

### 経済環境における耐戦略性：ハーヴィッツ 定理の一般化とその周辺研究について

奥山, 利幸 / OKUYAMA, Toshiyuki

---

(出版者 / Publisher)

法政大学経済学部学会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

The Hosei University Economic Review / 経済志林

(巻 / Volume)

76

(号 / Number)

4

(開始ページ / Start Page)

199

(終了ページ / End Page)

229

(発行年 / Year)

2009-03-09

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00004015>

# 経済環境における耐戦略性

——ハーヴィッツ定理の一般化とその周辺研究について——

奥山利幸\*

## 1 はじめに

2007年ノーベル経済学賞は、メカニズム・デザインに与えられた。その授与理由は、多種多様な配分制度に対する首尾一貫した分析的枠組みの提供にある。資源配分の方法といえば価格競争に基づく自由市場を想像させるが、それだけが資源配分の方法なわけではない。このように指摘すると、中央集権的な配分制度である計画経済を想像する読者もいるかもしれないが、現在でも政府による租税や規制は価格競争を通じた資源配分、あるいは所得分配方法ではない。更には、企業内資源配分も又、「成果主義」の導入によって価格競争が利用されているように見えるが、人員配置や他の生産要素のすべてが企業内価格競争に基づくとは言い難い。この他にも、メカニズム・デザインの応用性は、排除費用の高い商品（公共財）を排除費用を伴わないように効率的に供給するための負担方法の設計、1つの商品の売却から複数の商品や数量の段階的売却に至る様々な状況に対するオークションの設計、相対取引における資源配分と所得分配方法の設計、個々

---

\*）伊藤陽一先生には大学院生の頃より、大変お世話になりました。退職を記念し、本稿を捧げるものです。また、原稿に対し多くの有益なコメントを我妻靖氏より頂戴しました。記して感謝します。

の価値観の集計方法の設計（社会的選択の戦略的分析）など、実に幅広い。こういった様々な資源配分、あるいは所得分配問題に対し、論理的に一貫した分析的枠組みを提供するのがメカニズム・デザインということになる。

メカニズム・デザインの端緒は、ハイエクの指摘（Hayek, 1945）に対し、各主体が各々のもつ私的情報に基づいて選択するという情報分権的（informationally decentralized）経済において、主体間の情報伝達量が最小で済むという情報効率性（informational efficiency）がどのような配分制度のときに実現するのかをハーヴィッツが分析したことにある（Hurwicz, 1960）。この問題意識に対する答えは、後に Jordan（1982）によって与えられるが、メカニズム・デザインが大きく発展することになったのはハーヴィッツが誘因両立性（incentive compatibility）の概念と、後に「ハーヴィッツの不可能性定理」と呼ばれる命題を示したことによる（Hurwicz, 1972）。誘因両立性やハーヴィッツの不可能性定理については、後程、厳密な定義を与えるが、概していえば、誘因両立性とは、配分制度を所与としたとき、私的情報となっている主体の属性（選好や技術）を配分制度の運用主体（あるいは計算機）に真に報告することが各々の主体にとって合理的なことをいう。ハーヴィッツの定理は、このとき、2人2財の純粋交換経済において、誘因両立性、個人合理性、パレート効率性を満たす配分制度は存在しないという命題になる。

ハーヴィッツの分析以来、ハーヴィッツの定理の一般化が試みられたり、逆に可能性定理を示そうという研究も多く生み出された。純粋交換経済に限定した議論のみならず、一般的な状況の下での遂行可能なメカニズムの開発も行われ、その文献量は極めて豊富である。耐戦略性を含んだサーベイ論文だけでも、Muller and Satterthwaite（1985）、Moore（1992）、Barberà（2001）、Serrano（2004）などがある<sup>1)</sup>。

---

1) Moore（1992）と Serrano（2004）は、全般的なサーベイになる。これらの他にも、ナッシュ遂行を中心としたサーベイとして Maskin（1985）、Jackson（2001）、ベイジアン遂行のサーベイとして Palfrey（1992, 2002）、またvNM効用を定義域とした場合のサーベイとして Moulin（1982）などがある。

本稿では、このようにメカニズム・デザインを大きく発展させる機会となったハーヴィッツの定理について、その一般化への試みとその周辺研究について、近年の文献を中心としたサーベイを行う。そのために、次節において、先ずメカニズム・デザインの枠組みと基本的な概念、定理を整理してからハーヴィッツの定理を確認する。その後、第3節においてハーヴィッツの定理の直接的な拡張と反例について文献をサーベイし、第4節では間接的にハーヴィッツの定理を示す文献をサーベイする。

## 2 メカニズム・デザインの枠組みと純粋交換経済への応用

### 2.1 メカニズム・デザインの枠組み

メカニズム・デザインは、ルールの設計目標と設計しようとしているルールを基本的な構成要素とする<sup>2)</sup>。

**設計目標.** ルールの設計には、設計目標が与えられていなければならない。設計目標をモデル化すると、次のようになる。

設計しようとしているルールに潜在的に参加機会のある主体の集合を有限集合  $N$ 、各主体  $i \in N$  の私的情報となっている属性をその主体の「環境」と呼び、その全体を集合  $E_i$  で表す。直積  $E \equiv \times_{i \in N} E_i$  は、環境空間 (environment space) と呼ばれる。主体が直面する状態を帰結と呼び、その全体  $Z$  を帰結空間 (outcome space) と呼ぶ。多くの応用では、帰結空間  $Z$  は各主体  $i \in N$  が個別に直面する状態とすべての主体が直面する状態に分割できる。環境空間  $E$  と帰結空間  $Z$  があったとき、ルールの設計目標は目標対応 (goal correspondence) と呼ばれる非空値対応  $F : E \rightarrow 2^Z$  で与えられていると考える。ここで、 $2^Z$  は  $Z$  の冪集合、すなわち、帰結空間  $Z$  の部分集合 (空集合を含む) の全体 (集合族) である。

---

2) 以下では一般的な枠組みを示す。メカニズム・デザインの平易な導入として拙著教科書 (2009, 15章, 17章), 上級向け教科書として坂井他 (2008), また邦文サーベイとして芹澤 (2003) や西條・大和 (2006) などがある。

通常、各主体  $i \in N$  の環境  $e_i \in E_i$  には、帰結空間  $Z$  上の選好順序  $\succsim_i$  が含まれている。このため、目標対応  $F$  は、アローの社会的厚生関数  $f$  の下で最上位となる帰結の全体を与える社会的選択対応 (social choice correspondence) と考えることができる。すなわち、目標対応が、

$$F(e) \equiv \{z \in Z \mid z f(e) z', \forall z' \in Z\}, \forall e \in E \quad (1)$$

