

### 常微分方程式の数値解法の系統的誤差解析

Watanabe, Kajiro / Ishida, Junko / 石田, 順子 / 渡辺, 嘉二郎

---

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学工学部研究集報 / 法政大学工学部研究集報

(巻 / Volume)

22

(開始ページ / Start Page)

67

(終了ページ / End Page)

85

(発行年 / Year)

1986-03

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004052>

# 常微分方程式の数値解法の系統的誤差解析

渡 辺 嘉二郎\*・石 田 順 子\*

## Systematic Analysis of Trajectory Errors in Integrating Ordinary Differential Equations

Kajiro WATANABE and Junko ISHIDA

### Abstract

Integration method to solve large scale ordinary differential equations is one of the major means in the field of computation dynamics, since the FEM has been a common tool to model ordinary differential equations of dynamical structural systems. This paper describes how to systematically analyze errors in numerical solutions of ordinary differential equations solved by a variety of integration formulas by introducing one criterion to evaluate characteristics of the integration formulas.

The basic idea to enable the systematic analysis of the errors is that any integration formula can be interpreted as nothing more than an approximate function of the shift operator by the differential operator, or vice versa. The important properties of the formulas can be systematically clarified by the idea.

### §1. 要 旨

数値計算法により解きざるを得ないような常微分方程式は、もとよりその解トラジェクトリはわからないし、解の定性的な性質もわからないことが多い。このような方程式を誤差を必ず含む数値解法で解いた場合、その解が信頼できるか否か、信頼できるとしても、どの範囲で信頼できるかを判定する方法が確立されていなければ、数値解は利用できない。本論では、微分方程式の数値解法は、微分（シフト）演算のシフト（微分）演算による近似と考える。これにより、常微分方程式の様々な数値計算法を統一的にとらえ、数値計算法が数値解に与える誤差を系統的に把握し、数値解の信頼性を評価する方法を提案する。この方法をルンゲクッタ4次法に適用して、数値解の信頼性に関する諸定理、および、適切な刻み幅の選定に関する定理を作った。

### §2. 常微分方程式の数値解法における誤差

常微分方程式は、時間あるいは変位などのような連続変数を独立変数とし、その変数に関する

---

\* 計測制御教室

導関数を含む方程式であり、その解は独立変数に関する連続関数で与えられる。常微分方程式をデジタル計算機を使って数値的に解く方法を常微分方程式の数値計算法と呼ぶ、数値計算法は、連続な独立変数を、離散値化することで、微分方程式を差分方程式に近似変換して、これを量子化された（有限桁の）の数値の演算によって解を求める。したがって、本来連続的であるはずの微分方程式の解は、数値解法により、離散値、量子化された数値列で与えられ、次の二つの誤差を含む。

(1) 離散値誤差                      (2) 量子化誤差

この誤差のうち、十分なビット数（例えば32ビット）で数値を表現する計算機を使用すれば、量子化は主要な数値解の誤差の原因にはならない場合が多い。それに対し、離散値化は数値解の系統的な誤差の原因となり、実際の数値計算において重大な混乱を招く。

ここでは、常微分方程式の数値解法（公式、アルゴリズム）がどのようにして構成されるかに立ち入り、離散値誤差が実際数値解の中でどのような影響を与えるかを調べ、その影響を避ける方策を考える。

### § 3. 常微分方程式の数値解法はどのように構成されるか

上述のように常微分方程式の数値解法は連続微分方程式を離散値差分方程式に近似離散値化変換し、これを数値的に解くプロセスと考えられる。この近似離散値化変換に伴う数値計算上の特性は微分演算と差分演算の関係、すなわち微分演算子（シフト演算子）がシフト演算子（微分演算子）を使って、どのような関数で近似されるかということから知ることができる。この関係は、常微分方程式の数値解法の構成を考える上での基礎となる。

#### 3.1 シフト演算子と微分演算子

はじめに、シフト演算子と微分演算子を定義しておく。

[Definition 1]

微分演算子  $D$  とシフト演算子  $Z$  は次のような演算を行う

$$\text{微分演算} \quad Dx(t) = dx(t)/dt \quad (1a)$$

$$\text{シフト演算} \quad Zx(t) = x(t+h) \quad (1b)$$

通常、微分演算子、シフト演算子は、Laplace 変換された変数  $x(D)$  あるいは  $Z$  変換された変数  $x(Z)$  に作用されるが、ここでの定義では、変換前の変数  $x(t)$  に作用させるものとする。

この定義より、シフト演算と微分演算の関係は次のようになる。式 (1b) の右辺の  $x(t+h)$  を  $t$  の回りで Taylor 級数に展開すると

$$\begin{aligned} x(t+h) = & x(t) + hdx(t)/dt + (h^2/2!)(d^2x(t)/dt^2) + \dots \\ & + (h^i/i!)(d^i x(t)/dt^i) + \dots \end{aligned} \quad (1c)$$

となる。式 (1a) の微分演算子を利用すると上式は

$$\begin{aligned} x(t+h) &= \{1 + Dh + (D^2h^2/2!) + \dots + (D^i h^i / i!) + \dots\} x(t) \\ &= e^{Dh} x(t) \end{aligned} \tag{1d}$$

となり、この式と(1b)が等しい ( $Zx(t) = x(t+h) = e^{Dh} x(t)$ ) ことより、

$$Z = e^{Dh} \tag{1e}$$

とシフト演算子と微分演算子を関係づけることができる。式(1e)を利用することで次の例のように微分方程式を差分方程式に変換することができる。

〔例 1〕 線形常微分方程式の差分方程式への変換

次の連立線形常微分方程式を考える。

$$dx(t)/dt = Ax(t), \quad x(0) = x_0$$

いま離散時間を  $k$  として  $k=t, k+1=t+h$  とすると、式(1e)の関係より、

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + h dx(k)/dt + (h^2/2!)(d^2x(k)/dt^2) + \dots \\ &\quad + (h^i/i!)(d^i x(k)/dt^i) + \dots \end{aligned}$$

となる。与方程式は  $d^i x(t)/dt^i = A^i x(t)$  を満たすので、この関係を上式に代入すると

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + (Ah)x(k) + (A^2h^2/2!)x(k) + \dots + (A^i h^i / i!)x(k) + \dots \\ &= \{1 + (Ah) + (A^2h^2/2!) + \dots + (A^i h^i / i!) + \dots\} x(k) \\ &= e^{Ah} x(k) \end{aligned}$$

