

漠度概念・主観エントロピーによるMMS新 データ入力方式の提案と検討

Hirota, Kaoru / Nakajima, Ichiro / 中嶋, 一郎 / 廣田, 薫

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学工学部研究集報 / 法政大学工学部研究集報

(巻 / Volume)

21

(開始ページ / Start Page)

43

(終了ページ / End Page)

53

(発行年 / Year)

1985-03

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004066>

漠度概念・主観エントロピーによる MMS 新データ入力方式の提案と検討

廣 田 薫*・中 嶋 一 郎**

A New MMS Data-Input Method Based on the Concept of Vagueness and Subjective Entropy

Kaoru HIROTA*, Ichiro NAKAJIMA**

ABSTRACT

Human "ambiguity" is one of the most important factors in (conversational) man-machine-systems (MMS's). Two problems in MMS's are dealt with; one is how to express ambiguous data given by human beings, the other what is the optimal number of states in answering questions given by machines in the case that only ambiguous data are available. A decision making model is proposed by introducing a probability distribution on a $[0, 1]$ -interval. An ordinary data-input method is defined as giving only membership information in "fuzzy" concept. It is shown that the second information, called "vagueness", plays an important role in representing ambiguous evaluations of human beings almost completely, and that three is the best number of alternatives in answering questions, which is derived from the optimization-process using concept of subjective entropy. Based on these results, a new MMS data-input method is proposed, where 5-valued membership information is given by human beings with an appropriate use of 3-valued vagueness information. Availability of this method is also confirmed by a simulation experiment in human character/voice pattern recognition process. KEY WORDS man-machine-system, fuzzy, vagueness, subjective entropy, pattern recognition

§1. 緒 言

マンマシンシステム (MMS) における重要な問題点の一つに、人間と機械 (計算機) の間の情報の受渡し方法がある。人間から機械へ情報を入力する場合、つぎの二つの問題点が生じてくる。

- (1) 人間側で正確な情報が不足しており、曖昧な情報を入力しなければならないことがある。
- (2) 曖昧な情報しか持っていないにもかかわらず、数個 (3~7) の選択枝 (状態) の中から

* 法政大学, 工学部電気工学科計測制御専攻

** 同上 (現在東芝プラント建設部)

無理に一つを選んで入力した場合、同一の質問を受けても再び同一の回答を入力するか否かに関して自信がもてない。逆の立場から、人間から詳しい情報を得るには選択枝の数（以下、状態数と呼ぶ）をいくつにすればよいか？ 一般に状態数が多ければ詳しい情報が得られると錯覚しやすいが、情報が曖昧な場合は逆に再現性が乏しくなる危険があるのではないか？

本論文では、まず、以上の2つの問題点をいわゆる「曖昧さの理論」（確率論、Zadeh のファジィ理論⁽¹⁾、Shannon の情報理論⁽²⁾、確率集合論⁽³⁾）を用いて、理論的に解析する。従来のデータ入力方式は、級格関数と呼ぶ情報のみを与えるものであると位置づけたあとで、(1)については漢度関数という新しい評価尺度を導入することにより、曖昧な情報でもより正確に表現可能であることを示す。(2)については主観エントロピー⁽⁴⁾の観点から最適な状態数を決定し、3値が最適であり、5値も良好であるが、7値になると2値よりかえって悪くなることを示す。その結果、級格関数（5値）と漢度関数（3値）による新しいデータ入力方式を提案する（以下、新データ入力方式と呼ぶ）。すなわち漢度関数の値を回答してもらうことにより、質問の内容に関して認識不足であるがために、不正確な情報を入力する「後ろめたさ」を解消する。

次に、実際のMMSを想定した人間の文字・音声認識に関する実験を、従来のデータ入力方式の繰り返し、および新データ入力方式の両方について試み、結果を比較して、ここで提案する方式の妥当性を確認する。

§2. MMSデータ入力における問題点

自動制御技術の発達により、自動化の対象は次第に肉体的な作業から思考作業へと移りつつあり、これに伴って人間と機械との競合はますます深刻化してきている。この問題を放置しておくと、機械が人間を使うという本来の立場が逆転した機械上位の状態になる可能性がある。このようなことから、自動化の対象となるのは、人間と機械の総合システムであると認識する必要がある。