となる合理的な社会的選択対応であり、個々の主体の主観的評価の組  $(\succsim_i)_{i \in N}$  を社会的評価に集計する手続き  $f$  の下で各環境に対し社会的に最上位と評価される帰結を選ぶことがルール of 設計目標になっている場合である。裏返せば、どういった手続き  $f$  が可能かを分析できることを意味している。

設計目標となっている社会的選択対応  $F : E \rightarrow 2^Z$  がどのような性質をもっているかは、様々な応用によって異なる。ここでは、本稿で使われるいくつかの例を示しておこう。

**例2.1** (パレート対応). 任意の環境  $e \in E$  に対し、 $F(e)$  が環境  $e$  での選好順序の組  $(\succsim_i)_{i \in N}$  においてパレート効率な帰結の全体であるとき、写像  $F : E \rightarrow 2^Z$  は「パレート対応 (Pareto correspondence)」という。

帰結  $Z$  が選好順序の組  $(\succsim_i)_{i \in N}$  においてパレート効率であるとは、すべての主体  $i \in N$  に対し  $z' \succ_i z$  となる他の帰結  $z' \in Z$  が存在しないときをいう<sup>3)</sup>。但し、 $a \succ_i b$  は、 $a \succsim_i b$  かつ  $\neg[b \succsim_i a]$  を意味する。

**例2.2** (個人合理的対応). 主体  $i \in N$  が設計しようとしているルールに参加しないときの帰結を  $\bar{z}^i$  とする。このとき、任意の環境  $e \in E$  に対し、 $F(e)$  が環境  $e$  での選好順序の組  $(\succsim_i)_{i \in N}$  においてすべての主体にとって個人合理的な帰結の全体となっているとき、すなわち、任意の主体  $i \in N$  に対し  $z \succsim_i \bar{z}^i \forall z \in F(e)$  となるとき、写像  $F : E \rightarrow 2^Z$  は「個人合理的対応 (individually rational correspondence)」という。

設計しようとしているルールに主体が参加するには、設計目標のルール

3) この定義は、弱パレート効率性になる。

が生み出す帰結が個人合理的でなければならない。また、パレート効率性を満たさなければ、主体全体  $N$  が設計目標のルールがもたらす帰結を全員一致で背く。

**メカニズム.** ルールの設計目標である社会的選択対応  $F : E \rightarrow 2^Z$  が与えられたとしよう。これに対し、設計するルールは、帰結関数 (outcome function) と呼ばれる関数  $g : S \rightarrow Z$  になる。帰結関数の定義域  $S$  は、各主体  $i \in N$  に選択してもらう選択肢の範囲を示す集合  $S_i$  の直積  $S \equiv \times_{i \in N} S_i$  であり、集合  $S$  をメッセージ空間 (message space) と呼ぶ。「メカニズム」あるいは「ゲーム形式 (game form)」といった場合、 $g : S \rightarrow Z$  と記さずに、帰結関数の値域は必ず帰結空間  $Z$  内と定まっているので、組  $(S, g)$  と略記する文献が多い。「メカニズム」、「ゲーム形式」、「帰結関数」は、すべて、同じものを指すわけである。

**遂行.** 帰結関数  $g : S \rightarrow Z$  を与えると、各環境  $e_i \in E_i$  に対し、各主体  $i \in N$  は選択肢  $s_i \in S_i$  を選ぶことでメッセージ  $s = (s_i)_{i \in N}$  が定まり、帰結関数を通じて帰結  $z = g(s)$  が与えられる。帰結に対しては、各環境  $(e_i)_{i \in N} \in E$  に応じて定まる各主体  $i \in N$  の選好順序  $\succeq_i$  に照らして各々の評価がある<sup>4)</sup>。この結果、メッセージ  $s = (s_i)_{i \in N}$  を戦略の組とすれば、帰結関数  $g : S \rightarrow Z$  は各環境  $e \in E$  に対し戦略形ゲーム  $\Gamma(e, g) \equiv (N, (S_i)_{i \in N}, (\succeq_i^e)_{i \in N})$  を誘導する。ここで、各主体  $i \in N$  について、任意の戦略の組  $s \in S$  と  $s' \in S$  に対し、 $s' \succeq_i^e s$  は  $g(s') \succeq_i g(s)$  と定義される<sup>5)</sup>。

ゲーム理論には、いくつもの解概念が存在する。例えば、支配戦略均衡、ナッシュ均衡などである。いずれの解概念  $SC$  も、各環境  $e \in E$  に対し均衡点の集合  $SC(e; g)$  を与える。このとき、条件

4) したがって、メカニズムが参加制約 (個人合理性) を満たすか否かが大きな問題となる。個人合理性を満たさなければ、メカニズム自体に参加しなくなってしまう。

5) 選好順序  $\succeq_i$  が vNM 効用  $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$  で表現できるのであれば、誘導されるゲームは  $\Gamma(e, g) \equiv (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i \circ g)_{i \in N})$  と書き表すことができる。誘導されるゲームの利得関数は、合成関数  $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$  になる。環境が効用関数の組で表される場合、すなわち、 $e = (u_i)_{i \in N}$  のとき、 $\Gamma(e, g)$  が更に見やすくなる。

$$g(SC(e;g)) = F(e), \forall e \in E \quad (2)$$

が成り立つとき、メカニズム  $(S, g)$  は社会的選択対応  $F$  を  $SC$ -遂行 (implement) するという。例えば、対応  $SC : E \rightarrow 2^S$  が支配戦略均衡対応のときに条件 (2) が成り立てば、メカニズム  $(S, g)$  は社会的選択対応  $F$  を「支配戦略遂行」するという。対応  $SC : E \rightarrow 2^S$  がナッシュ対応 (ナッシュ均衡点の集合を与える写像) のときに条件 (2) が成り立てば、メカニズム  $(S, g)$  は社会的選択対応  $F$  を「ナッシュ遂行」するという<sup>6)</sup>。

## 2.2 直接メカニズムと耐戦略性

本稿でサーベイする文献の対象は、純粹交換経済における耐戦略性関連となるが、耐戦略性は社会的選択対応  $F : E \rightarrow 2^Z$  が一価 (single-valued) 写像であるときに定義できる概念になる。そこで、以下では、特に断らない限り、一価の社会的選択対応を想定し、設計目標が社会的選択関数  $F : E \rightarrow Z$  の場合を考察する<sup>7)</sup>。