となり、与えられる微分方程式 ( $dx(t)/dt = Ax(t), x(0) = x_0$ ) は差分方程式 ( $x(k+1) = e^{Ah} x(k), x(0) = x_0$ ) に変換されたことになる。この差分方程式の離散値解  $x(k)$  は、与微分方程式の解  $x(t)$  の  $t = kh (k=0, 1, 2, \dots)$  の値に一致する。しかし、この差分方程式を求めるためには  $e^{Ah} = 1 + (Ah) + (Ah)^2/2! + \dots + (Ah)^i/i! + \dots$  の行列  $A$  に関する無限級数和を求めなければならない、このような計算は直接数値計算できない。

3.2 シフト演算子（微分演算子）の微分演算子（シフト演算子）

による近似と常微分方程式の数値解法

3.1の例1に示した通り、式(1)のシフト演算子と微分演算子の関係により、微分方程式は差分方程式に厳密に変換できる。しかし、この変換では、簡単な線形常微分方程式に適用するときですら、直接数値計算できないような演算を含む。そこで常微分方程式の全ての数値計算は、式(1)、特に式(1e)の関係の近似式を利用している。この近似のタイプは三種類あり、次のようになる。

(1) 式(1e) [ $Z = e^{Dh}$ ] の指数関数を  $Dh$  の有理多項式で近似する。

$$Z \doteq \{b_0 + b_1(Dh) + \dots + b_m(Dh)^m\} / \{a_0 + a_1(Dh) + \dots + a_n(Dh)^n\} = E(Dh) \tag{2a}$$

(2) 式(1e)の逆関数 [ $Dh = \ln(Z)$ ] の対数関数を  $Z$  の有理多項式で近似する。

$$Dh \doteq \{d_0 + d_1 Z^{-1} + \dots + d_q Z^{-q}\} / \{c_0 + c_1 Z^{-1} + \dots + c_p Z^{-p}\} = L(Z) \tag{2b}$$

(3) より一般的に、 $Dh$  の有理多項式を  $Z$  の有理多項式で近似する。

$$\{f_0 + f_1(Dh) + \dots + f_r(Dh)^r\} / \{e_0 + e_1(Dh) + \dots + e_s(Dh)^s\} \\ \doteq \{h_0 + h_1 Z^{-1} + \dots + h_j Z^{-j}\} / \{g_0 + g_1 Z^{-1} + \dots + g_i Z^{-i}\} \quad (2c)$$

式(2a), (2b) および(2c) のソフト演算子と微分演算子の間の近似関係は, 与えられる計算法によって定まる。この近似式は, はじめ微分方程式

$$dx(t)/dt = Dx(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2d)$$

に数値計算法で適用して近似差分方程式を求める。次に, この差分方程式をZ変換し, 両辺から  $x(Z)$  を消去する。この結果, 式(2a), (2b) あるいは(2c) のような  $Dh$  と  $Z$  の関係式が得られる。

[例 2] 後方 Euler 法は  $Z = e^{Dh}$  でどのように近似するか。

後方 Euler 法の公式は次のように与えられる。

$$dx(k)/dt = \{x(k) - x(k-1)\} / h$$

あるいは

$$x(k) = x(k-1) + h \{dx(k)/dt\}$$

この公式に(2d)を適用すると, 次のような差分方程式が得られる。

$$x(k) = x(k-1) + Dh x(k)$$

この差分方程式を式(1b)の定義式を利用してZ変換すると,

$$x(k) = Z^{-1} x(k) + Dh x(k)$$

なる式を得る。両辺から  $x(k)$  を消去し,  $Z$  と  $Dh$  の関係式を求めると次のようになる。

$$Dh = 1 - Z^{-1}$$

あるいは

$$Z = 1 / (1 - Dh)$$

これより, 後方 Euler 法は,  $Z = e^{Dh}$  を上式のように近似する。

[例 3] Runge Kutta 4次法は  $Z = e^{Dh}$  をどのように近似するか。いま,

$$dx(t)/dt = f(x, t), \quad x(0) = x_0$$

で与えられるベクトル方程式で前提として Runge Kutta 4次法の数値計算公式は次のように与えられる。

- 1)  $k=0$
- 2)  $\kappa_0 = hf(x(kh), kh)$
- 3)  $\kappa_1 = hf(x(kh) + \kappa_0/2, kh + h/2)$
- 4)  $\kappa_2 = hf(x(kh) + \kappa_1/2, kh + h/2)$
- 5)  $\kappa_3 = hf(x(kh) + \kappa_3, kh + h)$
- 6)  $x(kh+h) = x(kh) + (\kappa_0 + 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + \kappa_3)/6$
- 7) If  $k < \text{end}$  then  $k = k+1$  and Goto 1), else go to 8)

8) Stop

この公式に (2d) の方程式を適用する。すなわち、 $f(x, t) = Dx(t)$  を上の公式に代入し、 $x(kh+h) = x(k+1)$  と、 $x(kh) = x(k)$  とすると、それらの間には次の関係が求まる。

$$x(k+1) = (1 + Dh + D^2h^2/2 + D^3h^3/6 + D^4h^4/24)x(k)$$

この差分方程式を  $Z$  変換し、両辺から  $x(k)$  を消去すると、

$$Z = 1 + (Dh) + (Dh)^2/2! + (Dh)^3/3! + (Dh)^4/4!$$

なる  $Z$  と  $Dh$  の関係が得られ、Runge Kutta 4 次法において  $Z = e^{Dh}$  は

$$Z = 1 + (Dh) + (Dh)^2/2! + (Dh)^3/3! + (Dh)^4/4!$$

と近似されていることがわかる。

例 2, 3 と全く同様な手順によって、他の数値計算法についても  $Z$  と  $Dh$  の関係が得られる。

以下、 $Z = e^{Dh}$  を近似する公式、 $Dh = \ln(Z)$  で近似する公式とに分けて例 4, 例 5 に示す。

〔例 4〕 (1)  $Z = e^{Dh}$  の近似関数を用いる数値計算法

Euler 法  $Z \doteq 1 + Dh$

後法 Euler 法  $Z \doteq 1/(1 - Dh)$

Runge Kutta 4 次法  $Z \doteq 1 + Dh + (Dh)^2/2! + (Dh)^3/3! + (Dh)^4/4!$

Pade'II 法  $Z \doteq (1 + Dh/2)/(1 - Dh/2)$

(Newmark  $\beta$  ( $\beta=1/4$ ) 法)

〔例 5〕 (2)  $Dh = \ln(Z)$  の近似関数を用いる数値計算法

Euler 法  $Dh \doteq (Z - 1)$

後方 Euler 法  $Dh \doteq (1 - Z^{-1})$

Pade'II 法  $Dh \doteq 2(1 - Z^{-1})/(1 + Z^{-1})$

(Newmark  $\beta$  ( $\beta=1/4$ ) 法)

