

領域分割を考慮した画像の F-クラスタリングと評価

Hirota, Kaoru / Iwama, Kazuya / 岩間, 和也 / 廣田, 薫

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学工学部研究集報 / 法政大学工学部研究集報

(巻 / Volume)

22

(開始ページ / Start Page)

95

(終了ページ / End Page)

105

(発行年 / Year)

1986-03

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004050>

領域分割を考慮した画像の

F-クラスタリングと評価

廣 田 薫*・岩 間 和 也**

Fuzzy Clusterings of Aerial Images and Their Evaluation Based on Image Dependent Area Partition

Kaoru HIROTA* and Kazuya IWAMA**

Abstract

Texture analysis of color aerial images has been done based on various Fuzzy clustering algorithms. Each image is given by RGB space (512×512 pixels, 8 bits gray levels), and is fed to an image processing system TOSPIX & DS600/80. Each image is divided into image dependent regions and texture features are calculated for each region of RGB space such as gray-level-average, standard deviation and B.V.Q. (bounded variation quantity) for $\theta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$. Each region is expressed as an element/vector of 18-dimensional vector space. Twelve (=4×3) Fuzzy clustering methods that are F. ISODATA, *TN*, *TD*, *TW* with power indices, $p=1.2, 1.6, 2.0$ are applied to these vector sets. As a result 12 Fuzzy texture region images are obtained for each aerial image. These various results are investigated from a viewpoint of subjective entropy of probabilistic sets.

§ 1. 緒 言

パターン認識などの分野においては与えられたデータ集合の各要素をクラス分けするクラスタリング手法が多用されており、その技法は画像処理に関する研究にも応用されている。一方、人間がもっている情報や判断は本来あいまいなものであり、このあいまいさを工学的に扱うことは重要である。

これら2つを相互に取り入れることが積極的に検討され研究されている。従来のクラスタリング手法ではデータ集合の各要素があるクラスに属するか否かを{0,1}の2値的に決定していた。しかし、人間の判断が関与するとそれだけでは十分な説明がつかない場合が多いので、中間のあいまい状態も考えに入れた[0,1]多値評価の概念をクラスタリング手法に取り入れる理論が開発され、提案された。それがファジィ・クラスタリングである^{1~4)}。

* 電気工学科計測制御専攻

** 工学研究科電気工学専攻

パターン認識の一分野であるテクスチャ解析にファジィ・クラスタリングを応用して静止画像のテクスチャ解析を行った。データ画像は TOSPIX と DS 600/80 による画像処理装置により赤成分 (R), 緑成分 (G), 青成分 (B) の3画面 (1画面 512×512画素, 各画素8ビット濃淡画像) の合成で与えられるカラー静止画像 (航空写真) である。

画像の領域分割に関して RGB 成分の3画面を等しく, 強制的に32×32の正方領域 (1つの小領域は16×16画素) に分割して, 各小領域から画像の特徴量を抽出してテクスチャ解析を行う方法はすでに報告している⁶⁾。しかし, この方法では最終結果の画像のテクスチャ境界部が不自然な形状になる欠点がある。今回の報告では, この点を改善した。

まず, RGB 成分の3画面から各々の濃淡分布ヒストグラムを求めて, 各成分ごとに2つのしきい値により画像を量子化する。そして孤立点除去のために中央値フィルターをかけて領域を明確にし, 3画面を基に領域を決定する。その各領域ごとに原画像3成分より画像の特徴量を抽出した。

特徴量としては画像濃淡値の平均値, 標準偏差および 0°, 45°, 90°, 135° 方向の有界変動量⁶⁾の計6種類を用いた。RGB 成分の3画面から各々6特徴量を抽出し, 1つの領域を18特徴量でベクトル表現して, ファジィ・クラスタリングによるテクスチャ解析を行った。