このようにして、システムをマンマシンシステム（MMS）としてとらえようとする、人間の行動がかもしたす「曖昧さ」がシステムの重要な側面になることから、MMSの好ましい姿を求める手順の一つに、「曖昧さ」を利用して人間と機械の「情報交換を工夫する」という段階が考えられることになる。そのときには、複雑な機械でも人間が容易に使いこなせるようにする必要があり、本論文では、人間が機械系へデータをなるべく正確に入力する方法について言及する。

機械系（計算機）から発生される質問に人間が答える場合に、yes・noの2値で、はっきりと答えることができる場合もあるが、質問事項に関する認識がない場合などには、それ以外の曖昧な回答をせざるを得ない場合も多い。この曖昧な回答の入力が、MMSデータ入力における第一

の問題点になる。曖昧な情報をなるべく正確に入力しようとする場合には、曖昧な状態の表現方法が問題になる。簡便な方法としては、yes・noの他にD.K.(不明)という第3の状態を仮定することが、すぐ思いつく。しかし、D.K.だけよりは、yesに近いとかnoに近いということも表現したほうがより正確であろうということで、5値にするということもよく行われる。さらにもう少し詳しくということで7値をとるように、状態数をどんどん増やすことも可能であろう。Zadehのファジィ理論⁽¹⁾は、その極限と考えることができ、曖昧状態を[0, 1]区間の無限多値で表現している。しかし、実際にMMSで人間が評価をする場合には、例えば0.31と0.32にはさほどの意味の違いは見い出せない。つまり、人間にとっては無限多値よりも有限多値、しかもできれば言語変数で答えるほうが馴じみやすい。その場合の回答選択枝の数(状態数)が、第2の問題点である。状態数を増やせば、より詳細な評価が可能であるようにみえるが、あまり多いと、例えば、同一の質問をもう一度受けたとして、同じ答を選ぶか否かに自信が持てなくなり、かえって、不正確になってしまう。従って、何等かの尺度で個々の情報の価値を最大にする最適な状態数があるはずである。以下では、これらの二つの問題点を中心に解析を進めることにする。

§3. 漠度概念の提案

議論を定量的に把握するために、最初に計算機の質問に対して、人間が入力する回答の数値定量化を試みる。ここでは、肯定的(yes)の場合を数値の1に、逆に否定的(no)の場合を数値の0に対応させる。さらに、それ以外の曖昧な中間状態も積極的に取り扱うことにし、それらは0から1までの間の適当な中間値に対応させることにする。この[0, 1]区間への数値定量化は、ファジィ理論⁽¹⁾のそれと同一で、一般によく用いられている。

人間が計算機から質問を受け、その質問に対して曖昧な回答しか持ち合わせていない場合、回答の値は[0, 1]区間上でばらつくはずである。そこで1つの回答を[0, 1]区間上の確率分布としてとらえ、 $f(\alpha)$ と記せば(1)式で表わせることになる。

$$\int_0^1 f(\alpha) d\alpha = 1 \quad , \quad f(\alpha) \geq 0 \quad (1)$$

この $f(\alpha)$ は、人間が潜在的に有するものであり、存在は仮定できても外部から明確にとらえることは不可能と考えるのが自然であろう。また、その分布については、質問事項などに依存して種々の形態が考えられるが、人間が入力した回答(一つの標本値)のみを鵜呑みにして計算機処理しては信憑性に乏しい結果しか得られない。そして、信頼性の高い回答を得るためには、 $f(\alpha)$ の持つ情報を正確にかつ適切に知る必要がある。そこで、 $f(\alpha)$ の情報を表現するためにモーメント解析を展開すると、主要情報が平均値や分散などの低次モーメントに集約されていることがすでにわかっている。⁽⁵⁾漠度概念(vagueness)は、この性質を逆活用した拡張ファジィ表現(extended fuzzy expression)⁽⁵⁾という発想によって得られたものである。すなわち、拡張ファジィ表現では、最初にある適当な条件⁽⁵⁾のもとで

$$\{M, V=M^2, M^3, M^4, \dots\} \quad (2)$$

なる可算個の情報を与えて一つの $[0, 1]$ 上の確率分布を導出するのである。ここで、 M^n は n 次モニターと呼ばれる。モニターは、理論上は可算個の集合から構成されるが、重要な情報を持つのは低次のモニターであり、特に M は級格関数 (membership function), V は漢度関数 (vagueness function) と呼び、ともに $[0, 1]$ の値を取る。