Adams-Bashforth 2nd  $Dh \doteq 2(1 - Z^{-1})/(3Z^{-1} - Z^{-2})$

Stiffly Stable 2nd  $Dh \doteq (3 - 4Z^{-1} + Z^{-2})/2$

〔例 6〕 例 4, 例 5 の近似関数からの常微分数値計算公式の導出

例 2 における手順と逆に、例 4, 例 5 の近似関数からの常微分数値計算公式の導出を行う。

例 4 の Euler 法から Euler 法の公式を導き出す。この近似関数の左辺と右辺は等しいとして、両辺に  $x(k)$  を乗じると、

$$x(k+1) = x(k) + \{dx(k)/dt\}h$$

なる関係式が得られる。この式は常微分方程式の数値計算公式の Euler 法である。与方程式と上の公式を連立して方程式の数値解が求まる。

例 5 の Stiffly Stable 2nd 法について考える。Euler 法の場合と同様に例 5 の近似式の両辺が等しいとして、両辺に  $x(k)$  を乗じると、

$$x(k) = (4/3)x(k-1) - (1/3)x(k-2) + (2h/3)\{dx(k)/dt\}$$

なる Stiffly Stable 2nd 法の公式が得られる。

例5の Runge Kutta 4次法に上と同じ方法を適用すると、与微分方程式の関数に関する4次の導関数を必要とする公式が求められる。通常 Runge Kutta 4次法は例3に示すように微分方程式の関数の導関数を必要としない。しかし、例3の公式は4次の導関数を必要とする公式の等価変形であり、数値計算上の性質は全く同じである。

### 3.3 常微分方程式数値解法のタイプとシフト演算子、微分演算子の近似関数の型

常微分方程式数値解法はその公式の型によって次のようなタイプに分けることができる。

#### (1) 単段法と多段法

〔単段法〕 解  $x(k)$  を求めるのに解  $x(k-1)$  のみを用いる。

〔多段法 ( $m$  段法)〕 解  $x(k)$  を求めるのに解  $x(k-1), x(k-2), \dots, x(k-m)$  を用いる。

#### (2) 1次法と高次法

〔1次法〕 解  $x(k)$  を求めるのに解  $\{dx^i(k+j)/dt^i\}$  を用いずに解  $x(k+j)$  を用いる。

〔高次法 ( $n$  次法)〕 解  $x(k)$  を求めるのに解  $\{dx^i(k+j)/dt^i, i=0, 1, 2, \dots, n\}$  を用いる方法。

#### (3) 陽解法と陰解法

〔陽解法〕 解  $x(k)$  を求めるのに解  $\{dx^i(k-j)/dt^i, j=1, 2, 3, \dots, n\}$  を用いる方法。

〔陰解法〕 解  $x(k)$  を求めるのに解  $\{dx^i(k-j)/dt^i, j=0, 1, 2, \dots, n\}$  を用いる方法。

図1に、各タイプの公式の計算の推移の様子を示す。また表1には、各タイプの公式を  $dx(t)/dt = f(x, t)$  のような形式の方程式に適用した場合に得られる差分方程式の形を示している。

このような常微分方程式の数値解法の型はシフト演算子、微分演算子の近似関数に密接に関連している。以下に、考えられる全てのタイプとそれに対応する近似関数の型を示す。

〔単段・1次・陽解法〕 式(2a)において、係数  $a_i=0, i=0, \dots, n, b_j=0, j=2, 3, \dots, m, b_j \neq 0, j=0, 1$  の場合

$$Z \doteq E(Dh) = b_0 + b_1(Dh) \quad (3a)$$

〔単段・1次・陰解法〕 式(2a)において、係数  $a_i=0, i=2, \dots, n, b_j=0, j=2, 3, \dots, m, a_i \neq 0, i=0, 1, b_j \neq 0, j=0, 1$  の場合

$$Z \doteq E(Dh) = \{b_0 + b_1(Dh)\} / \{a_0 + a_1(Dh)\} \quad (3b)$$

〔単段・ $n$ 次・陽解法〕 式(2a)において、係数  $a_0 \neq 0, a_i=0, i=1, \dots, n, b_j \neq 0, j=0, n$

$$Z \doteq E(Dh) = \{b_0 + b_1(Dh) + \dots + b_n(Dh)^n\} / a_0 \quad (3c)$$

〔単段・ $n$ 次・陰解法〕 式(2a)において、 $a_i \neq 0, i=0, n, b_j \neq 0, j=0, n$

$$Z \doteq E(Dh) = \{b_0 + b_1(Dh) + \dots + b_n(Dh)^n\} / \{a_0 + a_1(Dh) + \dots + a_n(Dh)^n\} \quad (3d)$$

