによって認識される言語のクラスが一致するという命題の相対化版が成立するような oracle の存在，成立しないような oracle の存在を示すことである。諸結果の定式化は諸定義を必要とするので，準備事項を述べた後に掲げる。

## §1. 準　　備

$\omega$は自然数全体の集合を，$\Sigma$ は有限アルファベットを表わす。ここでは $\Sigma=\{0, 1\}$ とする。$\Sigma^*$ は 0, 1 から成る有限列 (($\Sigma$上の) 語と呼ぶ) 全体の集合を表し，$\Sigma^*$ の部分集合を言語という。言語$L$に対しその補集合を $\bar{L}$ で表す：$\bar{L}=\Sigma^*-L$。語$x$に対しその長さを $|x|$ で表す。計算機のモデルとして，多テープチューリング計算機を用いる。チューリング計算機をTMと略記する。特に決定性チューリング計算機を DTM，非決定性チューリング計算機を NTM と略記する。TM $T$ と $f: \omega\rightarrow\omega$ とが与えられているとき，長さ$n$の任意の入力 $x$ ($|x|=n$) に対し$T$の$x$上での計算が高々 $f(n)$ ステップで停止し，$x$を受理するか否かが決定されるならば，$T$は **$f$-時間限定** TM であるという。$T$ が DTM なら $f$-時間限定 DTM, NTM なら $f$-時間限定 NTM という。後者の場合，$x$上での$T$の計算は幾通りもあるが，どの計算も高々 $f(|x|)$ ステップで停止するものとする。$T$が**多項式時間限定** DTM (resp. NTM) であるとは，ある多項式$p$が存在して$T$が $p$-時間限定 DTM (resp. NTM) であることである。$f$-テープ限定 TM は，上の定義でステップ数の代りに$x$上の計算で使用されるテープのコマ数が高々 $f(|x|)$ 個である場合である。

TM $T$ が言語$L$を認識する (受理するともいう) とは，任意の語$x$に対し

$$x\in L \Longleftrightarrow T\text{は}x\text{を受理する}$$

が成り立つことである。何かの $f$-時間限定 DTM (resp. NTM) で認識される言語全体のクラスを DTIME$(f)$ (resp. NTIME$(f)$) で表す。テープ限定の対応物として DSPACE$(f)$, NSPACE$(f)$ が同様に定義される。しかし後者は本論文には現れないであろう。与えられた $f$: $\omega\rightarrow\omega$ に対し，$f(n)$ は引数$n$に対する$f$の値である。このとき $f=\lambda n f(n)$ で表す。すなわち

$\lambda$-記法は $f(n)$ を $n$ の関数としてとらえる明確な記法である。例えば $\lambda n[n^5]$ は引数 $n$ に対する関数値が $n^5$ であるような関数を表す。何かの多項式時間限定 DTM（resp. NTM）で認識される言語全体のクラスを P（resp. NP）で表す。したがって

$$\mathrm{P}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{DTIME}(\lambda n[n^i]),\quad \mathrm{NP}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{NTIME}(\lambda n[n^i])$$

である。

本論文では次のような言語クラスを考える。

$$\mathrm{DELT}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{DTIME}(\lambda n[n^{(\log n)^i}]),\quad \mathrm{NELT}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{NTIME}(\lambda n[n^{(\log n)^i}])$$

これらは，Deterministic（resp. Nondeterministic）Exponential-Logarithmic Time 限定の意である。

$$\mathrm{DELT}_i=\bigcup_{c=1}^{\infty}\mathrm{DTIME}(\lambda n[n^{c(\log n)^i}])$$

とおくとき，

$$\mathrm{DELT}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{DELT}_i$$

である。$\mathrm{NELT}_i$ を同様に定義して NELT に対し同様な表示が得られる。更に

$$\mathrm{DEXT}=\bigcup_{c=1}^{\infty}\mathrm{DTIME}(\lambda n[2^{cn}]),\quad \mathrm{NEXT}=\bigcup_{c=1}^{\infty}\mathrm{NTIME}(\lambda n[2^{cn}])$$