ファジィ・クラスタリングには, ファジィ・ISODATA⁴⁾ とその変形の TN, TD, TW⁷⁾ の各々でパラメータを3通りに変えた12種類を用いた。また, それぞれで得られる分割行列を, 総合的に主観エントロピー⁸⁾により評価した。

まず, ファジィ・クラスタリングについて簡単に紹介し, 主観エントロピーによる評価を説明する。次に画像への適用を述べ, 最後に結果の評価を示す。

§2. ファジィ・クラスタリング

ファジィ・クラスタリングとは, データ集合

$$X = \{x_j\}_{j=1}^n \quad x \in R^s \quad (2-1)$$

を c 個のクラスタに分類して, 各データが各クラスタに属する割合を分割行列 U で表すものである⁴⁾。

$$U = [u_{ij}] \quad i=1, \dots, c \quad j=1, \dots, n \quad (2-2)$$

$$u_{ij} \in [0, 1] \quad (2-3)$$

$$1 \leq i \leq c \quad \sum_{j=1}^n u_{ij} > 0 \quad (2-4)$$

$$1 \leq j \leq n \quad \sum_{i=1}^c u_{ij} = 1 \quad (2-5)$$

u_{ij} は j 番目のデータが i 番目のクラスタに属する割合 (帰属度) を表し, (2-4), (2-5) 式は制約条件である。(2-4)式は各々のクラスタには, かならず正の帰属度が存在しなければならず,

また、(2-5)式は各データが、各々のクラスタに属する割合の総和は 1 に規格化されなければならないことを表している。

目的関数型クラスタリング手法では、分割行列 U を目的関数の最小化によって決定する。目的関数にはいくつかの型があるが、ここでは標準的な

$$f = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n g[w(x_j), u_{ij}] d(x_j, v_i) \quad (2-6)$$

を考える。ここで $w(x_j)$ は各データに与えられる事前荷重であり、 $d(x_j, v_i)$ は x_j と v_i (付加要素) の非類似度である。非類似度は、距離よりも弱い概念であり

$$d(x_j, v_i) \geq 0 \quad (2-7)$$

$$d(x_j, v_i) = d(v_i, x_j) \quad (2-8)$$

の 2 つの公理を満たす尺度として定義されている。

f の最小化は v と U を変えて、

$$\min\{f | v, U: (2-4) \& (2-5)\} \quad (2-9)$$

で行う。この一例として

$$f_p(U, v) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n (u_{ij})^p \|x_j - v_i\|^2 \quad (1 \leq p < \infty) \quad (2-10)$$

の局所最小化により U を決定する反復アルゴリズムが、Bezdek のファジィ・ISODATA⁴⁾ であり、次の手順で計算される。

- ① クラスタ数 c を定め、初期分割行列 U^0 と適当な収束判定値 ε を与える。(ただし、 U^0 として全帰属度を $u_{ij} = 1/c$ として与えたのでは不都合であることに注意しよう。)
- ② (2-11)式により中心クラスタ・ベクトルを求める。

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^n (u_{ij})^p x_j}{\sum_{j=1}^n (u_{ij})^p} \quad 1 \leq i \leq c \quad (2-11)$$

- ③ (2-12)式により U を \hat{U} に更新する。

$$\hat{u}_{ij} = 1 / \sum_{k=1}^c \left(\frac{\|x_j - v_i\|^2}{\|x_j - v_k\|^2} \right)^{1/(p-1)} \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq c \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \quad (2-12)$$

- ④ $|\hat{U} - U| \leq \varepsilon$ となったとき計算終了、さもなければ $U = \hat{U}$ として②へ戻る。

S.Z. Seilim と M.A. Ismail は、ファジィ・ISODATA の変形として 3 種類の要素にしきい値を用いるセミ・ファジィのアルゴリズム TN, TD, TW を提唱した⁷⁾。TN はクラスタ数に、TD は (2-10) 式の $\|x_j - v_i\|^2$ に、TW は u_{ij} にそれぞれしきい値を用いながら反復する手法である。