**直接メカニズム.** メッセージ空間  $S$  を環境空間  $E$ , 帰結関数  $g$  を社会的選択関数  $F : E \rightarrow Z$  としたメカニズム  $(E, F)$  を「直接メカニズム (direct mechanism)」, 直接メカニズムでないメカニズムを「間接メカニズム

6) メカニズム  $(S, g)$  がゲームを誘導するのではなく、対応  $SC : E \rightarrow 2^S$  に対し何かしらの行動仮説を適用して条件 (2) が成り立つとき、メカニズム  $(S, g)$  は目標対応  $F$  を「実現 (realize)」するという。「実現」と「遂行」の区別については、例えば、Hurwicz and Reiter (2006) を参照。情報効率性を分析する場合には、実現性を検討することの方が分析的に容易になる。実現理論については、Hurwicz and Reiter (2006) の本を参照されたし。遂行理論のほとんどの文献は、情報効率性を無視した分析となっている。例えば、展開形ゲームによってメカニズムをデザインすれば、主体間の情報伝達量が増えるため、情報効率性が落ちるが、その分、遂行可能性は高まる。遂行理論において情報効率性を扱い始めたのは、近年になってからである。例えば、McLean and Postlewaite (2002) を参照。

7) 社会的選択対応が多価写像の場合、下記の条件 (3) をそのまま適用することはできない。社会的選択対応が一価写像でないときの耐戦略性の定義については、Kelly (1977), Nehring (2000), Ching and Zhou (2002), Sato (2008) などを参照。多価写像の場合の耐戦略性だけでも、サーベイが書けそうな程である。本稿では、分析の一般化よりも、説明の簡潔さを重視して、社会的選択対応を一価写像と想定することにした。

(indirect mechanism)」と呼ぶ。支配戦略遂行、ナッシュ遂行、ベイジアン遂行については、次の表明原理が成り立つ（証明は、例えば、Myerson (1981) 参照）。

**定理2.3 (Revelation Principle)**. メカニズム  $(S, g)$  が社会的選択関数  $F$  を  $SC$ -遂行すれば、直接メカニズム  $(E, F)$  は社会的選択関数  $F$  を  $SC$ -遂行し、しかも、すべての環境  $e \in E$  に対し  $e \in SC(e; F)$ 。

定理内の条件「すべての環境  $e \in E$  に対し  $e \in SC(e; F)$ 」は、直接メカニズムにおいて、真の環境を報告することがゲームの解になっていることを意味する。特に、 $SC$  がナッシュ対応のとき、「誘因両立性」と呼ばれる。

表明原理（定理 2.3）は、直接メカニズムにおいて真の報告が均衡でなければ、遂行不可能なことを意味する。このため、不可能性定理の証明に利用される。

**耐戦略性**. 他の主体の推測や利得について、主体の負荷が最小となるゲーム理論の解概念は、支配戦略均衡である。というのは、もし支配戦略が存在すれば、他の主体がどのような選択や推測をしても、支配戦略をとれば良いからである。

真の報告が支配戦略のとき、次の「耐戦略性 (strategy-proofness)」を満たす。すなわち、各環境  $e \in E$  に対し、 $(\succsim_i)_{i \in N}$  が  $e$  での選好順序の組とすれば、

$$F(e) \succsim_i F(e'_i, e_{-i}) \forall e'_i \in E_i, \forall i \in N \quad (3)$$

となっているとき、社会的選択関数  $F$  は耐戦略的であるという。ここで、 $e_{-i} \in \times_{j \in N \setminus \{i\}} E_j$  であり、 $e = (e_j)_{j \in N}$  において  $e_i$  のみを取り除いた環境の組を意味する。耐戦略性は「1人で嘘をついても得をしない」という意味であり、真のメッセージがナッシュ均衡であること（誘因両立性）を指す。

社会的選択関数  $F: E \rightarrow Z$  が耐戦略的でなければ、表明原理（定理2.3）によって支配戦略遂行不可能になる。この結果、耐戦略性を満たすように



遂行可能か否かが問題となる。

耐戦略性を満たす社会的選択関数には、次のような例がある (Muller and Satterthwaite, 1985, pp. 136–7)。

**例2.4 (賦課性, imposition).** 各環境  $e \in E$  に対し,  $F(e) = z^0$ 。ここで,  $z^0$  は帰結空間  $Z$  内のある帰結である。

**例2.5 (独裁制, dictatorship).** ある主体  $j \in N$  が存在し, 各環境  $e \in E$  に対し, それに対応する選好順序の組を  $(\succsim_i)_{i \in N}$  としたとき, (1) におけるアローの社会的厚生関数  $f$  が条件  $f(e) = \succsim_j$  を満たす社会的選択関数  $F$ 。主体  $j$  を独裁者と呼ぶ。

**例2.6 (帰結数2の下での多数決).**  $Z = \{a, b\}$ , 各環境  $e \in E$  に対し, それに対応する選好順序の組を  $(\succsim_i)_{i \in N}$  としたとき,  $a \succ_i b$  なる主体数が  $b \succ_i a$  なる主体数より多い場合には  $F(e) = a$ , そうでない場合には  $F(e) = b$ 。

**例2.7 (帰結数3の下で定義域を制限).**  $Z = \{a, b, c\}$ , 各主体  $i \in N$  に対し  $E_i = \{acb, bca\}$ 。ここで,  $acb$  は,  $a \succ_i c, c \succ_i b, a \succ_i b$  の意。社会的選択関数は, 帰結  $a$  と  $b$  の間で多数決を適用して選び, もし  $a$  と  $b$  が多数決において同位であれば, 帰結  $c$  を選ぶ。

例1の場合, 社会的選択関数が全射 ( $F(E) = Z$ ) ではない例になる。また, 定義域  $E$  に制限をかけなければ, パレート効率性を満たさない例になる。例2は独裁制, 例3は帰結数2, 例4は帰結数は3以上であるが定義域を制限している場合になる。これらの例より, 帰結数3以上 ( $|Z| \geq 3$ ), 全射性, 定義域の非限定性, 非独裁制, パレート効率性を満たす中で耐戦略的な社会的選択関数が存在するか否かが疑問になる。この問題に対する答えが, ギバード・サタースウェイトの定理である<sup>8)</sup>。

8)  $|Z| = 3, |N| = 2$ , 各主体  $i \in N$  に対し環境空間  $E_i$  が強選好順序の全体であれば, 比較的, 直接的に証明可能である。例えば, 拙著 (奥山, 2009, 17章) や Muller and Satterthwaite (1985) 参照。より一般的で, 比較的簡潔な証明としては, Barberá (1983) がある。また, 社会的選択対応が一価写像ではない場合のギバード・サタースウェイト定理については, Kelly (1977) や Ching and Zhou (2002), Sato (2008) を参照。