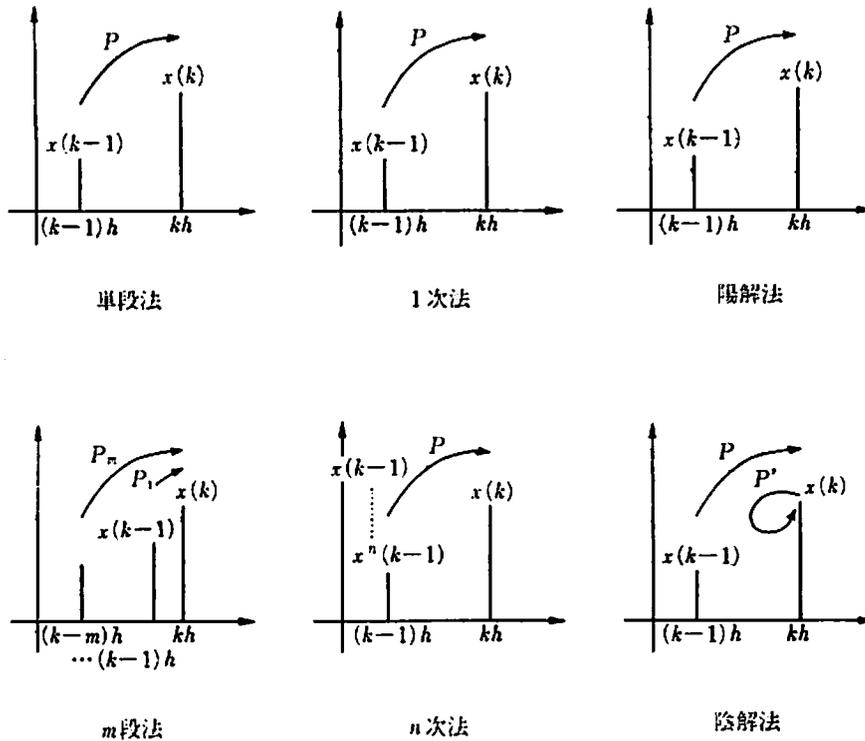


図1 数値解法の種類

表1 数値解法の種類と一般形

分類法			一般形
単段法	1次法	陽解法	$x(k) = F\{x(k-1)\}$
単段法	1次法	陰解法	$F\{x(k-1), x(k)\} = 0$
単段法	n次法	陽解法	$x(k) = F\{x(k-1), \dots, x^{(n)}(k-1)\}$
単段法	n次法	陰解法	$F\{x(k), \dots, x^{(n)}(k), x(k-1), \dots, x^{(n)}(k-1)\} = 0$
m段法	1次法	陽解法	$x(k) = F\{x(k-1), x(k-2), \dots, x(k-m)\}$
m段法	1次法	陰解法	$F\{x(k), x(k-1), \dots, x(k-m)\} = 0$
m段法	n次法	陽解法	$x(k) = F\{x(k-1), \dots, x^{(n)}(k-1), \dots, x(k-m), \dots, x^{(n)}(k-m)\}$
m段法	n次法	陰解法	$F\{x(k), x(k-1), \dots, x^{(n)}(k-1), x(k-2), \dots, x^{(n)}(k-2), \dots, x(k-m), \dots, x^{(n)}(k-m)\} = 0$

〔m段・1次・陽解法〕式(2b)において、係数  $c_0 \neq 0, c_i = 0, i=1, 2, \dots, m, d_j \neq 0, j=0, 1, \dots, m$

$$Dh \doteq L(Z) = \{d_0 + d_1 Z^{-1} + \dots + d_m Z^{-m}\} / \{c_1 Z^{-1} + c_2 Z^{-2} + \dots + c_m Z^{-m}\} \quad (3e)$$

〔m段・1次・陰解法〕式(2b)において、係数  $c_i \neq 0, i=0, 1, \dots, m, d_j \neq 0, j=0, 1, \dots, m$

$$Dh \doteq L(Z) = \{d_0 + d_1 Z^{-1} + \dots + d_m Z^{-m}\} / \{c_0 + c_1 Z^{-1} + \dots + c_m Z^{-m}\} \quad (3f)$$

〔m段・n次・陽解法〕式(2c)において、係数  $g_0 = 0, e_i = 0, i=1, 2, \dots, s, r=n, j=m, i=m$



義した。

[Definition 2 A-安定]

複素平面の左半平面上（虚軸は含まない）の任意の値を特性根として持つ同次線形常微分方程式を安定に解くような数値解法は A-安定である。

数値解法が A-安定でない数値解法，すなわち，複素平面の左半平面上の特定される一部の領域上に（特性根） $\times$ （刻み幅  $h$ ）を持つ方程式だけが安定に解けるような数値解法は条件付安定であると言える。

[Definition 3 L-安定]

A-安定な数値解法を刻み幅  $h$  で，微分方程式

$$dx(t)/dt = s_0 x(t), \quad x(0) = x_0 \tag{4a}$$

に適用して微分方程式を差分方程式

$$x(k+1) = E(s_0 h) x(k), \quad x(0) = x_0 \tag{4b}$$

に変換する。ここで，

$$Re(s_0 h) \rightarrow -\infty \text{ のとき } E(s_0 h) = x(k+1)/x(k) \rightarrow 0$$

であれば，この数値解法は L-安定である。

Dahlquist の定義にひき続き，Widlund により， $A(\alpha)$ -安定性，Gear により硬安定性の概念が定義され，これらの定義に基づいた数値計算法が提案されている。

ここでは，数値計算法が式 (2a), (2b) および，(2c) のように整理されているとして，安定領域の求め方を示しておく。

[ $Z = e^{Dh}$  を近似する公式 (式 (2a)) の場合]

$Z = e^{Dh}$  を近似する公式は式 (2a) で一般的に与えられた。この式で， $Dh$  を微分方程式の（特性根） $\times$ （刻み幅）とすると， $E(Dh)$  は近似離散化されて得られた差分方程式の特性根である。差分方程式において，その特性根の絶対値が 1 以上であれば，差分方程式は不安定になる。したがって，式 (2a) の右辺（数値計算法によって離散化された差分方程式の特性根）の絶対値  $|E(Dh)| = 1$  となるような  $Dh$  の軌跡から，解法 (2a) の数値的安定領域が求められる。すなわち，次式で， $\omega h$  を  $-\pi$  から  $\pi$  まで変え，この式の解  $Dh$  の軌跡より安定領域が求められる。

$$Z = \{b_0 + b_1(Dh) + \dots + b_m(Dh)^m\} / \{a_0 + a_1(Dh) + \dots + a_n(Dh)^n\} = \exp(i\omega h)$$

$$\omega h = -\pi \sim \pi \tag{4c}$$

また，上の近似関数の次数より，A-安定，L-安定に関して議論できるので，次のように定理としてまとめておく。

[Theorem 1]

式 (2a) のシフト演算子 ( $Z = e^{Dh}$ ) を微分演算子 ( $Dh$ ) で近似する数値計算法

$$Z = \{b_0 + b_1(Dh) + \dots + b_m(Dh)^m\} / \{a_0 + a_1(Dh) + \dots + a_n(Dh)^n\} = E(Dh)$$

において,

(1)  $m > n, b_m \neq 0, a_n \neq 0$

の場合, この数値計算法は A-安定になり得ない。

(2)  $m = n, b_m \neq 0, a_n \neq 0$

の場合, 係数  $\{a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m\}$  の与え方によっては, この数値計算法は A-安定であり得るが, L-安定にはなり得ない。

(3)  $m < n, b_m \neq 0, a_n \neq 0$

の場合で, 係数  $\{a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m\}$  が A-安定になるように与えられている場合, この数値計算法は L-安定である。

〔証明〕

(1)  $E(Dh) = \{b_0 + b_1(Dh) + \dots + b_m(Dh)^m\} / \{a_0 + a_1(Dh) + \dots + a_n(Dh)^n\}$

において,

$$m > n, b_m \neq 0, a_n \neq 0$$

であれば,

$$\operatorname{Re}(Dh) \rightarrow -\infty \text{ のとき, } |E(Dh)| \rightarrow \infty$$