級格関数の値は、そのクラスに属する資格の程度 (membershipness) を表わし、ファジィ集合論⁽¹⁾のメンバーシップ関数に相当するものである。また、漢度関数の値は、級格関数の値をどの程度漠然と与えたかを示唆するものである。

以上の観点に立てば、これまでMMSで普通に行われてきたデータ入力方式では、級格関数の値のみを入力していたとみなすことができる。しかし、それだけでは、§2. で述べた二つの問題点による情報の不正確さが現われてくる。そこで、本論文で提案する新データ入力方式では、その人間が入力した回答に対してどの程度の自信をもって答えたのかという、第2の情報 (漢度関数の値) をも、人間から入力してもらうことにする。

§4. 最適状態数の決定

これまでの議論では、級格関数の回答値も漢度関数の回答値もともに0から1までの値を自由に取れるものとした。しかし、質問に対する回答を入力する人間にとっても、また計算機でデータ処理をする場合にも、0から1までの数値を自由に選択することよりも、むしろ3個あるいは5個等のあらかじめ指定された有限個の選択枝のうちから一つを選ぶほうが馴じみやすい。その場合には、状態数 (一つの質問に対して、あらかじめ指定された回答の個数) をいくつにすればよいかという点が問題になる。むやみに状態数を増やしても選択に迷うし、回答の信憑性もなくなるからである。そこで、曖昧さの指標の一つである Shannon のエントロピー概念⁽²⁾を応用した主観エントロピーの概念⁽⁴⁾を用いて、最適状態数の決定を行う。

主観エントロピーは、確率概念を中心にファジィ概念を併用して構築された確率集合⁽³⁾の構造の複雑さの程度を数量化した尺度であり、級格関数と確率を用いて定義されている。人間が入力する回答を、§3. で述べた定量化法で数値に変換し、そこで許容される数値の集合を $[0, 1]$ 区間内の有限集合とし、 $\{\alpha_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ と記すことにする。

$$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq 1 \quad (3)$$

このように許容数値を有限個に限定すれば、(1)式の $f(\alpha)$ は総和の形式で書き表わせる。

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad , \quad P_i \geq 0 \quad (4)$$

ここで、 P_i は、 α_i に対応する回答 (回答そのものは数値でなくても、例えば言語変数でもよい。) を人間が入力する確率である。すると、この場合の主観エントロピー H は、 α_i と P_i を使って(6)式のように与えられる。⁽⁴⁾

$$H = -\sum_{i=1}^n \{ \alpha_i P_i \log_2 \alpha_i P_i + (1-\alpha_i) P_i \log_2 (1-\alpha_i) P_i \} \quad (5)$$

$$= -\sum_{i=1}^n P_i \log_2 P_i + \sum_{i=1}^n P_i h(\alpha_i) \quad (6)$$

(6)式の $h(\cdot)$ は, $\{0, 1\}$ 2値のみから成る純粋状態⁽⁴⁾(我々が日常行っている曖昧かつ多様な評価の原因を追求すれば, 究極的には $\{0, 1\}$ 2値のみしかない状態に帰着するという立場に立って導入された概念である。)の主観エントロピーである。

$$h(\alpha) = -\{ \alpha \log_2 \alpha + (1-\alpha) \log_2 (1-\alpha) \} \quad (7)$$

この(7)式は, 形式的にはよく知られている Shannon のエントロピー関数⁽²⁾であることに注意しよう。(6)式を見ればわかるように, 主観エントロピー H は, n 種の異った回答値 α_i それ自身がつもつエントロピー $h(\alpha_i)$ の出現確率 P_i による平均値 (第2項) と, その出現の頻度それ自身がつもつエントロピー (第1項) との和であるとも解釈できる。

次に, 主観エントロピー H を用いて, 最適状態数 n を決定しよう。回答値 $\{\alpha_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ の $[0, 1]$ 区間上での配置は(8)式のように線形性を仮定する。

$$\alpha_i = (i-1)/(n-1) \quad (8)$$

つまり, $\alpha_1 = 0, \alpha_n = 1$ とし, その間を等間隔に分割する。状態数 n の最適値決定基準は, 回答の状態数を一つ増したとき, それが情報量の観点からみて, どの程度の価値の上昇につながる