と定義する。これらは Deterministic（resp. Nondeterministic）Exponential Time 限定の意である。P=NP か否かを知ることが困難であると同様に，DELT=NELT か否か，DEXT=NEXT であるか否かを知ることも困難な問題である（例えば［3］を参照)。よってこれらの問題の相対化版を論ずる。

Oracle TM（OTM と略記する）とは，質問テープと呼ばれる特別なテープと，質問状態，肯定状態，否定状態と呼ばれる3つの特別な内部状態を含むチューリング計算機である。（TM は OTM の特別な場合と考える。）$A$を与えられた言語とする。OTM $T$ に oracle として$A$が指定されるとき，$T^A$ と書く。$T^A$ の働きは次のようである。入力$x$が与えられて $T^A$ の計算が始まる。$T^A$ の内部状態が質問状態になったとき，質問テープ上に書かれている語$w$が$A$に入るかどうかを尋ねる。$w\in A$ なら $T^A$ の内部状態は肯定状態に移り，$w\notin A$ なら否定状態に移って計算を続ける。$T$が決定性であるか非決定性であるかにしたがって ODTM, ONTM という。OTM は oracle とは独立に定義される概念で，OTM $T$ と oracles $A, B$ に対し，$T^A$ と $T^B$ は一般に異なる働きをする。

与えられた$f$: $\omega\to\omega$ と言語$A$とに対し，oracle $A$ をもつ $f$-時間限定 ODTM（resp. ONTM）によって認識される言語全体のクラスを

$$\mathrm{DTIME}^A(f)\quad(\text{resp. }\mathrm{NTIME}^A(f))$$

で表す。これらを用いて，$P^A$, $NP^A$, $DELT^A$, $NELT^A$, $DEXT^A$, $NEXT^A$ 等のクラスが前と同様に定義される。序論で述べたように［1］は $P^A=NP^A$, $P^B\neq NP^B$ なる oracle $A, B$ が存在することを証明した。本論文では DELT と NELT, DEXT と NEXT の関係に関し同様な結果を証明する。すなわち

**定理 I.** $DELT^A=NELT^A$ なる oracle $A$ が存在する。

**定理 II.** $DELT^B\neq NELT^B$ なる oracle $B$ が存在する。

**定理 III.** $NELT^C$ が補集合をとる演算（補演算と略称する）の下で閉じていないような oracle $C$ が存在する。

**定理 IV.** $DELT^D\neq NELT^D$ であるが，$NELT^D$ が補演算の下で閉じているような oracle $D$ が存在する。

これらは丁度［1］の Theorems 1, 3, 4, 5 の対応物である。同様にして

**定理 V.** $DEXT^E=NEXT^E$ なる oracle $E$ が存在する。

**定理 VI.** $DEXT^F\neq NEXT^F$ なる oracle $F$ が存在する。

この他のクラスについても同様な結果が得られる。例えば

$$DEPT=DTIME(2^P)=\bigcup\{DTIME(\lambda n[2^{n^l}])\mid l\in\omega\}$$

$$NEPT=NTIME(2^P)=\bigcup\{NTIME(\lambda n[2^{n^l}])\mid l\in\omega\}$$

とおき，oracle $X$ に関する相対化を $DEPT^X$, $NEPT^X$ で表す。明らかに

$$DEPT\subseteq NEPT,\quad DEPT^X\subseteq NEPT^X.$$

**定理 VII.** $DEPT^G=NEPT^G$ なる oracle $G$ が存在する。

**定理 VIII.** $NEPT^H-DEPT^H\neq\phi$ なる oracle $H$ が存在する。

**定理 IX.** $DEPT^Z-NP^Z\neq\phi$ なる oracle $Z$ が存在する。

これらの諸結果の証明の基本的アイデアは［1］に負う。なお，$NEXT^Y$ が補演算の下で閉じていないような oracle $Y$ が存在するか否かはわかっていない1)。