§ 3. 主観エントロピーによる分割行列の評価

与えられたデータがどのような構造であるかによって、どのアルゴリズムが実際のデータ構造をうまく表現するかという問題が生じる。しかし、データ構造が不明あるいはあいまいな場合に

において、これは非常に難しいことである。そこでアルゴリズムを1つに絞るよりも、各種アルゴリズムを適用して得られる分割行列を総合的に捉えるほうがよいと考えられる。それを確率集合と主観エントロピーの観点から考察する。

分割行列 U の第 i 行 $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}$ は、各データの i 番目のクラスタに対する帰属度(メンバーシップ)を表しているので、 X 上の1つのファジィ集合 C_i

$$C_i : X \rightarrow [0, 1] \tag{3-1}$$

を形成していることになる。したがって、1つの分割行列 U は、 c 個のファジィ集合の族とみなせ、

$$U = [C_1, C_2, \dots, C_c]^T \tag{3-2}$$

となる。これを分割ファジィ集合と呼ぶ⁹⁾。

今、クラスタリングアルゴリズムが k 個あるものとし、その各々から得られる k 個の分割行列 $\{U_i\}$ のすべてで、行番号(クラスタ番号)は本質的に同一順序に番号付けされているものとして、それらを総合して評価対象にする。

k 個の分割行列を $\{U_i\}_{i=1, \dots, k}$ とすれば、ファジィ集合の族 $\{C_i^l\}_{l=1, \dots, c, i=1, \dots, k}$ が得られ、 $\{C_i^l\}$ は(3-3)式のように c 個の確率集合 $\{A_i\}$ として表現できる。

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1^{11} \\ C_1^{12} \\ \vdots \\ C_1^{1k} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} C_2^{11} \\ C_2^{22} \\ \vdots \\ C_2^{2k} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A_c = \begin{bmatrix} C_c^{11} \\ C_c^{c2} \\ \vdots \\ C_c^{ck} \end{bmatrix} \tag{3-3}$$

また、 k 個の分割行列 $\{U_i\}$ の各々に対応するアルゴリズムを w_i として、その全体を

$$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \tag{3-4}$$

とする。さらに各アルゴリズムの評価の重要度を表現するためにパラメータ空間と呼ぶ確率空間

$$(\Omega, B, P) \tag{3-5}$$

を考える。すると確率集合 A_i は、

$$A_i : X \times \Omega \rightarrow [0, 1] \tag{3-6}$$

なる定義関数により定義される。ここで A_i は、各 $x (\in X)$ を固定すると B 可測であるものとする¹⁰⁾。

ある2値事象の生起確率を p とすれば、その事象のエントロピーは、Shannon により

$$h(p) = -[p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)] \tag{3-7}$$

で定義されている¹¹⁾。 x の評価にあいまいさがなく $\{0, 1\}$ 2値評価の場合は、確率集合が純粹状態にあると呼ばれ、その場合は全ての情報が

$$\Omega_1(x) = \{w | A(x, w) = 1\} \tag{3-8}$$

$$\Omega_0(x) = \{w | A(x, w) = 0\} \tag{3-9}$$

$$p(x) = \int_{\Omega_1(x)} dP \tag{3-10}$$

きるので、確率集合 A の \mathbf{x} に関する主観エントロピー $H(\mathbf{x}, A)$ は

$$H(\mathbf{x}, A) = -\sum_{e=1}^m [a_e p_e(\mathbf{x}) \log_2 a_e p_e(\mathbf{x}) + (1-a_e) p_e(\mathbf{x}) \log_2 (1-a_e) p_e(\mathbf{x})] \quad (3-18)$$

$$= -\sum_{e=1}^m p_e(\mathbf{x}) \log_2 p_e(\mathbf{x}) + \sum_{e=1}^m p_e(\mathbf{x}) h(a_e) \quad (3-19)$$