となる。よって, この数値計算法は A-安定にはなり得ない。

(2)  $m = n, b_m \neq 0, a_n \neq 0$

の場合,  $\operatorname{Re}(Dh) < 0$  を満たす全ての  $Dh$  において,  $|E(Dh)| < 1$  なる  $E(Dh)$  が存在する。よって, この数値計算法は A-安定になり得る。

(3)  $m < n, b_m \neq 0, a_n \neq 0$

で, 係数  $\{a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m\}$  が A-安定になるように与えられている場合,

$$\operatorname{Re}(Dh) \rightarrow -\infty \text{ のとき, } |E(Dh)| \rightarrow 0$$

よって, この数値計算法は L-安定である。

〔 $Dh = \ln(Z)$  を近似する公式 (式 (2b)) の場合〕

シフト演算子を微分演算子で近似した場合と全く同様な考え方で, 次式で  $\omega h$  を  $-\pi$  から  $\pi$  まで変え, この変化に関する  $Dh$  の軌跡より安定領域が求められる。

$$Dh = \{d_0 + d_1 Z^{-1} + \dots + d_q Z^{-q}\} / \{c_0 + c_1 Z^{-1} + \dots + c_p Z^{-p}\}, \quad Z^{-i} = \exp(-i\omega h)$$

$$\omega h = -\pi \sim \pi \tag{4d}$$

〔 $Dh$  の有理多項式を  $Z$  の多項式で近似する公式 (式 (2c)) の場合〕

同様に, 次式で,  $\omega h$  を  $-\pi$  から  $\pi$  まで変え, この式の解  $Dh$  の軌跡より安定領域が求められる。

$$\begin{aligned} & \{f_0 + f_1(Dh) + \dots + f_r(Dh)^r\} / \{e_0 + e_1(Dh) + \dots + e_s(Dh)^s\} \\ & = (h_0 + h_1 Z^{-1} + \dots + h_j Z^{-j}) / \{g_0 + g_1 Z^{-1} + \dots + g_i Z^{-i}\}, \quad Z^{-i} = \exp(-i\omega h) \\ & \quad \omega h = -\pi \sim \pi \end{aligned} \tag{4e}$$

#### 4.2 数値計算法による特性根の変形

数値計算法の適用により、常微分方程式は離散値化され差分方程式に変換される。このとき変換された差分方程式には、数値計算上の主要な誤差（離散値化誤差）が含まれる事はすでに述べた。したがって、数値計算による誤差は、離散値化された差分方程式がどのような誤差を含むかを調べればよい。

いま、 $s_0$  を任意の複素数（特性根）として、次のようなテスト方程式

$$dx(t)/dt = s_0 x(t), \quad x(0) = x_0 \tag{4a 再録}$$

を刻み幅  $h$  のもとで、式(2a)で与えられる数値計算法に適用すると、次のような差分方程式が得られる。

$$x(k+1) = E(s_0 h) x(k), \quad x(0) = x_0 \tag{4b 再録}$$

ここで、関数  $E(s_0 h)$  は式(2a)で定義されている。上の差分方程式の特性根は  $E(s_0)$  であり、この根は  $e^{s_0 h}$  の近似である。いま、この差分方程式の近似特性根をもとの微分方程式の特性根と比べるために、 $e^{s_0 h}$  の逆関数で、微分方程式の根平面に逆写像する。

$$\bar{s}_0 h = \ln \{E(s_0 h)\} \tag{5a}$$

この複素数  $\bar{s}_0 h$  は  $s_0 h$  の近似値を有する。この意味は、与微分方程式の特性根  $s_0$  が数値計算の適用によって、 $s_0$  の値に変形で受けたことを意味する。もし、 $E(s_0 h) = e^{s_0 h}$  であれば、 $\bar{s}_0 h = s_0 h$  になる。すなわち、方程式の離散値化に無限級数和で与えられる指数関数を使用すれば離散値化に伴う根の変形は受けない。 $s_0 h$  の値によって、 $\bar{s}_0 h$  の受ける変形の度合いは異なる。一般に、 $|s_0 h|$  が小さければ小さい程、 $\bar{s}_0 h$  の受ける変形は小さい。

$$s_0 h = -\zeta \omega h + i \omega h \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{5b}$$

として、 $\omega h = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ ,  $\zeta$  を 0 から連続的に 1 まで変化させ、さらに  $\zeta = 0.0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0$  とし、 $\omega h$  を 0 から 3.14 まで連続的に変化させたときの  $s_0 h$  の軌跡に対し、 $\bar{s}_0 h$  がどのような変形を受けた軌跡になるかを調べることで、数値計算法の性質を明らかにすることができる。さらに、各  $s_0 h$  において  $\bar{s}_0 h$  が  $s_0 h$  に対しどれだけの相対変化を受けるかを調べることで、数値計算法の誤差を評価できる。

#### [Definition 4 特性根の相対誤差]

数値計算法の適用により微分方程式の（特性根） $\times$ （刻み幅）の値は変形をうける。この変形は数値計算法の誤差であり、その相対誤差を次のように定義する。

$$\varepsilon_{s_0 h} = |(\bar{s}_0 h - s_0 h) / s_0 h| \times 100 = |(\bar{s}_0 - s_0) / s_0| \times 100(\%) \tag{5c}$$