## §2. DELT＝? NELT 問題の相対化

本節では定理 I，II を証明する。$\mathscr{R}=\{f\mid f\colon \omega\to\omega\}$ とし，$\mathscr{F}\subseteq\mathscr{R}$ とする。$\mathscr{F}$ に属すある関数 $f$ に関する $f$-時間限定 TM を $\mathscr{F}$-時間限定 TM と略称する。言語のクラス $\mathscr{C}$ と関数のクラス $\mathscr{F}$ とが与えられているとき，言語 $L$ が $\mathscr{C}$ において $\mathscr{F}$-完全であるとは，$L\in\mathscr{C}$ であって，任意の $X\in\mathscr{C}$ に対し $X\leq^{\mathscr{F}} L$ が成立することである。ここに $X\leq^{\mathscr{F}} L$ とは，ある $\mathscr{F}$-時間限定 DTM により計算される関数 $g\colon \Sigma^*\to\Sigma^*$ が存在して

$$x\in X \Longleftrightarrow g(x)\in L$$

が成り立つことである。このとき $X$ は $L$ に $\mathscr{F}$-還元可能であるという。

1) Added in proof. かかる $Y$ が存在することが証明できる

**補題2.1.** 関数のクラス

$$\mathscr{G}_0=\{\lambda n[n^{c(\log n)^k}] \mid c,\ k\in\omega\}$$

は合成演算の下で閉じている。□

証明は容易である。そこで $\mathscr{G}_0$-時間限定 ODTM 達，$\mathscr{G}_0$-時間限定 ONTM 達を夫々エフェクティーブに並べて

$$\{DM_i \mid i\in\omega\},\quad \{NM_i \mid i\in\omega\}$$

とする。一般性を失うことなく各 $DM_i$, $NM_i$ は $f_i$-時間限定 TM であるとしてよい。ここに

(1)　$$f_i(n)=n^{a_i(\log n)^{a_i}}\quad(a_0<a_1<a_2<\cdots)$$

である。また oracle $X$ に対し

$$K(X)=\{0^i\,1\,x\,1\,0^n \mid NM_i^X \text{ は } n \text{ ステップ未満で } x \text{ を受理する}\}$$

と定義する (cf. [1])。明らかに $K(X)\in \mathrm{NP}^X$ である。したがって $K(X)$ はもちろん $\mathrm{NELT}^X$ に属する。

**補題2.2.** $K(X)$ は $\mathrm{NELT}^X$ において $\mathscr{G}_0$-完全である。したがって $\mathrm{NELT}^X\subseteq\mathrm{DELT}^{K(X)}$。

**証明** 任意に言語 $L\in\mathrm{NELT}^X$ をとる。$L$ は $NM_i^X$ によって認識されるとする。このとき

$$g(x)=0^i\,1\,x\,1\,0^n,\quad \text{ここに}\quad n=f_i(|x|)$$

と定義すれば，明白に $g(x)$はある $\mathscr{G}_0$-時間限定 DTM によって計算できる関数であり

$$x\in L \Longleftrightarrow g(x)\in K(X)$$

が成り立つ。またこの関係は $L\in\mathrm{DELT}^{K(X)}$ であることを意味する。□

**補題2.3.** $\mathrm{DELT}^X=\mathrm{NELT}^X \Longleftrightarrow K(X)\in\mathrm{DELT}^X$.

**証明** $K(X)\in\mathrm{NELT}^X$ であるから ($\Longrightarrow$) は明白。逆に，$K(X)\in\mathrm{DELT}^X$ とせよ。そのとき $\mathrm{DELT}^{K(X)}\subseteq\mathrm{DELT}^X$ である。なぜなら，仮定により $K(X)$ はある $DM_i^X$ によって認識される。任意に $Y\in\mathrm{DELT}^{K(X)}$ をとると，$Y$ はある $DM_j^{K(X)}$ によって認識される。この2つの計算機を合成すると，補題2.1によって，$Y$を認識するある $DM_k^X$ が得られる。ゆえに $Y\in\mathrm{DELT}^X$ である。よって $\mathrm{DELT}^{K(X)}\subseteq\mathrm{DELT}^X$。さて前補題により $\mathrm{NELT}^X\subseteq\mathrm{DELT}^{K(X)}$ であるから $\mathrm{NELT}^X\subseteq\mathrm{DELT}^X$。したがって $\mathrm{DELT}^X=\mathrm{NELT}^X$ が成り立つ。□