で与えられる。

複数の確率集合の場合も同様に定義でき、確率集合 A と B の \mathbf{x} に関する主観エントロピー $H(\mathbf{x}, A, B)$ は

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, A, B) = & -\sum_{e=1}^l \sum_{f=1}^m p(a_e, b_f, \mathbf{x}) \log_2 p(a_e, b_f, \mathbf{x}) \\ & + \sum_{e=1}^l p(a_e, \mathbf{x}) h(a_e) + \sum_{f=1}^m p(b_f, \mathbf{x}) h(b_f) \end{aligned} \quad (3-20)$$

で与えられる。ここで $\{a_e\}_{e=1}^l$, $\{b_f\}_{f=1}^m$ はそれぞれ A と B の取る $[0, 1]$ 区間内の値である。また、確率集合 A と B の \mathbf{x} に関する相互主観エントロピー $I(\mathbf{x}, A, B)$ は、

$$I(\mathbf{x}, A, B) = H(\mathbf{x}, A) + H(\mathbf{x}, B) - H(\mathbf{x}, A, B) \quad (3-21)$$

で与えられる。

以上の議論は個別のデータ \mathbf{x} についてであるが、全体的には次に示すデータ集合 X 全体に関する平均値が重要な尺度になる。

確率集合 A_i に関する X の平均主観エントロピー

$$\bar{H}(X, A_i) = (1/n) \sum_{k=1}^n H(\mathbf{x}_k, A_i) \quad (3-22)$$

確率集合 A_i と A_j に関する X の平均主観エントロピー

$$\bar{H}(X, A_i, A_j) = (1/n) \sum_{k=1}^n H(\mathbf{x}_k, A_i, A_j) \quad (3-23)$$

確率集合 A_i と A_j に関する X の平均相互主観エントロピー

$$\bar{I}(X, A_i, A_j) = (1/n) \sum_{k=1}^n I(\mathbf{x}_k, A_i, A_j) \quad (3-24)$$

§4. 画像の領域分割と領域の特徴抽出

画像処理装置 TOSPIX により赤 (R), 緑 (G), 青 (B) 成分の3画面 (1画面 512×512画素, 各画素8ビット濃淡画像) の合成でデータ原画像が与えられる。その原画像1画面分の濃淡値を配列 $P(512, 512)$ として, スーパーミニコン DS 600/80 に読み込み, 領域の分割を行った。そして, 領域を画像特徴量でベクトル表現して, ファジィ・クラスタリングによりテクスチャ解析を行った。

特徴量としては画面全体の情報を反映する大局的特徴量として濃淡の平均値, 標準偏差を用

い、また一部分のみの情報で決定される局所的特徴量として有界変動量⁹⁾の $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ 方向を用いた。有界変動量とはパターン⁹⁾の局所的性質を反映した計算量の少ない特徴量として、数学における有界変動関数の全変動の概念を応用して定義されたものである。デジタル画像の場合は θ 方向に隣合っている画素の濃淡値の差分の絶対値をとったものを加え合わせるだけで計算できる。ただし、平均値、標準偏差と有界変動量との間での特徴量のつり合いを考えて有界変動量は差分回数で割った値を用いた。

画像の領域分割と特徴量抽出は次に示す手順で行った。

- ① カラーデータ原画像の RGB 各成分（写真1）の濃淡ヒストグラムより、各成分ごとに2つのしきい値を求める。
- ② その2つのしきい値により各成分ごとに画像を3値化する。このとき、孤立点が多ければ、孤立点除去（ 5×5 中央値フィルター）を行う。（写真2）
- ③ 各成分ごとに濃淡値変化部分とその他の部分を区分した2値化線画像（すなわち濃淡値変化部分のみを白、その他の部分を黒とした2値化画像）を作成する。そして RGB 各成分よりできた2値化線画像を加え合わせる。（写真3）
- ④ ③の線画の細線化を行う。
- ⑤ 線で囲まれた部分を同一の領域とみなし、各画素に同一の番号を付け、データ原画像 P と同一サイズの領域番号の表 PN を作成する。
- ⑥ 表 PN を1個ずつ探索して領域番号 N を調べる。データ原画像の対応する画素の濃淡値の総和 S_N と2乗総和 SS_N および領域 N の大きさ（画素数） SP_N を領域ごとに求めて、平均値 m_N と標準偏差 σ_N を計算する。