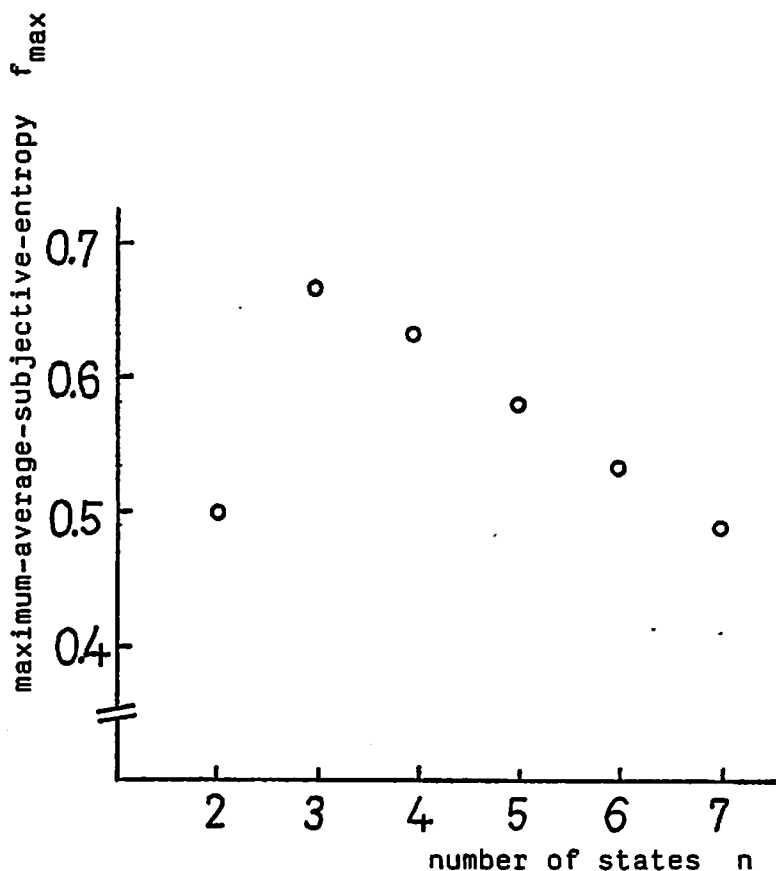


Fig. 1 maximum-average-subjective-entropy f_{\max} vs. number of states n

かに注目して設定する。(5)・(6)式の主観エントロピー H を状態数 n で割れば、1つの回答状態あたりの平均的な情報価値が与えられることになる。 H/n の値は、(4)式の確率分布 $\{P_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ によって変化するので、 $f(P_1, P_2, \dots, P_n)$ と記すことにすれば、

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) = H/n$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i \log_2 P_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i h\left(\frac{i-1}{n-1}\right) \quad (9)$$

と与えられる。(9)式の大小を比較し、その最大値を与える n から最適状態数を決定する。(9)式の最大値 f_{max} は、ラグランジュの未定係数法より求めることができ、

$$P_i = 2^{h\left(\frac{i-1}{n-1}\right)} / \sum_{i=1}^n 2^{h\left(\frac{i-1}{n-1}\right)} \quad (10)$$

のときに

$$f_{max} = \frac{1}{n} \log_2 \sum_{i=1}^n 2^{h\left(\frac{i-1}{n-1}\right)} \quad (11)$$

で与えることが示される。(6)

この f_{max} の値と n の関係はFig. 1に示すが、 $n=3$ のときに最大で、順に $n=4, 5, 6$ と続くが、 $n=7$ になると $n=2$ のときより値が小さくなる。したがって最適状態数は、理論的には3値ということになる。つまり、yes, noの他にD.K.を取り入れた3選択枝による回答の合理性が示されたことになる。

§5. 漢度を考慮した新データ入力方式

§3で述べた漢度概念の提案、§4で述べた最適状態数の決定から、Fig. 2に示すような漢度を考慮したMMSにおける新データ入力方式を提案する。具体的な回答方法は、「食欲がありますか」という計算機からの問いに対して、まず最初に「ある(yes)」、「どちらかといえばある」、