**定理2.4.** (＝定理 I) $\mathrm{DELT}^A=\mathrm{NELT}^A$ なる oracle $A$ が存在する。

**証明** $A=\{0^i\,1\,x\,1\,0^n \mid NM_i^A \text{ は } n \text{ ステップ未満で } x \text{ を受理する}\}$

なる式は言語$A$を帰納的に定義している (cf. [1])。この$A$に対し明らかに $K(A)=A$ となる。$A\in\mathrm{DELT}^A$ であるから $K(A)\in\mathrm{DELT}^A$ となり，したがって補題2.3により $\mathrm{DELT}^A=\mathrm{NELT}^A$ が成り立つ。□

次に定理 II の証明を行う。oracle $X$ に対し

$$L(X)=\{0^i \mid \exists x[|x|=i\wedge x\in X]\}$$

と定義する ([2])。明らかに

(2)
$$L(X)\in \mathrm{NP}^X$$
である。さて定理を証明するためにすでに定義したリスト $\{DM_i|i\in\omega\}$ を用いることもできるが，［2］の方法にしたがってここでは時間限定を考慮しない DTM を用い，計算途上でステップ数を限定することにする。そこで ODTM 全体をエフェクティーブに並べて

$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ \cdots,\ T_i,\ \cdots$$

とする。ただしこのリストには各 ODTM が無限回現れるようにしておく。

**定理2.5.**　$\mathrm{NP}^B-\mathrm{DELT}^B\neq\phi$ なる oracle $B$ が存在する。

**証明**　段階 $i\in\omega$ にしたがって$B$を構成する。$B(i)$ を段階 $i$ より前に$B$の中に取り込まれた語の集合とする。$B(0)=\phi$ とし，各 $B(i)$ は有限集合でしかも長さ$\geq i$の語は含んでいないように構成する。

段階 $i$. 入力 $0^i$ 上で高々 $2^{\sqrt{i}}$ ステップだけ $T_i^{B(i)}$ をまねる。その計算中 $T_i$ が $i$ 以上の長さの語を oracle に質問するときは，そのような語すべてを禁止リストへ入れる。禁止リストに入っている語は決して$B$の中へ取込まない。$0^i$ 上で $T_i^{B(i)}$ が $2^{\sqrt{i}}$ ステップ以内で停止ししかも $0^i$ を拒否するならば，長さ $i$ の語のうち禁止リスト中にない語を1つとって $B(i)$ へ加え $B(i+1)$ とする。ただし長さ $i$ のすべての語が既に禁止リストに含まれているときは $B(i+1)=B(i)$ とする。またもし $T_i^{B(i)}$ が $2^{\sqrt{i}}$ ステップ以内で $0^i$ を拒否しないならば（停止するかどうかには無関係に）$B(i+1)=B(i)$ とする。これで段階 $i$ の構成は終り次の段階 $i+1$ へ進む。

$$B=\bigcup_{i=1}^{\infty}B(i)$$

とする。段階 $j(\leq i)$ で禁止リストに載せられる語は高々 $2^{\sqrt{j}}$ 個であるから，段階 $i$ までに禁止リストに入れられる語の個数は

$$\sum_{j=0}^{i}2^{\sqrt{j}}\leq i\cdot 2^{\sqrt{i}}$$

を超えない。よってもし $2^i>i\cdot 2^{\sqrt{i}}$ ならば，すなわち $i>\sqrt{i}+\log i$ ならば，長さ $i$ の語で禁止リストに含まれないものが必ず存在する。