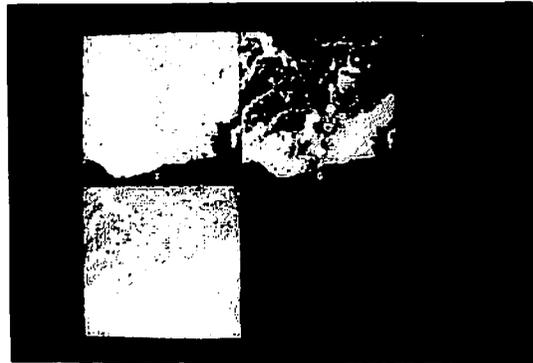


写真1 原画像のRGB成分



写真2 RGB成分の3値化画像

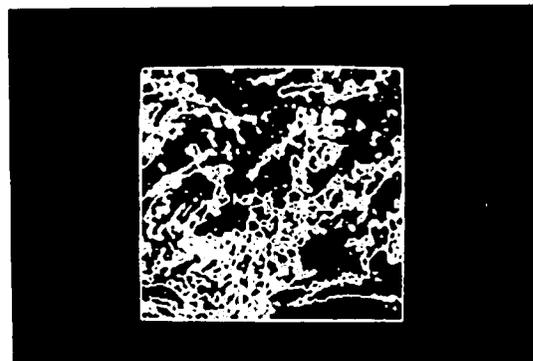


写真3 線画像

$$m_N = S_N / SP_N \tag{4-1}$$

$$\sigma_N = \sqrt{SS_N / SP_N - m_N^2} \tag{4-2}$$

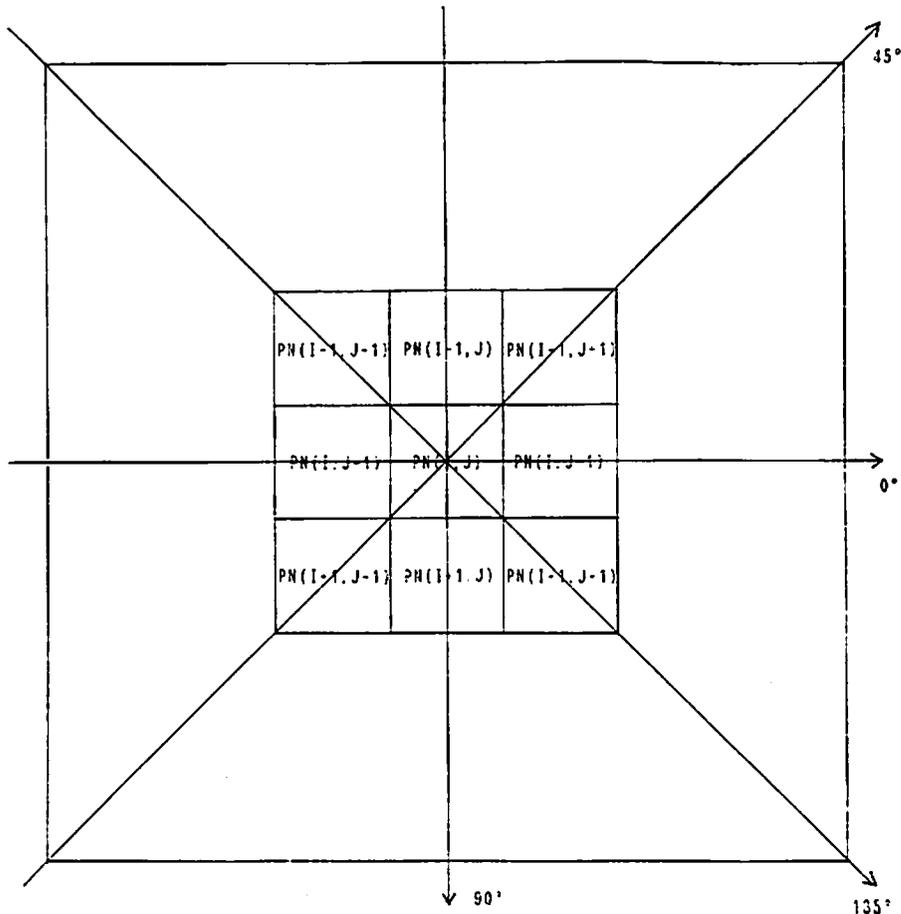


図 4-1 PN の探索方向

⑦ 有界変動量 (BVQ) を計算する。θ=0° の場合、PN を 0° 方向 (横方向) に 1 個ずつ探索して、隣接する 2 個が同一領域番号のときのみ、領域ごとに対応する画素の濃淡値 P の絶対差分総和 $SD_{N,\theta=0^\circ}$ を計算する。また同時に、そのときの差分回数 $D_{N,\theta=0^\circ}$ を求めておき、全画面の処理終了後、領域 N ごとに 0° 方向の有界変動量を計算する。

$$SD_{N,\theta=0^\circ} = \sum \{ |P(I, J-1) - P(I, J)| \mid PN(I, J-1) = PN(I, J) \} \quad (4-3)$$

$$BVQ_{N,\theta=0^\circ} = SD_{N,\theta=0^\circ} / D_{N,\theta=0^\circ} \quad (4-4)$$

θ=45°, 90°, 135° のときも PN の探索方向が θ 方向に変化するだけで同様の計算を行う。