**定理2.8 (Gibbard, 1973; Satterthwaite, 1975).** 各  $i \in N$  に対し,  $E_i$  を帰結空間  $Z$  上の論理的に可能な選好順序の全体とする (定義域の非限定性)。もし  $|Z| \geq 3$ , かつ,  $F(E) = Z$  であれば, 耐戦略性, パレート効率性, 非独裁制を満たす社会的選択関数  $F : E \rightarrow Z$  は存在しない。

ここで「論理的に可能な選好順序」とは, 完備性, 推移性を満たす選好順序を意味する。

表明原理 (定理2.3) によれば, ギバード・サタースウェイトの定理は, 主体の価値観を一切制限せずに (定義域の非限定性), パレート効率性と耐戦略性を満たすには独裁制でなければならないことを意味する。アローの不可能性定理の戦略的頑健性を示している。

### 2.3 純粋交換経済への応用

前項では, メカニズム・デザインの一般的枠組みと基本的結果について見た。これを純粋交換経済に応用すると以下ようになる。

主体の集合  $N$  は, 消費者の集合になる。  $l$  個の商品があるとき, 各消費者  $i \in N$  の消費集合を  $l$  次元ユークリッド空間の非負象限  $\mathbb{R}_+^l$  と単純化しよう。各消費者  $i \in N$  には初期付与  $\omega_i \in \mathbb{R}_+^l$  が与えられている。単純化のために, 初期付与は一定であるとしよう。このとき, 各消費者  $i \in N$  の環境  $e_i$  は帰結空間  $Z$  上の選好順序  $\succsim_i$  と同定化できる ( $e_i = \succsim_i$ )。帰結空間  $Z$  は, 実行可能な資源配分  $x = (x_i)_{i \in N}$  の全体になる。ここで, 資源配分  $x = (x_i)_{i \in N}$  が「実行可能 (feasible)」であるとは, 各消費者  $i \in N$  に対し  $x_i \in \mathbb{R}_+^l$  であり, かつ,

$$\sum_{i \in N} x_i \leq \sum_{i \in N} \omega_i$$

が成り立つときをいう。

環境空間  $E$  と帰結空間  $Z$  が定まったところで, 次に設計目標となる社会的選択対応について議論しよう。多くの文献で関心のある社会的選択対応は, 「ワルラス対応 (Walrasian correspondence)」である。ワルラス対応と

は、各環境  $e = (\succsim_i)_{i \in N}$  に対し、ワルラス均衡の条件を満たす資源配分の全体が対応する写像になる。すなわち、選好が局所不飽和を満たすとき、社会的選択対応  $F : E \rightarrow 2^Z$  がワルラス対応であるとは、

$$F(e) \equiv \{(x_i)_{i \in N} \in Z \mid \exists p \in \mathbb{R}_+^L / \{0\} : x_i' \succ_i x_i \Rightarrow p \cdot x_i' > p \cdot \omega_i\}, \forall e \in E.$$

ワルラス対応が環境空間  $E$  上で定義されるには、各環境  $e = (\succsim_i)_{i \in N}$  に対しワルラス均衡が存在しなければならない。次の命題がそれを保証する。

**定理2.9.** もし選好順序が利己性、完備性、推移性、単調性、連続性、凸性を満たし、各  $i \in N$  に対し  $\omega_i \in \mathbb{R}_{++}^L$  であれば、ワルラス均衡は存在する。

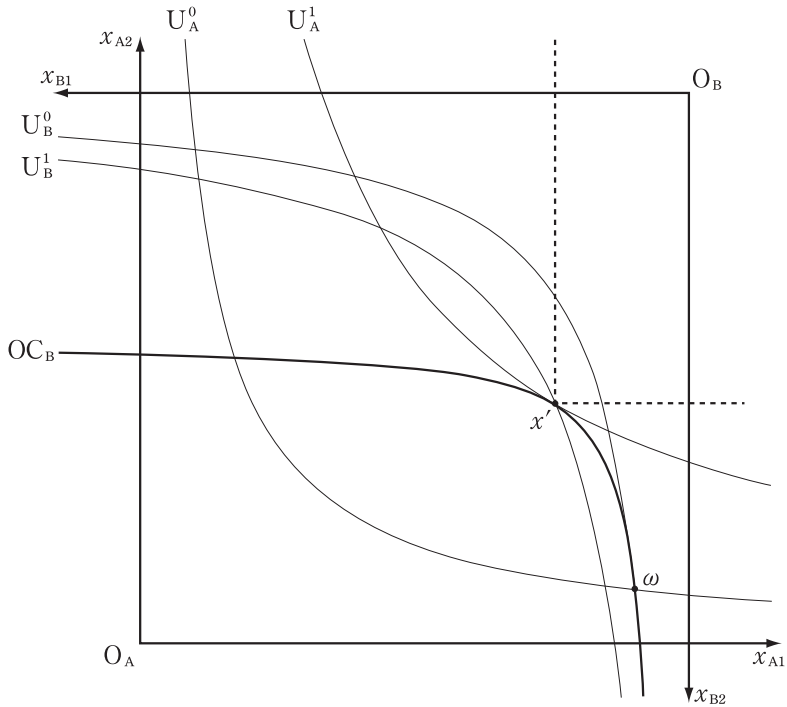
ここでの「利己性」とは、各消費者  $i \in N$  の選好順序  $\succsim_i$  が帰結空間  $Z$  上ではなく、その一部分である各々の消費集合上で定義されることを指す。

ワルラス均衡の存在定理は、ワルラス対応が定義域の非限定性、全射性を満たしていないことを意味する。まず、定義域（すなわち、選好順序の集合）は、利他性も含めなければ限定的となる。但し、遂行不可能性を示すのであれば、条件 (2) を満たさない環境  $e$  が存在すれば十分であることに注意しよう。すなわち、利己的な選好に制限して条件 (2) を満たさないことを示せば、遂行不可能性がいえてしまう。

次に、すべての消費者がすべての商品に対し正の数量の初期付与をもつという条件 ( $\omega_i \in \mathbb{R}_{++}^L, \forall i \in N$ ) の下で、単調性、連続性、凸性を満たすいかなる利己的選好を与えても、コアは実行可能な資源配分の全体である帰結空間  $Z$  の真部分集合になる。ワルラス均衡の資源配分はコアに属するので、ワルラス対応は全射性を満たさない。

以上から、ギバード・サタースウェイト定理（定理2.8）を純粋交換経済にそのまま応用することには注意が必要なことが理解できる。とりわけ、設計目標をワルラス対応としたとき、ギバード・サタースウェイト定理を直接応用することはできない。