この$B$に対し $L(B)\notin\mathrm{DELT}^B$ である。なぜなら，$L(B)\in\mathrm{DELT}^B$ と仮定すると，$L(B)$ を認識する $f$-時間限定 ODTM $T_k^B$ が存在する。ここに $f(n)=n^{c(\log n)^l}$ とする。$c,\ l$ は定数である。$i$を十分大きくとって

$$2^i>i\cdot 2^{\sqrt{i}},\qquad 2^{\sqrt{i}}>i^{c(\log i)^l},\qquad T_i=T_k$$

となるようにできる。そこで段階 $i$ を考える。もし $T_i^B$ が $0^i$ を受理するならば，$0^i\in L(B)$ であるから$B$は長さ $i$ の語を含む。したがって$B$の構成から，$T_i^{B(i)}$ は（$2^{\sqrt{i}}$ ステップ以内で）$0^i$ を拒否する。$T_i^{B(i)}$ と $T_i^B$ とは $0^i$ 上で同一の計算を行うから，$T_i^B$ も $0^i$ を拒否する。これは不合理。よって $T_i^B$ は $0^i$ を拒否しなければならない。ゆえに $0^i\notin L(B)$。したがって$B$には長さ $i$ の語がないので，$T_i^{B(i)}$ は $2^{\sqrt{i}}$ ステップ以内では $0^i$ を拒否しない。この場合も $T_i^{B(i)}$ と $T_i^B$

は $0^i$ 上で同一の計算を行うから，$T_i{}^B$ も $2^{\sqrt{i}}$ ステップ以内では $0^i$ を拒否できない。しかし $i$ の選び方から $2^i>f(i)$ であるので $T_i{}^B$ は $0^i$ 上ですでに停止している。したがってそれは $0^i$ を受理していなければならない。これは不合理である。ゆえに $L(B)\notin \mathrm{DELT}^B$。(2)により $L(B)\in \mathrm{NP}^B$ であるから，これで定理が証明された。□

**系2.6.**（＝定理Ⅲ）$\mathrm{DELT}^B\neq\mathrm{NELT}^B$ なる oracle $B$ が存在する。

**証明**　$\mathrm{NP}^B\subseteq\mathrm{NELT}^B$ より明らか。□

以上によって

(3)
$$\mathrm{DELT}=?\ \mathrm{NELT}$$

問題の相対化は肯定も否定も可能であることが示された。したがってこのことは(3)の解決が大変困難な問題であることを示唆している。

## §3.　補演算に関する結果

本節では補演算に関し閉じているかどうかという問題を論ずる。

**定理3.1.**（＝定理Ⅲ）$\mathrm{NELT}^C$ が補演算の下で閉じていないような oracle $C$ が存在する。

**証明**　段階 $i$ より前に $C$ の中に取り込まれた語の集合を $C(i)$ とし，$C(0)=\phi$ とする。また $n_{-1}=0$ とおく。

段階 $i$. $n_i$ を十分大きくとって

(1)　$n_i>n_{i-1}$, $n_i>f_{i-1}(n_{i-1})$, $f_i(n_i)<2^{n_i}$

となるようにできる。ここに $f_i$ は前節(1)で与えられた関数である。$NM_i{}^{C(i)}$ を入力 $x=0^{n_i}$ 上でまねする。$NM_i{}^{C(i)}$ が $x$ を受理するなら，1つの受理計算を選び，その計算中 oracle に質問されない長さ $n_i$ の語を1つ取り $C(i)$ へ加えて $C(i+1)$ を作る。(1)によりかかる語は必ず存在する。もし $NM_i{}^{C(i)}$ が $x$ を拒否するなら，$C(i+1)=C(i)$ とする。段階 $i$ 終り。

$$C=\bigcup_{i=0}^{\infty}C(i)$$

とする。段階 $i$ で入力 $x=0^{n_i}$ 上の $NM_i{}^{C(i)}$ による計算は $NM_i{}^C$ の計算と一致する。なぜならその計算中質問される語の長さは高々 $f_i(n_i)$ であるから段階 $i$ 以後に $C$ へ加えられる語（それは長さ $\geq n_{i+1}>f_i(n_i)$ である）が今の計算で質問されることはないからである。（段階 $i$ で新しく $C$へ取り込まれうる語は質問されない語であるから差支えない。）よって

$$\begin{aligned}NM_i{}^C \text{ が } 0^{n_i} \text{ を受理する} &\Longleftrightarrow NM_i{}^{C(i)} \text{ が } 0^{n_i} \text{ を受理する}\\ &\Longleftrightarrow C \text{ は長さ } n_i \text{ の語を含む}\\ &\Longleftrightarrow 0^{n_i}\in L(C) \Longleftrightarrow 0^{n_i}\notin\overline{L(C)}.\end{aligned}$$