(図4-1)

$$SD_{N,\theta=45^\circ} = \sum \{ |P(I+1, J-1) - P(I, J)| \mid PN(I+1, J-1) = PN(I, J) \} \quad (4-5)$$

$$BVQ_{N,\theta=45^\circ} = SD_{N,\theta=45^\circ} / D_{N,\theta=45^\circ} \quad (4-6)$$

$$SD_{N,\theta=90^\circ} = \sum \{ |P(I-1, J) - P(I, J)| \mid PN(I-1, J) = PN(I, J) \} \quad (4-7)$$

$$BVQ_{N,\theta=90^\circ} = SD_{N,\theta=90^\circ} / D_{N,\theta=90^\circ} \quad (4-8)$$

$$SD_{N,\theta=135^\circ} = \sum \{ |P(I-1, J-1) - P(I, J)| \mid PN(I-1, J-1) = PN(I, J) \} \quad (4-9)$$

$$BVQ_{N,\theta=135^\circ} = SD_{N,\theta=135^\circ} / D_{N,\theta=135^\circ} \quad (4-10)$$

⑧ 同一の表 PN を基にデータ原画像 RGB 成分画面に⑥⑦を行い、1 つの領域を 18 の特徴量

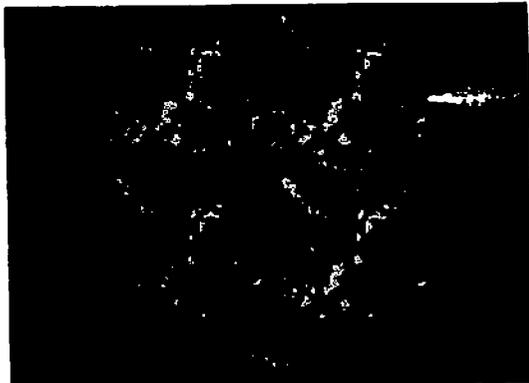


写真4 原画像1とTNによる結果 (C=5)