図1：ワルラス対応のナッシュ遂行不可能性



### 2.4 ワルラス対応の遂行不可能性からハーヴィッツの定理へ

ワルラス対応の遂行可能性に対する吟味は、恐らく、Hurwicz (1972) が最初であろう。ハーヴィッツは、ワルラス対応のナッシュ遂行不可能性を予測し、そこから後に「ハーヴィッツの定理」と呼ばれる命題に発展させている。

ワルラス対応がナッシュ遂行不可能なことを確認しよう。ここでは、ワルラス対応から任意にセレクションをとってきたとして、図を用いて示してみる<sup>9)</sup>。

図1では、2人の消費者（消費者A、消費者B）の真の選好が、各々、無差別曲線  $U_A^0$ ,  $U_A^1$  と  $U_B^0$ ,  $U_B^1$  で表されている。効用関数で表せば、各消

費者  $i = A, B$  に対し,  $U_i = x_{i1}x_{i2}$  であり, いずれの消費者も同一の選好をもつ。初期資源配分は, エッジワース・ボックスの点  $\omega$  である (図では  $\omega = ((9, 1), (1, 9))$  としている)。さて, 消費者Bが真の選好を表明しているとし, 消費者Bのオファー曲線  $OC_B$  上で消費者Aが効用最大となる資源配分  $x'$  を考えよう。もし消費者Aが図1の破線で示された無差別曲線(レオンチェフ型効用関数)で表される選好を表明すれば, 点  $x'$  は破線で示される無差別曲線と消費者Bの真の無差別曲線に照らしたときにワルラス均衡での資源配分になる。かくして, 次の命題が成り立つ。

**命題2.10.** 2人2財の純粋交換経済 ( $|N| = 2, \ell = 2$ ) において, 各消費者  $i \in N$  に対し, 環境空間  $E_i$  は定理2.9の条件を満たす選好順序の全体とする。このとき, ワルラス対応を設計目標にすれば, 任意のセレクションに対し, 誘因両立性を満たしながらナッシュ遂行することはできない。

この結果, 表明原理 (定理2.3) より, 次が成り立つ。

**系2.11.** 2人2財の純粋交換経済 ( $|N| = 2, \ell = 2$ ) において, 各消費者  $i \in N$  に対し, 環境空間  $E_i$  は定理2.9の条件を満たす選好順序の全体とする。このとき, ワルラス対応はナッシュ遂行不可能である。

このようにして, ワルラス対応を設計目標にしても, ナッシュ遂行可能な資源配分ルールの設計はできないのである。

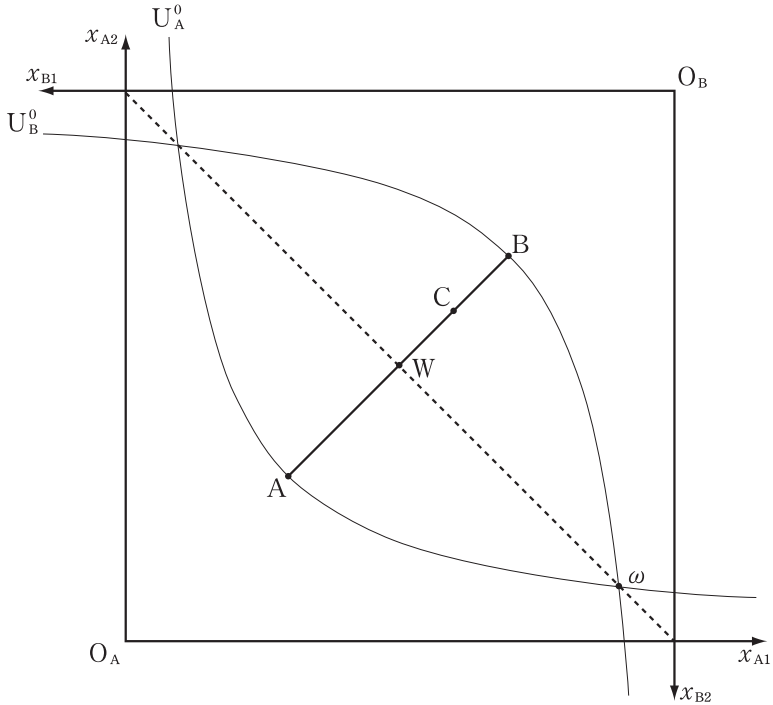
それでは, 純粋交換経済では, どのような社会的選択関数であれば, 設計目標にすることができるのか。その答えが「ハーヴィッツの定理」である。

**定理2.12 (Hurwicz, 1972).** 2人2財の純粋交換経済 ( $|N| = 2, \ell = 2$ ) において, 各消費者  $i \in N$  に対し, 環境空間  $E_i$  は定理2.9の条件を満たす選好順序の全体とする。このとき, 次の条件を満たす社会的選択関数は存在しない。

---

9) ワルラス対応は, ナッシュ遂行の必要条件であるマスキンの単調性を境界上で満たさないことが知られている。ナッシュ遂行可能性の必要十分条件については, 別途, サーベイする予定である。

図2：ハーヴィッツの定理



(IR) 個人合理性；(P) パレート効率性；(SP) 耐戦略性。

ハーヴィッツの定理を図で示すと次のようになる。図2は、図1と同じ環境を想定している。すべての消費者が真の選好を表明しているとき、個人合理性を満たす資源配分は無差別曲線  $U_A^0$  と  $U_B^0$  に挟まれた領域になる。その領域内でパレート効率な資源配分は、点Aと点Bを結んだ直線上になる。点Wは、真の選好の下でのワルラス均衡での資源配分を示す。さて、社会的選択関数は、個人合理性とパレート効率性を満たす資源配分、点Aから点B上の中点を選ぶとしよう。2人とも真の選好を表明していれば点Wになる。そこで、消費者Bが真の選好を表明しているときに、消費者Aは図の破線の無差別曲線で表される選好、すなわち、効用関数  $U_A = x_{A1} + x_{A2}$  を表明すれば、個人合理性とパレート効率性を満たす資源配分は、点Wと

点Bを結んだ直線上に位置する。その中点は点Cであるから、真の選好で評価したとき消費者Aは選好が  $U_A = x_{A1} + x_{A2}$  であると虚偽報告することで改善する。すなわち、耐戦略性、条件 (3) を満たさない<sup>10)</sup>。