$i$ は任意でよいから，このことは，どんな $i$ についても $NM_i{}^C$ が $\overline{L(C)}$ を受理しないことを意味する。ゆえに $\overline{L(C)}\notin\mathrm{NELT}^D$。明らかに $L(C)\in\mathrm{NP}^C\subseteq\mathrm{NELT}^C$ であるから，$\mathrm{NELT}^C$ は補演

算の下で閉じていない。□

$\mathrm{DELT}^C$ は補演算の下で閉じているから，定理 3.1 から $\mathrm{DELT}^C \neq \mathrm{NELT}^C$ も言える。

**定理3.2.**（＝定理Ⅳ） $\mathrm{DELT}^D \neq \mathrm{NELT}^D$ であるが，$\mathrm{NELT}^D$ が補演算の下で閉じているような oracle $D$ が存在する。□

証明のために一つの補題を導く。前節で定義した $K(X)$ に対し次のことが成り立つ：

**補題3.3.** $\mathrm{NELT}^X$ が補演算の下で閉じているための必要十分条件は

$$\overline{K(X)} \in \mathrm{NELT}^X$$

が成り立つことである。

**証明** 補題 2.2 により $K(X)$ は $\mathrm{NELT}^X$-完全である。よって $\overline{K(X)}$ は co-$\mathrm{NELT}^X$-完全である。このことと補題 2.1 とから $\overline{K(X)} \in \mathrm{NELT}^X$ ならば $\mathrm{NELT}^X$ が補演算の下で閉じていることが従う。詳細は略す。□

**定理 3.2 の証明** $L(D) \in \mathrm{NELT}^D - \mathrm{DELT}^D$ であって，$x \in \overline{K(D)} \Longleftrightarrow x$ は $|y|=2|x|$ なる $D$ の中のある語 $y$ の始切片である」という条件が成り立つように oracle $D$ を作る。このとき明白に $\overline{K(D)} \in \mathrm{NP}^D \subseteq \mathrm{NELT}^D$ である。$D$の構成は［1］の Theorem 5 におけるものと殆んど同様であるから，詳細は省略する。□

## §4. 指数時間限定に関する問題

本節では

$$\mathscr{G}_1 = \{\lambda n[2^{cn}] \mid c \in \omega\}$$

なる関数のクラスを考える。$\mathscr{G}_1$-時間限定 ODTM 達全体，ONTM 達全体を夫々エフェクティーブに枚挙して

$$\{DE_i \mid i \in \omega\}, \quad \{NE_i \mid i \in \omega\}$$

とする。各 $DE_i$, $NE_i$ は $g_i$-時間限定であるとしてよい。ここに

$$g_i(n) = 2^{c_i n} \quad (c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_i < \cdots)$$

である。

**定理4.1.**（＝定理Ⅴ） $\mathrm{DEXT}^E = \mathrm{NEXT}^E$ なる oracle $E$ が存在する。

**証明** 定理 2.4 で定義した$A$と同様にして次式により言語$E$を作る：

$$E = \{0^i 1 x 1 0^n \mid NE_i^E \text{ は } n \text{ ステップ未満で } x \text{ を受理する}\}$$

$K(X)$ に類似して

$$J(X) = \{0^i 1 x 1 0^n \mid NE_i^X \text{ は } n \text{ ステップ未満で } x \text{ を受理する}\}$$