写真5 原画像2とTNによる結果 (C=8)

でベクトル表現する。

クラスタ数を任意に与え、以上のようにベクトル表現された各領域が各々のクラスタに属する割合 (分割行列 U) をファジィ・ISODATA および TN, TD, TW の各々でパラメータ ((2-10)式における p) を 1.2, 1.6, 2.0 に設定した計12の手法によって計算した。同時にテクスチャ解析の結果を視覚的に表示するため、各領域が帰属度最大のクラスタに属するとしてクラスタごとに色分けした。

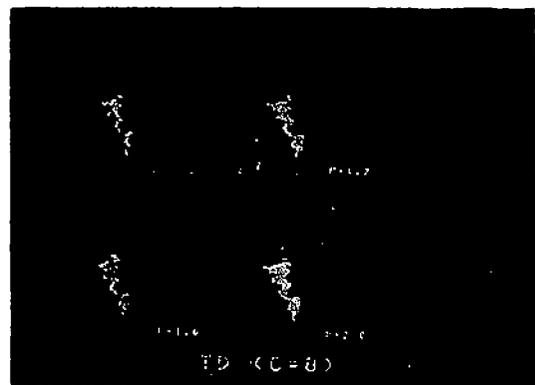


写真6 原画像3とTDによる結果 (C=8)

写真4～6に3種類のカラー原画像と $p=1.2, 1.6, 2.0$ に対するテクスチャ解析の結果を都合により白黒で示す。用いたアルゴリズムは写真4,5ではTN, 写真6はTDである。

§5. 分割行列の総合評価

写真1の原画像に対して、12の手法により分割行列 U_i を求め、 $c(=5)$ 個の確率集合 A_i の各データ要素 x に関する平均主観エントロピー $\bar{H}(X, A_i)$, $\bar{H}(X, A_i, A_j)$ および平均相互主観エントロピー $\bar{I}(X, A_i, A_j)$ を3節における (3-19)～(3-24)式で計算し、表5-1, 5-2に示した。ただし、12の分割行列 U_i の行をあらかじめ、本質的に同順序に並べ換えておいた。

分割行列 U_i の要素 u_{ij} はすべて小数1桁に正規化し、 $[0, 1]$ 区間を0.1きざみに11値に分割し

表 5-1 平均主観エントロピー

$\bar{H}(X, A_1)$	0.163	A_1 : 海
$\bar{H}(X, A_2)$	1.895	A_2 : 山
$\bar{H}(X, A_3)$	1.853	A_3 : 平地
$\bar{H}(X, A_4)$	2.008	A_4 : 谷
$\bar{H}(X, A_5)$	0.746	A_5 : 雲

表 5-2 平均主観エントロピーと平均相互主観エントロピー

	\bar{H}	\bar{I}		\bar{H}	\bar{I}
X, A_1, A_2	0.379	1.679	X, A_2, A_4	0.268	3.635
X, A_1, A_3	0.913	1.103	X, A_2, A_5	0.401	2.240
X, A_1, A_4	0.605	1.566	X, A_3, A_4	0.162	3.700
X, A_1, A_5	0.199	0.709	X, A_3, A_5	0.722	1.877
X, A_2, A_3	0.377	3.372	X, A_4, A_5	0.362	2.392