社会的選択関数が個人合理性とパレート効率性を満たす資源配分の全体の中点を選ばない場合は、どうであろうか。例えば、点Wよりも点A側の点を選ぶ場合は、消費者Aが虚偽報告のインセンティブを持つことは明らかであろう。それでは、点Wよりも点B側の点を選ぶ社会的選択関数であれば、どうであろうか。実は、今度は、消費者Bが虚偽報告をするインセンティブを持つのである。

### 3 ハーヴィッツ定理の頑健性

ハーヴィッツの定理は、2人2財の純粋交換経済で成り立つ。消費者を3人以上、あるいは商品を3財以上に拡張したときにも、ハーヴィッツの定理は成り立つのであろうか。本節では、消費者数、商品数を増やした場合の分析をサーベイする。

#### 3.1 Hurwicz and Walker (1990) の分析

純粋交換経済における遂行可能性に対する研究の多くが、独裁制と関係付けたギバード・サタースウェイト定理の純粋交換経済版を示そうとするのに対し、ハーヴィッツ定理の直接的拡張に対する試みは、意外と少ない。そのような方向性の研究の1つとして Hurwicz and Walker (1990) を紹介しよう。

10) 本稿では、ナッシュ遂行可能性についてはサーベイ対象ではないが、ここで若干の補足をしておこう。上記の社会的選択関数は、ナッシュ遂行の必要条件であるマスキ単調性を満たさないことを示せる。図2の点Cを社会的に選択する選好の組（消費者Aが線形、Bがコブダグラス型の効用関数）において、双方がコブダグラス型の選好に変わったときにも点Cが社会的に選択されれば、社会的選択関数はマスキ単調性を満たす。ところが、後者の場合、点Wであるから、社会的選択関数はマスキ単調性を満たさない。したがって、上記の社会的選択関数はナッシュ遂行不可能である。

Hurwicz and Walker (1990) の分析の特徴は、(1)  $\ell$  個の商品とニューメレールの純粋交換経済において、(2)  $\ell$  個の商品の消費量の組を  $x_i \in \mathbb{R}_+^\ell$ 、ニューメレールの消費量を  $y_i \in \mathbb{R}_+$  としたとき、各主体の環境  $E_i$  を、準線形効用関数  $v_i(x_i) + y_i$  において連続、厳密に増加、厳密に凹関数となる  $v_i$  の全体  $V$  とし、(3)  $|N| \geq 2$  を想定する。ここで、消費者  $i \in N$  の消費計画を  $z_i \equiv (x_i, y_i)$  とすれば、帰結空間  $Z$  は実行可能な資源配分  $(z_i)_{i \in N}$  の全体となる。特に、 $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^\ell$  を  $\ell$  個の商品の経済全体の初期付与量とすれば、

$$X \equiv \left\{ (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^{\ell|N|} \mid \sum_{i \in N} x_i = \bar{x} \right\}$$

は  $\ell$  個の商品が完全利用されるとき  $\ell$  個の商品の資源配分の全体を表す。同様に、 $\bar{y} > 0$  をニューメレールの経済全体の初期付与量とすれば、

$$Y \equiv \left\{ (y_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^{|N|} \mid \sum_{i \in N} y_i = \bar{y} \right\}$$

はニューメレールが完全利用されるときニューメレールの資源配分の全体を表す。消費者が 2 人、 $\ell = 1$  の場合、直積  $X \times Y$  はエッジワース・ボックスを表す。パレート効率な資源配分については、次の命題が成り立つ(証明は、拙著 (2009, 17章) を参照)。

**レンマ3.1.** 資源配分  $(x, y) \in Z$  が  $v = (v_i)_{i \in N}$  においてパレート効率であることの必要十分条件は、 $(x, y) \in X \times Y$ 、かつ、 $x \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \sum_{i \in N} v_i(x_i)$  である。

社会的選択関数  $F : V^{|N|} \rightarrow Z$  があったとき、 $\ell$  個の商品とニューメレールの資源配分への社会的選択を各々  $F_x$ 、 $F_y$  で表そう。すなわち、 $F \equiv F_x \times F_y$  である。このとき、

$$N(F) \equiv \left\{ v \in V^{|N|} \mid F(v) \in X \times Y \vee F_x(v) \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \sum_{i \in N} v_i(x_i) \right\}$$

と定義すれば、レンマ3.1より、集合  $N(F)$  は社会的選択関数  $F$  がパレート効率性を満たさない環境の全体になる。

**定理3.2 (Hurwicz and Walker, 1990).**  $X^0$  を  $X$  上の開集合とする。もし



$F$ を誘因両立性を満たして支配戦略遂行すれば、 $N(F)$ は  $F_x^{-1}(X^0)$  において稠密である。

但し、 $V$ 上の位相は sup-ノルム位相を想定し、 $V^{|\mathcal{N}|}$ 上の位相はそれらの積位相（射影が連続となる最小位相）を考える。

ハーヴィッツ・ウォーカー定理（定理3.2）は、純粋交換経済では、誘因両立性を満たす支配戦略遂行可能な社会的選択関数は、パレート効率性をほとんど満たさないことを示唆している。

### 3.2 Serizawa (2002) の分析

ハーヴィッツ・ウォーカー定理は、ハーヴィッツ定理を文字通りに拡張した命題ではない。文字通りの拡張に成功したのは、Hurwicz (1972) 以来、近年に発表された Serizawa (2002) まで見つけることができない。

Serizawa (2002) の分析は、ハーヴィッツの定理を3人以上、あるいは3商品以上に拡張するにあたり、定義域を指定した分析が有効であることを示す次の命題を大きく利用している<sup>11)</sup>。

**レンマ3.3.** ある定義域  $D \subset E$  において、個人合理性、パレート効率性、耐戦略性を満たす社会的選択関数  $F : D \rightarrow Z$  は存在しないとしよう。このとき、任意の定義域  $D' \supset D$  に対し、個人合理性、パレート効率性、耐戦略性を満たす社会的選択関数  $F : D' \rightarrow Z$  は存在しない。

[証明] 対偶命題が成り立つことを証明する。仮に、個人合理性、パレート効率性、耐戦略性を満たす社会的選択関数  $F : D' \rightarrow Z$  が存在したとしよう。 $\widehat{F}$ を $F$ の $D$ への制限とする。 $\succ \in D$ ならば  $\succ \in D'$  であるから、 $\widehat{F}(\succ) = F(\succ)$  となって、 $\widehat{F}$ は個人合理性、パレート効率性、耐戦略性を満たす。

11) レンマ3.3の原形は、Serizawa (2002, Corollary 1, p.224) であるが、そのアイデア自体は既に Dasgupta et al. (1979, Theorem 4.4.1の証明) に見ることができる。本稿では、他の文献で証明が与えられている命題については、原則、証明を省略するが、レンマ3.3の直接証明を参照可能な文献を発掘できなかったため（拙者の読み込み不足も否定できないことに注意されたい）、以下に証明を付すことにした。

