法政大学学術機関リポジトリ
HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

PDF issue: 2024-12-27

掛谷宗一教授の輸送問題

TANAKA, George / 田中, 穣二

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Technical College of Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
22
(開始ページ / Start Page)
209
(終了ページ / End Page)
216
(発行年 / Year)
1986-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00004028

掛谷宗一教授の輸送問題

田中穣二*

The Transportation Problem by Prof. Soichi Kakeya

George TANAKA*

Abstract

This paper deals with the transportation problem which was solved by Professor Soichi Kakeya, Tokyo University. Professor Soichi Kakeya (1886～1947) is an eminent Japanese mathematician. Kakeya's theorem described in the book called "Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie," Springer, 1916, which was written by Edmund Landau (1877～1938), Professor of Mathematics, Göttingen University.

Prof. Kakeya solved the transportation problem when Hitchcock, Frank L. solved the similar transportation problem. The author explained the relation between Kakeya's and Hitchcock's transportation problem in this paper.

§1. はしがき

掛谷宗一教授（1886年～1947年）は明治42年東大理学部を卒業され，一高教授（現在の東大教養学部教授），東北大教授，東京文理科大教授（現在の筑波大教授）を経て，昭和10年から21年まで，東大理学部教授，昭和19年から22年逝去されるまで，統計数理研究所の初代所長を勤められた。

昭和3年には連立積分方程式の研究で，学士院，恩賜賞を受賞されている。

大正9年に岩波書店から発行された青色の表紙の「高等数学概要—解析幾何，微分積分及び微分方程式」は微積分の独習書であるが，理科系の一高生の必読書になり，非常に好評で版を重ねた。この本は本文は426頁であるが，650題の問題が載せられており，順を追って解いて行くと微積分の本質が把握されるようにできている。

筆者も学生のとき，この問題を解いたために数学科に行く決心をしたが，建築学科の山田水城教授もこの本の問題を解かれて，大変感銘を受けられたということを伺った。

掛谷教授はこのほかに，微分学（本文254頁），積分学（本文221頁），一般関数論（本文580頁）などを岩波書店から出版されている。学士院，恩賜賞の論文「連立積分方程式およびこれに関連する関数論的研究」も岩波講座の中に収録されている。

* 経営工学科

掛谷教授は明治45年に「正係数の代数方程式の根の限界」という論文を発表し，

$$a_n \geqq a_{n-1} \geqq \cdots \geqq a_1 \geqq a_0 \geqq 0$$

である代数方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

の根の絶対値が全て1より大きくないという定理を証明した。ドイツの有名な数学者でゲッチンゲン大学教授のランダウが，その著書

E. Landau "Darstellung und Begründung einer neuer Ergebnisse der Funktionentheorie", Springer, 1916

の中に，「掛谷の定理」と呼んでこれを載せたので，掛谷教授の代数方程式の論文は有名になった。

しかし，この定理はスウェーデン人，エネストレームがスウェーデン語の論文で明治26年に証明してあることがわかり，ランダウの本の2版では掛谷の名前が消えることになったが，掛谷教授はこのことによって，大きな自信をつけられた様子である。

昭和60年12月4日の日本経済新聞の夕刊に，現在の統計数理研究所の所長である林知己夫教授が「あるとき，あの言葉」の欄で，掛谷教授のことを次のように述べている。

難しい問題が生じたとき，掛谷所長に何か関係のありそうな文献がないでしょうかと伺ったら，掛谷所長は次のように一喝された。

「文献なんかに出ていると思うな，そんなものに頼るな，自分で考え抜け。そこが大事なんだ」。

この言葉の意味は，自分で考えて研究したことが他の文献に出ていれば，そのやり方の正しいことがわかるのだし，自分の目で大事と思うことを突き詰めて行けば，いつか必ず他に見られない独創的なことができあがるはずだということだと林氏は解説されている。そしてこれが現在の林氏自身の研究の信念になったと述べている。