て与えた。また、 $p_e(x)$ は確率集合 A_i の各データ x において、評価値 a_e の存在する割合で、クラスタリング、アルゴリズムが k 個あれば、

$$p_e(x_j) = (x_j \text{ において } a_e \text{ の存在する個数}) / k \quad (5-1)$$

で与えられるとした。

表5-1より、 A_2 (山)、 A_3 (平地)、 A_4 (谷) に関する平均主観エントロピー \bar{H} の値は大きいので、不確定度大とわかる。これは写真4からもわかるように原画像と処理画像を比較すると、山、谷、平地の部分がうまくクラスタリングされていない場合 (写真4の $p=1.2$) である。すなわち、山、平地、谷の部分はあいまい性の大きい領域だといえる。また、表5-2の平均相互主観エントロピー $\bar{I}(X, A_2, A_3)$ 、 $\bar{I}(X, A_2, A_4)$ 、 $\bar{I}(X, A_3, A_4)$ の値が大きいことから、この3つは深い関係を持っていることが裏付けられる。同様に $\bar{I}(X, A_2, A_5)$ 、 $\bar{I}(X, A_4, A_5)$ の値もある程度大きいため、山と雲、谷と雲の間にも関係がある。

反対に A_1 (海)、 A_5 (雲) に関する平均主観エントロピー \bar{H} の値は小さい。このことから海、雲の部分は、あいまい性の少ない領域であることがわかる。写真4の3つの処理画像で、雲の部分はほぼ同一にクラスタリングされ、特に海の部分は、 $\bar{H}(X, A_1) = 0.163$ と0に近いために、まったく同一にクラスタリングされている。平均相互主観エントロピー $\bar{I}(X, A_1, A_5)$ も \bar{I} の内では最小の値になっている。

平均主観エントロピー $\bar{H}(X, A_3)$ 、 $\bar{H}(X, A_4)$ は大きい、2つの確率集合に関する平均主観エントロピー $\bar{H}(X, A_3, A_4)$ は、 A_3 と A_4 のあいまい性の度合いが似ているために小さな値になっている。

§6. 結 言

本論文では、画像を自然な形状に領域分割して4通り各々3種類、計12種類のファジィ・クラスタリングによりテクスチャ解析を行いその評価を行った。結果としてはデータ原画像を比較的妥当な領域形状にテクスチャ分類することができた。

今後の課題として、どのようなデータ原画像にどのファジィ・クラスタリングが有効か、また新たな特徴量、ファジィ・クラスタリングの導入、より効果的な領域分割の方法の検討などが考えられる。

参 考 文 献

- 1) E. Ruspini: Numerical Methods for Fuzzy Clustering, *Inf. Sci.*, Vol. 2, 319/350, 1970.
- 2) J.C. Dunn: A Fuzzy Relative of the ISODATA Process and its Use in Detecting Compact, Well Separated Clusters, *J. Cybern.*, Vol. 3, 32/57, 1974.
- 3) M. Roubens: Pattern Classification Problems and Fuzzy Sets, *J. Fuzzy Sets Syst.*, Vol. 1, 239/253, 1978.
- 4) J.C. Bezdek: Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms, Plenum Press, New York, 43/93, 1981.

- 5) 廣田・岩間・国枝: 各種 F-クラスタリング・アルゴリズムのテキスト解析への応用とその総合評価, 第1回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, 165/170, 京都, 1985.
- 6) K. Hirota: The Bounded Variation Quantity (B.V.Q) and its Application to Feature Extractions, *Pattern Recognition*, Vol. 15, No. 2, 93-101, 1982.
- 7) S.Z. Selim, M.A. Ismail: Soft Clustering of Multidimensional Data, A Semi-Fuzzy Approach, *Pattern Recognition*, Vol. 17, No. 5, 559-568, 1984.
- 8) K. Hirota: Ambiguty based on the Concept of Subjective Entropy, in *Fuzzy Information and Decison Processes* (M.M. Gupta, E. Sanchez eds), North-Holland, Amsterdam, 29-40, 1982.
- 9) W. Pedrycz, K. Hirota: An Application of Probabilistic Sets of Fuzzy Clustering, in *The Analysis of Fuzzy Information* (J.C. Bezdek ed), CRC Press (1986 to appear).
- 10) K. Hirota: Concepts of Probabilistic Sets, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 5, 31-46, 1981.
- 11) C.E. Shannon: A Mathematical Theory of Communication, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 27, 370-423, 1948.