個人合理性, パレート効率性, 耐戦略性は, 定義域を縮小しても維持される性質である。したがって, 可能性定理を追求するのであれば, それらを満たす最大の定義域を調べることが求められるが, 不可能性定理であれば, それらを満たさない定義域の性質を確定できれば良い。Serizawa (2002) が示した定義域の範囲は, 次の通りである。

**定理3.4 (Serizawa, 2002).**  $|N| \geq 2, \ell \geq 2$ , 各消費者  $i \in N$  に対し環境空間  $E_i$  が利己性, 連続性, 強凸性, 強単調性を満たし, 相似 (homothetic), かつ, 滑らかな選好順序の全体とする。このとき, 個人合理性, パレート効率性, 耐戦略性を満たす社会的選択関数は存在しない。

ここで, 「滑らか (smooth)」な選好とは, 微分可能な効用関数という意味ではなく, 上位集合  $U(x, \succeq_i) \equiv \{x' \in \mathbb{R}_+^\ell \mid x' \succeq_i x\}$  を消費計画  $x$  において支持する超平面 (但し, 法線ベクトル  $p$  は  $p \neq 0$  であること) が存在することをいう<sup>12)</sup>。Serizawa (2002) は, 相似な効用関数を含む定義域であれば, 消費者数, 商品数無関係にハーヴィッツの定理が成り立つことを示したのである。

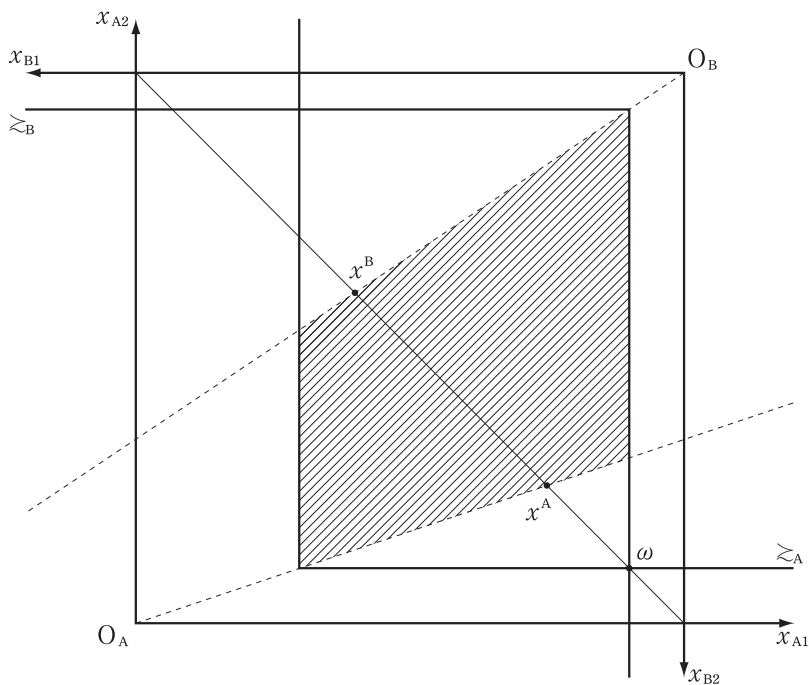
### 3.3 定義域の制限とハーヴィッツの定理

Serizawa (2002) の分析は, CES型効用関数など, 様々な応用に使われる典型的な効用関数の族であれば, ハーヴィッツの定理が一般的に成り立つことを示している。しかしながら, ハーヴィッツの定理が成り立たない定義域の範囲が存在するのか否かについては, 何らの理解を与えない。このような疑問に対し, Nicolò (2004) は次の結果を示した。

**定理 3.5 (Nicolò, 2004).**  $|N| \geq 2, \ell \geq 2$ , 各消費者  $i \in N$  に対し環境空間  $E_i$  が利己性を満たし, レオンチェフ型効用関数で表される選好順序の全体とする。このとき, 社会的選択関数が現状中位投票者ルールであれば,

12) 選好の連続性と凸性は, 上位集合  $U(x, \succeq_i)$  が任意の消費計画  $x$  に対し閉かつ凸集合であることを意味する。閉凸集合は, 閉半空間の共通部分に等しい (Bourbaki, 1987, Corollary I, II.38)。したがって, 連続性と凸性のみで, 選好は Serizawa (2002) のいうところの「滑らか」になると思われる。

図3：現状中位投票者ルール： $F(\succ_A, \succ_B) = x^A$



個人合理性，パレート効率性，耐戦略性を満たす。

ここで、「現状中位投票者ルール (status quo median voter rule)」とは，次のような資源配分ルールである。図説可能なよう2人，2商品の場合を考えよう。図3では，初期資源配分が点 $\omega$ ，真の選好において初期資源配分を通る無差別曲線が消費者A，B各々に対し曲線 $\succ_A$ と $\succ_B$ で与えられている。真の選好の下では，個人合理性とパレート効率性を満たす資源配分の全体は斜線領域になる。

このとき，現状中位投票者ルールでは，取引価格を予め固定する。すなわち，物価統制を行う。例えば，図3の場合，初期資源配分 $\omega$ を通る対角線を与える価格体系に予め取引価格を設定する。各消費者には，各々，取引を望む資源配分を予算線上から選んでもらい，提示してもらう。提示し

てもらった資源配分の中で、予算線上で初期資源配分 $\omega$ に近い資源配分を遂行するのが、現状中位投票者ルールになる。

現状中位投票者ルールの場合、すべての消費者が真の選好の下で予算制約内効用最大化となる資源配分を提示する。消費者Aは資源配分 $x^A$ を、消費者Bは資源配分 $x^B$ を提示するのが最適となり、図3の場合、現状中位投票者ルールは資源配分 $x^A$ を選択する。消費者Aにとっては、資源配分 $x^A$ は真の選好の下で最適であるので、消費者Aは資源配分 $x^A$ を提示するのが最適である。一方、消費者Bは、資源配分 $x^A$ より点 $\omega$ に近い資源配分を予算線上から選んでも、必ず悪化してしまう。したがって、資源配分 $x^B$ を提示するのが支配戦略であることが理解できる。

支配戦略遂行可能であれば、表明原理によって直接メカニズムにおいて真の報告が支配戦略になる。したがって、耐戦略性を満たす。この結果、現状中位投票者ルールは、個人合理性、パレート効率性のみならず、耐戦略性を満たすことが理解できる。