明治維新以来，欧米の学者の研究成果や著書を手早く紹介する学者が多いが，掛谷教授は独創的な研究を行った日本の代表的な数学者である。

§2.の輸送問題は，§3.のヒッチコックの論文が書かれた頃，ヒッチコックとは無関係に，掛谷教授が考えられた問題である。この論文は統計数理研究所の講座録に入っているが，活字の印刷になるのは今回が初めてである。

§2. 掛谷宗一教授の輸送問題

2.1 輸 送 力

鉄道網によって，あまたの都市(駅)が連結されたる全群を一国とする。

A市よりB市に停車することなく，進行する列車を，AよりBに直結する列車と呼び，$A \to B$と記す。

かかる線路が数本ありても，それは一本と考えて論じ得べく，また単位期間（例えば一日，または1カ月のごとし）に数列車が進行しても，一つの列車と考えてよろしく，このように簡単化したるものを$A \to B$とする。

列車による国内の物の輸送を論ずるに当たり，まず，すでに輸送されつつある物の移動は計算に入れず，この一期間内に新たに一物資Pをある数市より輸出し，残る数市へ輸入する場合を考える。

列車$A \to B$がPを輸送し得る最大限の量をuとし，列車$B \to A$が輸送し得る量をvとするとき，$A \to B$の輸送力は$(-v, u)$なる範囲にあるという。ただし，AよりBへの輸出を正，BよりAへの輸出を負とし，$A \to B$と$B \to A$は同じ一線路の往復車と見なし，A, B両市間のこの一期間の直送量をxとするとき，xは

$$-v \leqq x \leqq u$$

なる範囲内にあるべきである。

2.2　幹線と枝線

都市の総数を$m+1$とし，輸送力は無制限と仮定すれば，任意の一市より他の任意の一市まで輸送可能なるように設けられたる鉄道網においては，直結線路の数は少なくともmコである。またmコにて十分である。

まず一市C_1をとるとき，これと他の市の何れとも直結線路を持たざればC_1の物資は他市へ輸出し得ず，これ不合理である。ゆえに必ず少なくとも一つの他市C_2に向かって直結線路あるべきである。これをX_1とす。次にC_1, C_2両市間の輸送はX_1一線にて十分である。この両市を組み合わせて一都市と見なし得，この組み合わせ(C_1, C_2)と残りのある一市とを直結する線路が存在すべきことも前の理に同じである。その一つをX_2とする。すなわちX_2はC_1またはC_2と残りの一市C_3とを直結する線路である。次にはC_1, C_2, C_3の三市を組み合わせる一市と見なし，同様の論を繰り返えす，おってかく進み，遂にmコの線路$X_1, X_2, \cdots, X_m$にて$m+1$コの市$C_1, C_2, \cdots, C_{m+1}$が連結され，これにて$m+1$市間の輸送が自由に行われるようになる。

輸送自在なるように選ばれたmコの直結線路を一種の幹線と云う。これに対して残りの直結線路を全て枝線と言う。

2.3　輸送方程式

実例について述べよう。例えば上の図のように，$m=4$とする。

$$C_1 \to C_2,\ C_2 \to C_4,\ C_4 \to C_5,\ C_3 \to C_4$$

を幹線とし，残りの

$$C_1 \to C_5,\ C_2 \to C_3,\ C_2 \to C_5$$

を枝線と考え，この順にそれぞれX_1, X_2, X_3, X_4; Y_1, Y_2, Y_3と名付ける。

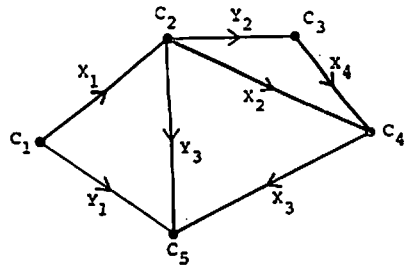

図1　実　　例

ただし，何れの直結線路にても，添字の小なる方より大なる方への輸送を正と考えている。

さて単位期間に一市 C_k は物資 P を総量 C_k だけ輸出するものとする。ただし輸入の場合は負の輸出と考える。

このために線路 X_k, Y_l 上にて実施さるる輸送量をそれぞれ x_k, y_l とする。

しかるとき C_i なる市より付近の市へ直結的に輸出（負は輸入）する総量が C_i なることを式に表せば，上例においては，

$$\left.\begin{aligned} x_1+y_1&=C_1\\ -x_1+x_2+y_2+y_3&=C_2\\ x_4-y_2&=C_3\\ -x_2+x_3-x_4&=C_4\\ -x_3-y_1-y_3&=C_5 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