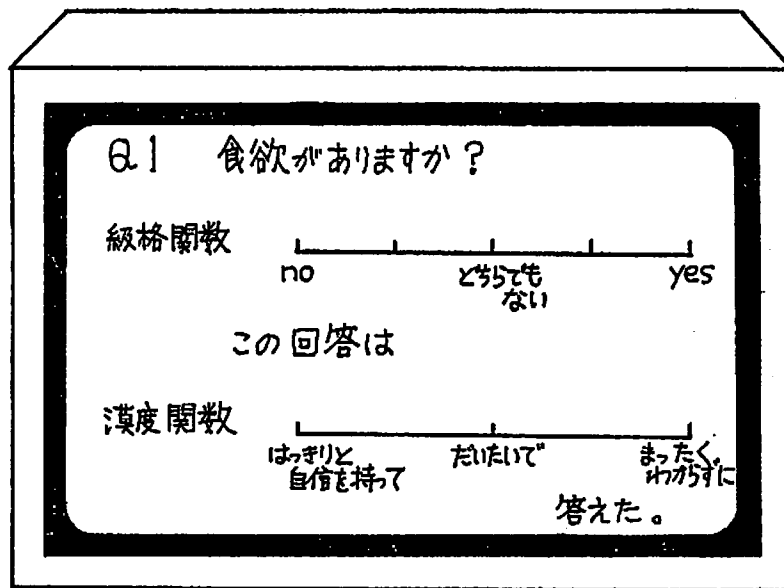


Fig. 2 An example of display based on a new MMS data-input method

「どちらでもない」、「どちらかといえない」、「ない (no)」の5値のうちのいずれかを級格関数の値として回答し、次にそれを選んだことに関して「はっきりと自信をもって答えた」、「さほど自信はもっていないが、だいたいの感じで選んだ」、「まったくわからず適当に選んだ」の3値のいずれかを漠度関数の値として回答することになる。

本方式では、通常の実験（級格関数のみ）の他に、漠度という第2の情報をも回答することにより、データを入力する人間が、§2で述べた第1の疑問をさほど感じないで質問に臨むことができる。従来の級格関数のみの入力方式では、入力情報の信憑性を得るために同種の質問が繰り返して実施されるということが行われているが、漠度情報を入力することによりその必要もなくなるという利点も有している。

最適状態数に関しては、主観エントロピーによる解析では3値という結果が得られているにもかかわらず、Fig.2では漠度関数は3値を用いているが、級格関数は5値にしている。これは医療・故障診断システムなど専門性のあるMMSでは、回答の信頼性を多少犠牲にしても3値よりももう少し詳しい情報を知る必要がある場合が多いことを考慮したためである。なお、状態数を奇数にしたのは、中間の状態を表現する意図があるためだが、場合によっては4値を用いることも考えられる。

このように状態数に関しては、最適状態数が3値であることを念頭において、適用する場面に応じて3、4、5値のうちから適宜設定すべきである。しかし7値以上にする場合は、回答者に混乱を招きやすいので、慎重に考慮する必要がある。

ここでは、計算機による質問に対する人間の回答が、(1)式で与えられる確率分布をしており、実際の回答をその分布からの一つの標本値としてとらえるという、極めて自然な考え方を採用している。従来のデータ入力方式では、その標本値のみを鵜呑みにして処理を行ったのであるが、回答者の質問内容に対する認識が曖昧な場合は、標本値が確率分布全体の情報を必ずしも正しく反映しないことによる誤差が入ってしまう。確率分布を正しく反映した情報を入力するためには、繰り返しデータ入力方式が考えられるが、実際には実施不可能あるいは困難な場合も多い。ここで提案した漠度情報を併用した手法は、理論的には1回のデータ入力でも繰り返し入力に匹敵する正確さを有するものである（数学的証明の詳細は文献5参照）。次節では、このことを実験的にも確認する。