〔例 7〕 特性根の相対誤差 1 (%) は解にどのように影響するか。

微分方程式

$$d^2x(t)/dt^2 + 2a\{dx(t)/dt\} + (a^2 + b^2)x(t) = b\delta(t)$$

$$x(0) = 0, \quad dx(t)/dt|_{t=0} = 0$$

$\delta(t)$  はデルタ関数

の特性根は

$$s_0 = -a \pm ib$$

で与えられ、特性根が次のように1(%)の誤差をもつとする。

(1)  $s_0 = -a + ib(1 + 0.01)$

(2)  $s_0 = -a + ib(1 - 0.01)$

(3)  $s_0 = -a(1 + 0.01) + ib$

(4)  $s_0 = -a(1 - 0.01) + ib$

ここで、次の4種の特性根

(1)  $s_0 = -0.02500 + i 1.04270$

(2)  $s_0 = -0.33720 + i 0.92040$

(3)  $s_0 = -0.62380 + i 0.67260$

(4)  $s_0 = -0.83740 + i 0.26930$

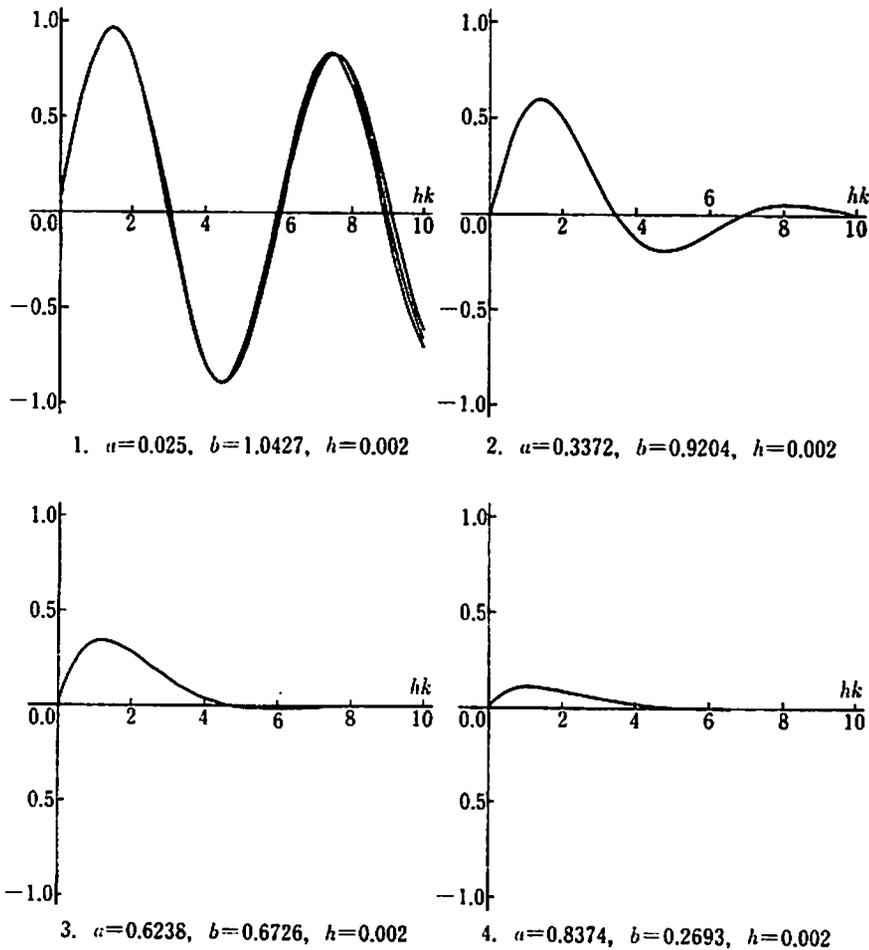


図2 特性根が1%の相対誤差を持つときの解の誤差

が上の相対誤差を持つ場合2階の常微分方程式の解はどのような影響を受けるか図2に示す。この図より、解のトラジェクトリの減衰が大きい場合は、特性根1(%)程度の誤差はほとんど影響がない。減衰が小さい場合、1(%)の周期の誤差が観測される。

式(2b),(2c)で与えられる数値計算法の場合も同様に、特性根の変形を求めることができる。ただし、式(2b),(2c)で与えられる数値計算法の中で、多段法の場合多少の違いがある。すなわち、 $m$ 段法の公式を $n$ 階の微分方程式に適用すると、結果として得られる差分方程式は、 $mn$ 階となる。

したがって、例えば、式(4a)のような一階の微分方程式を式(2b)の公式に適用すると、

$$d_0x(k)+d_1x(k-1)+\dots+d_qx(k-q)=s_0hc_0x(k)+s_0hc_1x(k-1)+\dots+s_0hc_{p-1}x(k-p)$$

なる $p$ 階( $p>q$ の場合)の差分方程式となり、この差分方程式の特性方程式は次のようになり、

$$d_0+d_1z^{-1}+\dots+d_qz^{-q}=s_0hc_0+s_0hc_1z^{-1}+\dots+s_0hc_{p-1}z^{-p}$$

この特性方程式は $p$ 個の特性根 $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ を持つことになる。これらの特性根のうち一つの根だけが $e^{s_0h}$ を近似し、他の根は無縁な根となる。よって $e^{s_0h}$ に最も近い根を $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ の中から選択して式(5a),(5c)に基づいて根の相対誤差を求めることができる。

式(2c)で与えられる数値計算の場合も、事情は全く同様である。

### §5. Runge Kutta 4次法：公式使用に当たっての注意と解の信頼性

例3よりRunge Kutta 4次法は式(2a)の近似を利用する数値計算法であり $e^{Dh}$ を次のように近似している。

$$e^{Dh}=1+Dh+(Dh)^2/2!+(Dh)^3/3!+(Dh)^4/4!$$

いまこの公式より、特性根 $s_0h$ はどのように変形を受けるか検討する。 $s_0h$ を

$$s_0h=-\zeta\omega h+i\omega h\sqrt{1-\zeta^2} \tag{5b 再録}$$

とし、 $\omega h=0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ 、 $\zeta$ を0から1まで連続的に変化させ、さらに $\zeta=0.0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0$ とし $\omega h$ を0から3.14まで連続的に変化させたときの $s_0h$ に対し、 $s_0h$ がどのような変形をうけるかを図3に示す。また、式(4c)を使って計算した安定領域、Definition 4に示した式(5c)を使って計算した相対誤差を図4に示す。図3、4に示すRunge Kutta 4次法の公式の特性より次のような定理を得ることができる。

[Theorem R-1]

安定な $n$ 階の同次定係数線形常微分方程式

$$dx(t)/dt=Ax(t), \quad x(0)=x_0$$

を刻み幅 $h$ でRunge Kutta 4次法で解いたところ、数値的に不安定となり、離散時刻 $l+1$ で計算続行不能となった。不安定な解ベクトル $x(l), x(l-1), x(l-2), \dots$ から一次独立であるようなベクトルの最大の組 $x(l), x(l-1), \dots, x(l-M+1)$ をみつける。

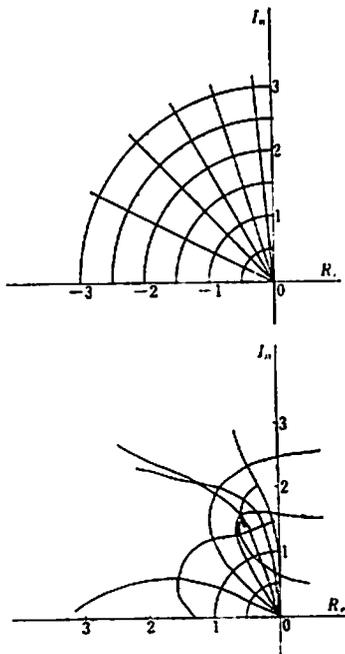
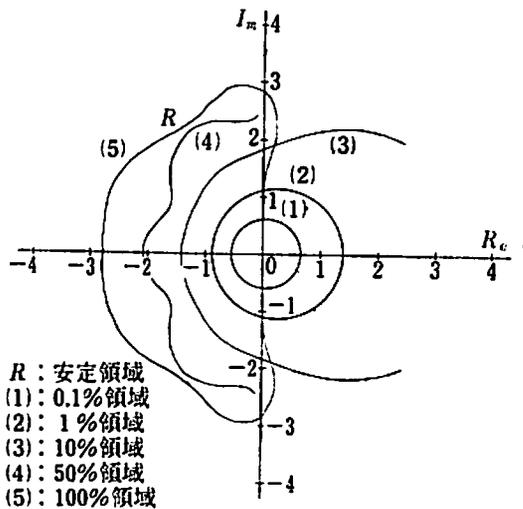