これを<u>輸送方程式</u>と言う。

輸送方程式の特徴は明らかに次の点である。

1） 右辺の総和は 0 である。すなわち

$$\sum C_i=0 \qquad (3)$$

2） 左辺にある x_k, y_l の係数は，+1, −1 にして，一対をなして一回現れるだけである。

3） y_l の値は任意に定められ，y_l を与えれば x_l は一定になる。

x_k の一定する計算を下に示そう。先ず y_l を移項すれば

$$\left.\begin{aligned} x_1&=C_1-y_1\\ -x_1+x_2&=C_2-y_2-y_3\\ x_4&=C_3+y_2\\ -x_2+x_3-x_4&=C_4\\ -x_3&=C_5+y_1+y_3 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

最初に x_1 を消去するには $+x_1$, $-x_1$ を含む両式を加えればよろしく，それと残る式を列記すれば，

$$\left.\begin{aligned} x_2&=C_1+C_2-y_1-y_2-y_3\\ x_4&=C_3+y_2\\ -x_2+x_3-x_4&=C_4\\ -x_3&=C_5+y_1+y_3 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

この式の形もまた(4)と同型にしてただ x_1 を含まず，次に x_2 を消去すれば

$$\left.\begin{aligned} x_3-x_4&=C_1+C_2+C_4-y_1-y_2-y_3\\ x_4&=C_3+y_2\\ -x_3&=C_5+y_1+y_3 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

次に x_3 を消去すれば，

$$\left.\begin{aligned} -x_4&=C_1+C_2+C_4+C_5-y_2 \\ x_4&=C_3+y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

この両式は当然両辺何れも和が0となるゆえに従属する。その何れを採用しても x_4 が決定する，その値を(6)に代入して x_3 が決定する，その値を(5)に代入して x_2 が決定する，その値を(4)に入れて x_1 が決定する。

これが実際の計算法なり，結果は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} x_4&=C_3+y_2 \quad (7)\text{の最後の式} \\ x_3&=-C_5-y_1-y_3 \quad (6)\text{の最後の式より} \\ x_2&=C_1+C_2-y_1-y_2-y_3 \quad (5)\text{の最初の式} \\ x_1&=C_1-y_1 \quad (4)\text{の最初の式} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

2.4　解の能不能

実際の場合には輸送力に制限あり，例えば

$$\left.\begin{aligned} -v_k\leqq x_k\leqq u_k \qquad & k=1,2,\cdots,m \\ -q_l\leqq y_l\leqq p_l \qquad & l=1,2,\cdots,n \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

なる条件ありとする。

この条件の下に輸送方程式が解き得られるや否やを判定するのは，すこぶる困難であると考えられる。

2.5　実験的解法

前条の解の能不可の判定並びに可能なる場合の実際の解答を知るのに実験的の方法がある。

$C_1, C_2, \cdots, C_{m+1}$ なる都市に相当する円筒に水を満たし，X_k, Y_l に相当する円管を以て連結する。

円管には両側の圧の差によりて移動する壁を設ける。

各円筒の上壁は外部より自由に移動せしめ得るようにする。

最初各円筒の水高を一様ならしめて置き，水面に上壁を接し置く。円管壁の前後に u_k, v_k, p_l, q_l に相当する距離の所へ止金を付け，それを超えて壁が移動することは妨ぐものとする。

さて各円筒の上壁を C_i に相当するだけ上下に移動して水高を変ずることを試みよ。それが変じ得るならば解は可能にして，円管壁の位置がそのときの x_k, y_l の値の一組を示す。もちろん円管壁の静止の位置はいろいろになり得る。最初の