と定義すれば，$J(E)=E$ となる。$E \in \mathrm{P}^E$ であるから，$J(E) \in \mathrm{P}^E$。補題 2.2 の証明と同様にして，$J(X)$ が $\mathrm{NEXT}^X$ において $\mathscr{G}_1$-完全であることが分かる。よって $J(E)$ は $\mathrm{NEXT}^E$ において $\mathscr{G}_1$-完全である。ゆえに $\mathrm{NEXT}^E \subseteq \mathrm{DEXT}^{J(E)} = \mathrm{DEXT}^E$ である。なぜなら，多項式の引数

へ $\mathscr{G}_1$ の関数を代入したものはやはり $\mathscr{G}_1$ に属する関数であるからである。□

**定理4.2.** (＝定理Ⅵ) $\mathrm{DEXT}^F \neq \mathrm{NEXT}^F$ なる oracle $F$ が存在する。

**証明** 定理2.5の証明に類似する。今度は $F$ は長さが $i^2$ という形の語のみを含むように構成される。段階 $i$ より前に $F$ の中に取り込まれた語の集合を $F(i)$ とし，$F(0)=\phi$ とする。

段階 $i$. $0^i$ 上で $T_i^{F(i)}$ のシミュレーションを $2^{i\log i}$ ステップだけ続ける。その間に $T_i^{F(i)}$ が $i^2$ 以上の長さの語を oracle に質問するなら，それらの語すべてを禁止リストへ入れる。もし $T_i^{F(i)}$ がその間に停止して $0^i$ を拒否すれば，長さ $i^2$ の語で禁止リストにないものを1つ選んで $F(i)$ へ加え $F(i+1)$ とする。(もし長さ $i^2$ のかかる語がないなら $F(i+1)=F(i)$ とする。) また $T_i^{F(i)}$ がそのシミュレーション中 $0^i$ を拒否しないなら，$F(i+1)=F(i)$ とする。段階 $i$ の構成終り。

$$F=\bigcup_{i=0}^{\infty} F(i)$$

とする。定理2.5の証明と同様にして，段階 $i$ までに禁止される語の個数は

$$\sum_{j=1}^{i} 2^{j\log j} \leq i\cdot 2^{i\log i}$$

を超えない。よってもし $2^{i^2}>i\cdot 2^{i\log i}$ すなわち $i^2>(i+1)\log i$ ならば，長さ $i^2$ の語で禁止リストにないものが必ず存在する。

$$L_2(X)=\{0^i \mid X \text{ は長さ } i^2 \text{ の語を含む}\}$$

と定義すると，$L_2(F)\in \mathrm{NP}^F$ である。前と同様にして $L_2(F)\notin \mathrm{DEXT}^F$ が導かれる。その際，与えられた ODTM $T_k$ と定数 $c$ とに対し，$i$ を十分大きくとって

$$2^{i^2}>i\cdot 2^{i\log i},\quad 2^{i\log i}>2^{ci},\quad T_i=T_k$$

ならしめうるという事実が利用される。かくて $L_2(F)\in \mathrm{NP}^F-\mathrm{DEXT}^F$，したがって $L_2(F)\in \mathrm{NEXT}^F-\mathrm{DEXT}^F$ であることが示された。□

**定理4.3.** (＝定理Ⅶ) $\mathrm{DEPT}^G=\mathrm{NEPT}^G$ なる oracle $G$ が存在する。

**証明** 定理4.1の証明にならう。

$$\mathscr{G}_2=\{\lambda n[2^{n^l}] \mid l\in\omega\}$$

なる関数のクラスを考え，$\mathscr{G}_2$-時間限定 ODTM 全体，ONTM 全体を夫々エフェクティーブに並べて

$$\{DEP_i \mid i\in\omega\},\quad \{NEP_i \mid i\in\omega\}$$

とする。$G=\{0^i 1 x 1 0^n \mid NEP_i^G$ は $n$ ステップ未満で $x$ を受理する$\}$ なる言語 $G$ をとる。$J_1(X)=\{0^i 1 x 1 0^n \mid NEP_i^X$ は $n$ ステップ未満で $x$ を受理する$\}$ とすれば，$J_1(G)=G$ であり，したがって $J_1(G)\in \mathrm{P}^G$ となる。$J_1(X)$ が $\mathrm{NEPT}^X$ において $\mathscr{G}_2$-完全であること，多項式の引数へ $\mathscr{G}_2$ の関数を代入して得られる関数は再び $\mathscr{G}_2$ に属することが示されるから，前と同様な論法に