§6. シミュレーションによる妥当性の検討

6.1 実験方法

提案したMMS新データ入力方式の実用的見地からの有用性を確認するために、つぎの二通りのシミュレーション実験を行った。

(1) 級格関数のみによる従来のデータ入力方式に従って、級格関数のみを回答する実験を、同一

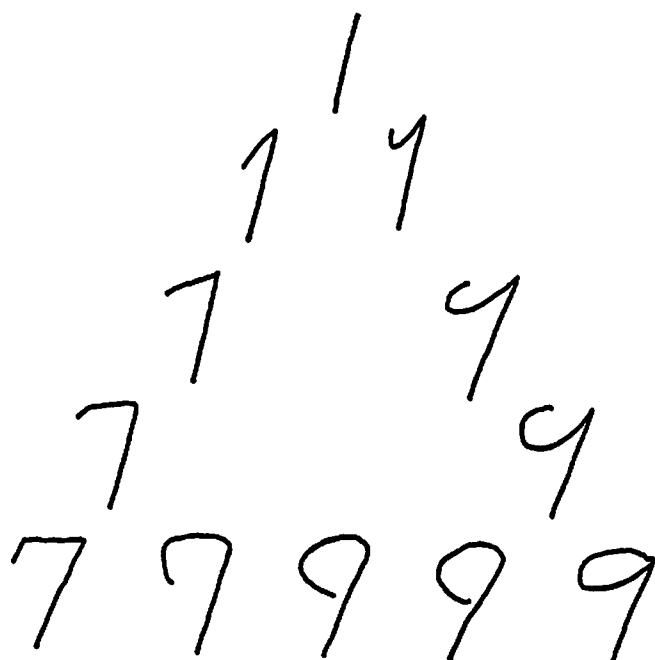


Fig. 3 12 handwritten-character-patterns

MMSを考慮した人間の文字・音声パターン認識を取りあげ、それぞれのパターンの類似性あるいは相違性の認識と再現性に関する実験を行うことにした。

文字認識の実験で扱った文字パターンは、手書き数字の「1, 7, 9」を中心に、Fig. 3に示す12種類である。

音声パターンは、D. LLOYD RICE COMPUTALKER CONSULTANTS社の音声合成システム、COMPUTALKER CT-1とそれに付随する synthesis-by-rule ソフトウェアシステム CSR 1を使用し、Table 1に示すような、母音の「ア、ウ、オ」に似ている12種類の音声を採用した。

パターン番号	入力記号列	合成音声出力の発音記号
1	AAAA	[ア ア]
2	AHAA	[ア ア]
3	AAER	[ア ア:]
4	AEER	[ア ア:]
5	UHER	[ウ ウ]
6	UHUU	[ウ ウ:]
7	UWUU	[ウ ウ:]
8	UHAO	[ウ ア:]
9	UHOW	[ウ オウ]
10	OWOW	[オウ オウ]
11	AOOW	[ア オウ]
12	EROW	[エ オウ]

Table 1 12 voice patterns

人間集団（大学生26人）に対して約一ヶ月おきに、3回行った。（以下、これを、繰り返しデータ入力方式と呼ぶ。）

(2) 新データ入力方式に従って、級格関数に続いて漢度関数を回答する実験を、(1)の人間集団とはまったく別の人間集団（(1)とは別の大学の大学生25人）に対して1回だけ行った。

なお、級格関数と漢度関数の状態数はFig. 2の形式で、それぞれ5値・3値とした。

ここでは、具体的な実験題材として、

このようにして作成した文字・音声それぞれ12種類のパターンについてすべての組合せ（ $12^2 = 144$ 組）のパターン対を作成し、それらを人間への提示パターンとした。

回答方法は、Fig. 2の形式に従って無作為な順序で提示される144組のパターン対すべてについて、級格関数はそのパターン対の類似性を5状態で回答してもらい、漢度関数を答える場合は級格関数の回答をどの程度自信をもって行ったかについて3状態で回答してもらった。

6.2 実験結果とその検討

実験によって得られた級格関数および漢度関数の入力された回答を、Fig. 4に示すような [0,

1] への数値定量化を行い、計算機ACOS650でソーティング処理し、次の順序で検討を進めた。

回答欄					
言語変数	まったく違う	やや違う	わからぬ	やや同じ	まったく同じ
数値	0.00	0.25	0.5	0.75	1.00

(a) membership information

回答欄			
言語変数	自信がある	自信はないが だいたい	わからぬ 適当
数値	0.0	0.5	1.0

Fig.4 Numericalization of linguistic variables of membership and vagueness functions

1. データの選択

回答の一部欠如など、あきらかに人間側が誠意をもって回答しなかったと考えられるものがあった。その結果、正しいデータと判定されたものは、繰り返しデータ入力方式では文字・音声パターンともに11人分、新データ入力方式では文字パターン10人分、音声パターン9人分である。

2. 平均・分散の計算

1で採用されたデータを用いて、文字・音声パターンによる144組のパターン対の各々につ

組	4組のデータ対	相関係数 r	
		文字パターン	音声パターン
1	繰り返しデータ入力方式の級格関数の平均 と新データ入力方式の級格関数の平均	0.902	0.953
2	繰り返しデータ入力方式の級格関数の分散 と新データ入力方式の漢度関数の平均	0.673	0.412
3	繰り返しデータ入力方式の級格関数の分散 と新データ入力方式の級格関数の分散	0.583	0.674
4	新データ入力方式の級格関数の分散 と新データ入力方式の漢度関数の平均	0.450	0.558