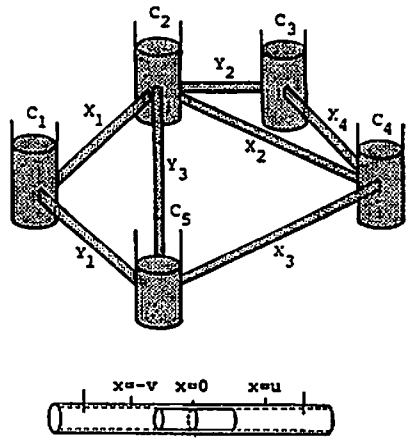

図2　実験装置

上壁の移動によりて変わる。振動することが一般である。

解不動の場合は前述の上下移動が不能となる。けだし水は非圧圧縮性のものであるからである。

2.6 数多の物資の場合

以上の論は既設の運輸系統の上に，さらに一新物資の輸送を加えたる場合の輸送法について考えるものである。

数多の物資の鉄道輸送について綜合的に考えんとすれば，各物資ごとに x_k, y_l に関する方程式を得ること前のとおりである。物資ごとに指数を付して $x_k^{(r)}$, $y_l^{(r)}$ のごとく書くときは条件として，此度は

$$\left.\begin{aligned} -u_k \leqq \sum_r x_k^{(r)} \leqq u_k \\ -p_l \leqq \sum_r y_l^{(r)} \leqq p_l \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

此度も実験的に解くことができる。

すなわち物資ごとに前節§2.に言えるごとき装置を作りたる後，例えば $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, …, $x_k^{(r)}$… に相当する円管を並べ，これと同形の円管を重ね，後者は末端をそれぞれ別々に同一円筒に連結して水を充たし，両円筒の水高は壁と止金とによりて u_k 以上とならざるようになし置くものとする。こうしたる上，前者の円管の壁の移動はそのまま後者の壁の移動を起こすように装置すれば，これにて前者移動の総量か上 u_k を超えないようになるであろう。

この装置にて各円筒の水正をそれぞれ各物資の輸出入に等しからしめ得れば，すなわち解が可能にして，各円管の壁の位置が相当する物資の相当する鉄道により輸送量を示すはずである。

§3. ヒッチコックの輸送問題との比較

§2.で述べた掛谷教授の輸送問題の実例を，OR の教科書にあるヒッチコックの輸送問題として捉えると次のようになる。

(Hitchcock, F. "The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities", *J. Math. Phys.*, Vol. 20, 1941, pp. 224-230)

§2.の実例で，$C_1, C_2, C_3>0$ すなわち，1, 2, 3 が物資の供給地で，$C_4, C_5<0$，すなわち，4, 5 が物資の消費（需要）地である場合を考えよう。

1, 2, 3 からの供給と 4, 5 の需要 $-C_4$, $-C_5$ は全体としてバランスするから

$$C_1+C_2+C_4=-C_4-C_5 \tag{11}$$

になる。これは§2.3.の(1)の(3)式に相当する。

供給地 $i=1, 2, 3$ から，消費地 $j=4, 5$ への輸送量を Z_{ij} で表し，非負変数とする。すなわち，

$$Z_{ij} \geqq 0;\ i=1, 2, 3;\ j=4, 5 \tag{12}$$

供給地 1, 2, 3; 消費地 4, 5 での需給のバランス式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &Z_{14}+Z_{15}=C_1 \\ &Z_{24}+Z_{25}=C_2 \\ &Z_{34}+Z_{35}=C_3 \\ &Z_{14}+Z_{24}+Z_{34}=-C_4 \\ &Z_{15}+Z_{25}+Z_{35}=-C_5 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(11)の式があるので，(13)の式の中の1つは他の式から導かれる。(13)を表で表すと次の表になる。

需給のバランス表

i \ j	4	5	Total
1	Z_{14}	Z_{15}	c_1
2	Z_{24}	Z_{25}	c_2
3	Z_{34}	Z_{35}	c_3
Total	$-c_4$	$-c_5$	$c_1+c_2+c_3$ $=-c_4-c_5$