よって $\mathrm{NEPT}^G \subseteq \mathrm{DEPT}^G$ が導かれる。□

**定理4.4.** (=定理Ⅷ)　$\mathrm{NEPT}^H - \mathrm{DEPT}^H \neq \phi$ なる oracle $H$ が存在する。

**証明**　定理 4.2 の証明にならう。段階 $i$ より前に $H$ の中へ取り込まれた語の集合を $H(i)$ とし，$H(0)=\phi$ とする。今度は $H$ は長さが $2^{i^i}$ という形の語だけを含むようにする。段階 $i$ で，入力 $0^i$ 上で $T_i^{H(i)}$ を走らせ，その計算を $2^{2^i}$ ステップだけ行う。その際 $T_i^{H(i)}$ が長さ $\geq 2^{i^i}$ の語を質問するならば，かかる語すべてを禁止リストへ入れる。このシミュレーション中に計算が終って $0^i$ を拒否すれば長さ $2^{i^i}$ の語で禁止リストに入ってない語を（もしあれば）1つとって $H(i)$ へ加え $H(i+1)$ とする。そうでなければ $H(i+1)=H(i)$ とする。$H=\bigcup_{i=0}^{\infty} H(i)$ とおく。前と同様にして（しかし今度は $i \geq 2$ であれば）禁止リストにない長さ $2^{i^i}$ の語が必ずあることがわかる。

$$L_3(H)=\{0^i \mid H \text{ は長さ } 2^{i^i} \text{ の語を含む}\}$$

とする。明らかに $L_3(H) \in \mathrm{NEPT}^H$ である。前と同様な論法で $L_3(H) \notin \mathrm{DEPT}^H$ であることが示される。その際，与えられた多項式 $p(n)$ と ODTM $T_k$ とに対し，十分大きい $i$ をとって

$$2^{2^{i^i}} > (i+1) \cdot 2^{2^i},\quad 2^{2^i} > 2^{p(i)},\quad T_i = T_k$$

が成り立つようにできることを利用する。□

この場合，定理 2.5 や定理 4.2 の証明におけるように，$\mathrm{NP}^H - \mathrm{DEPT}^H \neq \phi$ なる oracle $H$ が存在することは主張できない。なぜならよく知られているように

$$\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{DEPT}$$

であるからである。しかし

$$\mathrm{NP} \subseteq ?\ \mathrm{DEXT}$$

という問題は未解決である。これに関し

**定理4.5.** (=定理Ⅸ)　$\mathrm{NP}^F - \mathrm{DEXT}^F \neq \phi$, $\mathrm{DEXT}^Z - \mathrm{NP}^Z \neq \phi$ なる oracles $F$, $Z$ が存在する。

**証明**　前者は定理 4.2 の証明の中に示されている。後者の $Z$ として［1］の Theorem 4 で構成された oracle をとり，$L(Z)=\{0^n \mid Z \text{ は長さ } n \text{ の語を含む}\}$ を考える。そこの証明によって $\overline{L(Z)} \notin \mathrm{NP}^Z$ である。所で明らかに $L(Z) \in \mathrm{DEXT}^Z$ であるから，$\overline{L(Z)} \in \mathrm{DEXT}^Z$ である。ゆえに $\mathrm{DEXT}^Z - \mathrm{NP}^Z \neq \phi$ である。□

## 文　献

1) T. Baker, J. Gill and R. Solovay, Relativizations of the P=? NP question, *SIAM J. Computing*, 4 (1975), 431-442.
2) J. Hopcroft and J. Ullman, Introduction to automata theory, languages, and computation, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1979).
3) A. Selman, P-selective sets, tally languages, and the behavior of polynomial time reducibilities on NP, *Math. Systems Theory* 13 (1979), 56-65.