Table 2 An experimental result of statistical correlation coefficient

いて、繰り返しデータ入力方式では級格関数の平均と分散、新データ入力方式では級格関数・漢度関数の平均と分散を計算した。

3. 相関係数 r の計算

級格関数と漢度関数についての平均と分散を用いて、2で計算をした結果のうちで、Table 2に示す理論的・経験的に対応すると考えられる4組のデータ対に対して、それぞれのデータ対間の相関係数 r を計算し、表にまとめた。

4. 相関関係の仮説検定

3で計算した相関係数 r より、データ対の間に相関があるか否かを検定した。検定方法は、通常用いられている χ^2 検定・ t 検定・ r 検定・ F 検定の4つを使用した。

以上の順序で検討を進めた結果、文字・音声パターンともにTable 2に示したデータ対の間に、採用した全ての検定で相関に高度の有意性が確認された。

したがって、本シミュレーション実験では、新データ入力方式が、繰り返しデータ入力方式と同等の正確な情報を与えることが確認された。

§7. 結 言

本論文では、MMSデータ入力方式について、人間側の立場から考えられる二つの問題点「情報不足から生ずる曖昧な回答の入力に起因する不正確さ」と「より詳しい情報を得るための最適な状態数」を取り上げ、いわゆる「曖昧さの理論」を用いて、それぞれの問題点を、漢度関数の提案、主観エントロピーによる最適状態数の決定により解決をし、その結果、級格関数(5値)に続いて漢度関数(3値)を回答してもらった新データ入力方式を提案した。また実際に、人間の文字・音声認識に関するMMS入力を想定し、従来のデータ入力方式による繰り返しデータ入力方式と、新データ入力方式の二つの方式によるシミュレーション実験を行い、得られた結果を統計的に解析し、新データ入力方式の妥当性を再確認した。

本論文では、人間の主観的で曖昧かつ多様な評価を確率分布でモデル化し、その情報をいかに

正しく、また人間に馴じみやすい方法で機械（計算機）に入力するかを論じた。人間の評価が明確な場合は、級格関数だけの従来の手法でよいが（その場合は、実質的には、yes・noの2状態のみで良いはずである。）、曖昧な場合は、漠度関数という第2の情報を人間から引き出すことで、ほぼ正確な情報が入力可能なことを、理論的にも実験的にも示した。なお、完全な情報を得るには、漠度の他に3次以上のモニターが必要である訳だが、実用上漠度までで十分良い近似になっていること、人間側にとっても3番目以降の情報には対処しにくいなどにより、高々漠度まで考えることで十分である。級格関数で、 $\{0, 1\}$ 以外の曖昧状態を積極的に取りあげ、さらに必要に応じて漠度関数を併用するという提案は、最適状態数の決定法をも含めて、人間の関与する知識表現の基礎を固めたものといえる。今後は、言語変数の利用も含めて、単にMMSのみならず、専門家システムや知能ロボット等の人工知能・知識工学への具体的応用が期待される。

参 考 文 献

- (1) L. A. Zadeh: Fuzzy Sets, Information and Control, Vol. 8, 338/353, 1965.
- (2) C. E. Shannon: A Mathematical Theory of Communication, Bell Syst. Tech. J, Vol. 27, 370/423, 1948.
- (3) 廣田薫, 飯島泰蔵: 確率集合論の論理学的基礎付け, 電子通信学会論文誌, Vol. 62-D-2, 73/88, 1979.
- (4) K. Hirota: Ambiguity based on the Concept of Subjective Entropy, in Fuzzy Information and Decision Processes (M. M. Gupta, E. Sanchez eds.) North-Holland, Amsterdam, 29/40, 1982.
- (5) K. Hirota: Extended Fuzzy Expression of Probabilistic Sets, in Advances in Fuzzy Set Theory and Applications (M. M. Gupta, R. K. Ragade, R. R. Yager eds.), North-Holland, Amsterdam, 201/214, 1979.
- (6) 廣田薫: アンケート調査における漠度概念とエントロピー分析, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 26-1, 38/44, 1981.