図3 Runge Kutta 4次法による特性根の変形上図は与方程式の特性根軌跡, 下図は Runge Kutta 4次法によって変形を受けた特性根軌跡



R: 安定領域  
 (1): 0.1%領域  
 (2): 1%領域  
 (3): 10%領域  
 (4): 50%領域  
 (5): 100%領域

図4 Runge Kutta 4次法のA-安定領域と相対誤差

$$[x(l), x(l-1), \dots, x(l-M+1)] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{M-1} \end{bmatrix} = x(l-M)$$

の係数  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_M$  に関する連立方程式を解き, この係数を含む多項式

$$a_0 z^M + a_1 z^{M-1} + \dots + a_{M-1} z - 1 = 0$$

を解く, この解  $z_i, i=1, 2, \dots, M$  のうち

$$\text{Max}\{|z_i|, i=1, 2, \dots, M\} = z^*$$

とする。次に

$$1 + y + (1/2!)y^2 + (1/3!)y^3 + (1/4!)y^4 = z^*$$

を解き, その解のうち, 図4の左半平面上にあり, 且つ同平面の安定領域 R 外にある解を  $y^*$  とする。

$$\{c | c > 0, cy^* \in R\}$$

を満たす実数  $c$  を求め, 刻み幅を  $ch$  とすれば安定な数値解が求められる。

[証明]

$$E(x) = 1 + x + (1/2!)x^2 + (1/3!)x^3 + (1/4!)x^4 \tag{6a}$$

とする。Runge Kutta 4次法を与式に適用すると, 次の差分方程式が得られる。

$$x(k+1) = E(Ah)x(k), \quad x(0) = x_0 \tag{6b}$$

$E(Ah)$  の固有値  $z_i, i=1, 2, \dots, n$  は

$$|z_1| \geq |z_2| > \geq \dots \geq |z_n| \quad (6c)$$

とし、これらの対応する固有ベクトル  $t_i, i=1, 2, \dots, n$  とすると、これらのベクトルは、 $n$ 次元空間の基底となる。

いま、微分方程式の初期値を

$$x_0 = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \dots + \alpha_n t_n \quad (6d)$$

で表わす。 $x_0=0$  のとき、方程式の解  $x(t)=0$  となり、トリビアルであり、これらの係数  $\alpha_i, i=1, 2, \dots, n$  のうち少なくとも1つは0ではない場合について考える。このとき、離散値化された差分方程式の  $k$ -ステップでの解は

$$\begin{aligned} x(h) &= \{\alpha_1 z_1^k t_1 + \alpha_2 z_2^k t_2 + \dots + \alpha_n z_n^k t_n\} \\ &= z_1^k \{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 (z_2/z_1)^k t_2 + \dots + \alpha_n (z_n/z_1)^k t_n\} \end{aligned} \quad (6e)$$

となる。ここで、数値計算が続行できない時刻  $k=l$  近傍の時間では、上式のいくつかの項は  $(z_j/z_1)^k \rightarrow 0, k \rightarrow l$  となる。この場合  $(n-M)$  個のベクトルが消え、一次独立のベクトルの数は  $M$  個であることより、 $k=(l-M) \sim l$  に対して、

$$x(k) = \alpha_1 z_1^k t_1 + \dots + \alpha_M z_M^k t_M \quad (6f)$$

で表わすことができる。いま、上式を

$$a_0 x(l) + a_1 x(l-1) + \dots + a_{M-1} x(l-M+1) - 1x(l-M) = 0 \quad (6g)$$

に代入し、式を整理すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} &\beta_1 (a_0 z_1^M + a_1 z_1^{M-1} + \dots + a_M) t_1 \\ &+ \beta_2 (a_0 z_2^M + a_1 z_2^{M-1} + \dots + a_M) t_2 \\ &+ \\ &+ \beta_M (a_0 z_M^M + a_1 z_M^{M-1} + \dots + a_M) t_M \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6h)$$

ここで、 $\beta_i = \alpha_i z_i^{l-M}$  であり、少なくとも  $\beta_i, i=1, 2, \dots, M$  の内1つの係数は0でない。またベクトル  $t_1, t_2, \dots, t_M$  は一次独立であることより、

$$a_0 z_1^M + a_1 z_1^{M-1} + \dots + a_M = 0 \quad (6i)$$

でなければならない。上式の解のうち、

$$\text{Max}\{|z_i|, i=1, 2, \dots, M\} = z^* \quad (6j)$$

は、与方程式の行列  $A$  の絶対値最大固有値を式(6a)で近似Z変換したものである。その  $A$  の固有値は

$$1 + y + y^2/2! + y^3/3! + y^4/4! = z^* \quad (6k)$$

を満たす。この式の解は、4種類あり、このうち図4の左半平面上にあり、かつ、同図の安定領域  $R$  外にある解を  $y^*$  とする。この解が  $R$  内にあるように刻み幅  $h$  を再決定してやる。つまり、 $\{c|c>0, cy^* \in R\}$  を満たす実数  $c$  を求め、刻み幅を  $ch$  とすると安定な数値

解が求まる。

[Remark R-1]

Theorem 1 において

- (i)  $M=1$  のときは、スティフな1実根をもつ場合であり、このときは、刻み幅を  $2.827h/|y^*|$  より小さく選べば安定な数値解が求まる。
- (ii)  $M=2$  のときは、スティフな2重根あるいは、一つのスティフな共役複素根を持つ場合である。

[Theorem R-2]

安定な同次定係数線形常微分方程式を刻み幅  $h$  で、Runge Kutta 4次法を用いて解いたところ安定に解けた。このとき、同じ方程式を刻み幅  $0.3h$  で解いた数値解の相対誤差は1%以内である。

[証明]