表または(13)の式で，$Z_{14}=Z_{35}=0$ なる解は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &Z_{14}=0 && Z_{15}=C_1 \\ &Z_{24}=-C_3-C_4 && Z_{25}=-C_1-C_5 \\ &Z_{34}=C_3 && Z_{35}=0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

表であらわすと

$Z_{14}=Z_{35}=0$ になる解

i \ j	4	5	Total
1	0	c_1	c_1
2	$-c_3-c_4$	$-c_1-c_5$	c_2
3	c_3	0	c_3
Total	$-c_4$	$-c_5$	$c_1+c_2+c_3$ $=-c_4-c_5$

$Z_{24}>0$, $Z_{25}>0$ の場合には，掛谷教授の言う $m=4$ コの幹線だけを使った解に相当する。以下，この条件の下で，輸送費用が最小になる解かどうかを検討しよう。

そのため，$i=1,2,3$ から $j=4,5$ への Z の一単位当たりの輸送費用

$$\alpha_{ij}>0 \quad i=1,2,3;\ j=4,5 \tag{15}$$

が与たえられ，既知であるとする。総輸送費用は $\Sigma\,\alpha_{ij}\,Z_{ij}$ になる。

シンプレックス規準を計算するために，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_5$ を次のようにして，上の解から求める。

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1=0 && \beta_1+\beta_5=\alpha_{15} \\ &\beta_2+\beta_4=\alpha_{24} && \beta_2+\beta_5=\alpha_{25} \\ &\beta_3+\beta_4=\alpha_{34} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

すなわち,

$$\left.\begin{aligned}\beta_1&=0\\ \beta_5&=\alpha_{15}\\ \beta_2&=\alpha_{25}-\alpha_{15}\\ \beta_4&=\alpha_{24}-\alpha_{25}+\alpha_{15}\\ \beta_3&=\alpha_{34}-\alpha_{24}+\alpha_{25}-\alpha_{15}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

(14)の解が費用最小の解であるためには $i=1,2,3$; $j=4,5$ の全ての i, j に対して

$$\alpha_{ij}-\beta_i-\beta_j\geqq 0 \tag{18}$$

が満たされていればよい。(16) から $\alpha_{15}, \alpha_{24}, \alpha_{25}, \alpha_{34}$ に対しては $\alpha_{ij}-\beta_i-\beta_j=0$ で(18) は等号で満たされているから

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{14}-\beta_1-\beta_4&=\alpha_{14}-\alpha_{15}-\alpha_{24}+\alpha_{25}\geqq 0\\ \alpha_{35}-\beta_3-\beta_5&=\alpha_{35}+\alpha_{24}-\alpha_{25}-\alpha_{34}\geqq 0\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

が費用最小のための条件となり，これが満たされるとき(14)は輸送費用を最小にする解になる。

もし(19)が満たされないとき，すなわち

$$\alpha_{ij}-\beta_i-\beta_j<0$$

である i, j が存在するときには，$Z_{ij}>0$ になるように解を変更して，(14)から行った手順にしたがって，β_i, β_j を計算し直し，(18)が満たされるようになれば，それが費用最小の解になる。

以上のヒッチコックの輸送問題は次のような状況を前提としている。

(i) 鉄道あるいは国鉄は，駅 i から駅 j へある物資 1 トンを運ぶ運賃表 α_{ij} を決めている。

(ii) ある会社がその物資を国鉄を使って i から j へ運ぼうとするとき，国鉄への運賃の支払総額を最小にするような輸送計画〔(14)に相当し，(18)を満たすもの〕を選択しようとしている。

これに対して，掛谷教授の輸送問題は，ヒッチコックのように運賃を支払う荷主の立場ではなく，むしろ鉄道または国鉄の立場であって，全体の輸送を可能ならしめるためには，どう対処したらよいかという考え方に立っており，その輸送可能性を数学的および物理的実験によって求めていて，きわめて日本的な発想といえる。

謝　　辞

なお，§2. の図 1 の実例と図 2 の実験装置は建築学科の川口　衛教授に書いていただいた，川口教授の御協力に厚く感謝いたします。