刻み幅  $h$  のとき、数値的に安定な解を得られたことにより、この方程式の

$$(\text{絶対値最大の特性根 } \lambda_{\max}) \times (\text{刻み幅 } h)$$

は図4の安定領域  $R$  内にあり、最悪の場合安定限界となる。いま、この安定限界に  $\lambda_{\max}h$  があるとし、刻み幅  $h$  を  $0.3h$  とすると、 $\lambda_{\max} \times 0.3h$  は、図4の1%領域内となる。従って、数値解は相対誤差1%以内となる。

[Corollary R-1]

安定な同次定係数線形常微分方程式を、刻み幅  $h$  で Runge Kutta 4次法を用いて解いたところ安定に解け、同じ方程式を刻み幅  $10h/3$  で解いても安定に解けた。このとき、刻み幅  $h$  で解いた数値解の相対誤差は、1%以内である。

[証明]

略

[Theorem R-3]

単モードの線形の振動方程式を考える。数値解が求まり、1周期7点以上のステップとなるような刻み幅を選んだ場合、解は相対誤差1%以内である。

[証明]

単モードの線形の振動方程式の固有角周波数を  $\omega$  とする。図4より、

$$\begin{aligned} \omega h &< 1 \\ h &< 1/\omega \end{aligned} \tag{7a}$$

のとき、これは1%領域内に存在するので相対誤差は1%以内である。また、

$$\omega = 2\pi/T \quad (T: \text{周期}) \tag{7b}$$

であるから、これを式(7a)に代入すると、

$$h < 1/\omega = 1/(2\pi/T) = T/2\pi \quad (7c)$$

となり、1周期につき7ステップ以上の離散値解をもつように刻み幅を選べば、相対誤差は1%以内となる。

〔Theorem R-4〕

複数モードの線形の振動方程式で、最大周期を  $T_{\max}$ 、最小周期  $T_{\min}$  とする。いま、最大周期のモードは卓越し他のモードは重要でないとする。このとき、 $6.29 T_{\max}/T_{\min}$  ステップ以上となるように刻み幅を選んだ場合は、相対誤差1%以内である。

〔証明〕

複数モードの線形の振動方程式の解は、図4の虚軸上に  $i\omega$  として表れる。ここで、この方程式が相対誤差1%以内で解かれるためには、

$$\omega h < 1 \quad (8a)$$

でなければならない。したがって、最小周期の解成分が誤差1%以内であるためには、

$$\omega = 2\pi/T \quad (7a \text{ 再録})$$

より、

$$\begin{aligned} \omega h &= 2\pi h/T_{\min} < 1 \\ h &< T_{\min}/2\pi \end{aligned} \quad (8b)$$

いま、刻み幅を  $h = T_{\min}/2\pi$  と選んだとすると、最大周期あたりのステップ数は

$$n = T_{\max}/h \quad (8c)$$

で求まるから、

$$\begin{aligned} n = T_{\max}/h &> 2\pi T_{\max}/T_{\min} \\ &\doteq 6.29 T_{\max}/T_{\min} \end{aligned} \quad (8d)$$

を満たすステップ数が必要となる。

〔Corollary R-2〕

複数モードの線形の振動方程式で最大周期  $T_{\max}$ 、最小周期  $T_{\min}$  とする。いま、最大周期のモードは卓越し他のモードは重要でないとする。このとき、 $2.23 T_{\max}/T_{\min}$  ステップ以上となるように刻み幅を選んだ場合解は、安定に解ける。

〔証明〕

略

〔Theorem R-5〕

熱方程式のような非振動的解をもつ1階の線形方程式を考える。解が、ある定常状態から他の定常状態に移行するものとする。はじめの値と終りの値の変化の63%になった時刻を  $T$  とする。刻み幅  $h$  が  $h < T$  であれば解は、相対誤差1%以内である。

〔証明〕

$T$ は、時定数と呼ばれる値で、固有値 $\lambda$ と次の関係がある。

$$T = -1/\lambda \quad (T > 0 \text{ より } \lambda > 0) \quad (9a)$$

これを、

$$h < T \quad (9b)$$

に代入すると、

$$\begin{aligned} h &< -1/\lambda \\ \lambda h &< -1 \end{aligned} \quad (9c)$$

図4において、

$$|\lambda h| < 1 \quad (9d)$$

のとき1%領域内にある。したがってこの解の相対誤差は1%以内である。

#### [Corollary R-3]

最大時定数  $T_{\max}$ 、最小時定数  $T_{\min}$  を含む非振動線形方程式がある。いま、最小時定数の応答成分は無視できるものとする。この方程式が安定に解けるためには、時刻  $T_{\max}$  に至るまでに、 $0.36 T_{\max}/T_{\min}$  以上のステップ数を必要とする。

#### [証明]

与方程式が安定に解けるためには、

$$\lambda h > -2.8 \quad (\lambda < 0, h > 0) \quad (10a)$$

でなければならない。時定数と固有値の間には、

$$T = -1/\lambda \quad (9a \text{ 再録})$$

なる関係がありステップ数は、

$$n = T_{\max}/h \quad (8c \text{ 再録})$$

であることから、

$$\begin{aligned} \lambda h &> -2.8 \\ -2.8 &< h < 0 \\ -2.8 &< -\lambda h/T_{\min} < 0 \\ 2.8 T_{\min} &> h \end{aligned}$$

したがって

$$n = T_{\max}/h > T_{\max}/2.8 T_{\min} \doteq 0.36 T_{\max}/T_{\min} \quad (10b)$$

となる。

## §6. む す び

この報告では、常微分方程式の数値解法における数値解の信頼性を評価する方法を提案し、Runge Kutta 法に適用した。今後は、Runge Kutta 法以外の数値解法にも適用させるとも

に、数値計算法の選択・使用に関するコンサルテーションシステムを考え、さらに数値計算法の設計に適用する。

#### 参 考 文 献

- 1) 渡辺嘉二郎: 数値積分における誤差. 精密機械, Vol.49, No. 7 (1983), 113.
- 2) 嶋田健司・渡辺嘉二郎: 時間応答の直接計算法における誤差発生メカニズム, 計測と制御, Vol. 19, No. 4 (1980), 401.
- 3) 清水信行・本間美知枝・山本鎮男・渡辺嘉二郎・嶋田健司: 大次元常微分方程式の直接数値積分法 (積分法の評価と選定基準), 日本機械学会論文集, 46, 401 (1980), 26.
- 4) 渡辺嘉二郎, 寺岡 誠: 常微分方程式数値解法の設計. 情報処理学会論文誌, Vol. 20, No. 1 (1979).