Nicolò (2004) の分析は、定義域をレオンチェフ型効用関数の族に制限すると、個人合理性、パレート効率性、耐戦略性を満たす社会的選択関数が存在することを意味している。これに対し、Serizawa (2002) はCES型効用関数の族であれば、ハーヴィッツの定理が成り立つことを示している。CES型効用関数は、代替の弾力性がゼロのときにレオンチェフ型効用関数に一致する。したがって、代替の弾力性がゼロからいくらの範囲であれば、ハーヴィッツの定理が成り立たないのか、疑問として残ることになる。これはあくまでも拙者の予測に過ぎないが、代替の弾力性がゼロのとき、しかも、そのときに限り、ハーヴィッツの定理が成り立たないのではないかと想像される。もちろん、その証明は、今後の研究に委ねられる。

#### 4 耐戦略的社会的選択関数

ハーヴィッツの定理は、純粹交換経済において遂行可能な社会的選択関数（もしくは対応）の研究を開花させた。遂行不可能であれば、逆に、遂

行可能な条件への興味が湧くのは自然である。本節では、純粋交換経済において、耐戦略性を満たすような社会的選択関数の性質を示した文献をサーベイする。

純粋交換経済の枠組みにおいて、耐戦略的な社会的選択関数に対する研究は、独裁制と同値になる研究と、独裁制とは一切関係付けずに耐戦略性を満たす社会的選択関数の構築といった研究に大きく分けることができる。まずは、耐戦略性を満たす社会的選択関数の特徴化を試みた文献から概観することにしよう。

#### 4.1 Barberà and Jackson (1995) の分析

Nicolò (2004) の分析の元となった分析であり、純粋交換経済において耐戦略性の必要十分条件を示した研究として Barberà and Jackson (1995) がある。Barberà and Jackson (1995) は、独裁制が耐戦略性の必要十分条件であるといったギバード・サタースウェイト定理とは異なる視点から純粋交換経済における耐戦略性を特徴化している。Barberà and Jackson (1995) の成果を 2 人 2 財の純粋交換経済で述べると次になる。

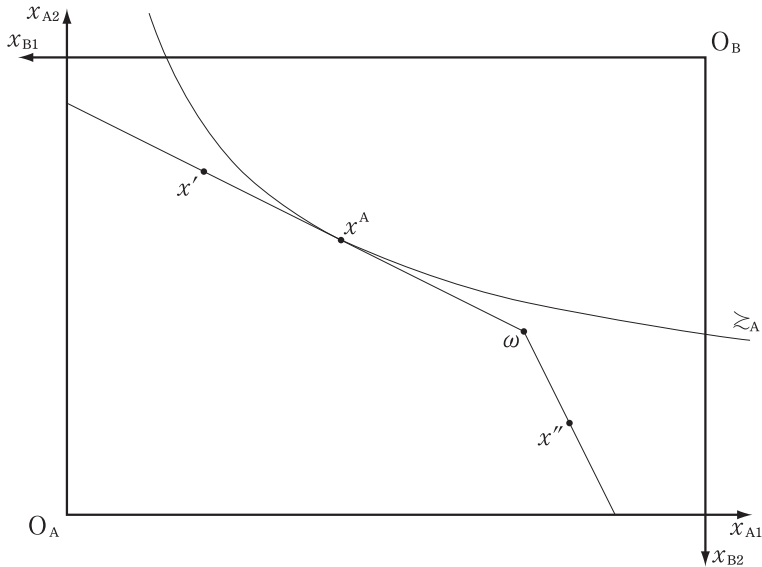
**定理4.1 (Barberà and Jackson, 1995).**  $|N| = 2$ ,  $\ell = 2$  の純粋交換経済において、社会的選択関数が個人合理性と耐戦略性を満たすことの必要十分条件は、社会的選択関数が固定価格取引制であることである。

2 人 2 財の「固定価格取引制 (fixed price trading)」とは、次のような資源配分ルールになる。2 人の消費者、例えば、消費者 A と B がいたとして、先ず、ルール上では一方の消費者が指命される。ここでは、消費者 A としよう。次に、2 つの相対価格  $(p_1/p_2)^S$  と  $(p_1/p_2)^B$  が設定される。但し、

$$(p_1/p_2)^S \leq (p_1/p_2)^B \quad (4)$$

とする。例えば、 $(p_1/p_2)^S = 0.5$ ,  $(p_1/p_2)^B = 2$  である。 $(p_1/p_2)^S$  は、消費者 A が商品 1 を売却するときの相対価格を示し、 $(p_1/p_2)^B$  は消費者 A が商品 1 を購入するときの相対価格を示す。条件 (4) は、消費者 A が裁定取引に

図4：固定価格取引制



よって商品1を無制限に獲得できることを排除する。資源配分ルールに含まれる最後の条件として、消費者Aの売買数量に対する制限を設ける。これは、取引をエッジワース・ボックス内に留めるために設けられる条件になる。このような条件の下で、消費者Aは取引量の上限 $z_1$ を示した上で商品1を売却するのか購入するのかを提示し、消費者Bは商品1の購入量 $z_1^D$ と売却量 $z_1^S$ の双方を提示する。このとき、商品1の取引量 $z_1$ は、次のように決まる。

$$z_1 = \begin{cases} \min\{\bar{z}_1, z_1^S\} & \text{Aが購入の意思表示,} \\ \min\{\bar{z}_1, z_1^D\} & \text{Aが売却の意思表示.} \end{cases}$$

商品2の取引量は、このようにして決まった商品1の取引量を予算線上に移すことで得られる。

図4の点 $x'$ ,  $\omega$ ,  $x''$ を通る屈折した曲線は、相対価格 $(p_1/p_2)^S$ と $(p_1/p_2)^B$

が条件(4)を満たすように与えられたときの予算線になる。消費者Aの真の選好は、無差別曲線 $z_A$ で与えられており、点 $x^A$ はそのときに効用が最大となる資源配分を示す。仮に、消費者Bが点 $x'$ 、 $\omega$ 、 $x''$ を通る予算線上で効用が最大となる資源配分が点 $x'$ と点 $x''$ の2つであったとしよう。もし消費者Bがそれらの資源配分を意味する商品1の売買量 $z_1^B$ と $z_1^S$ を提示すれば、消費者Aは点 $x^A$ を意味する商品1の売却量を提示することで上記の固定価格取引制の下では点 $x^A$ の資源配分になる。また、消費者Aが点 $x^A$ を意味する商品1の売却量を提示するのであれば、消費者Bは点 $x'$ と点 $x''$ の2つの資源配分を意味する売買量を提示するのが最適である。というのは、点 $x^A$ を通る消費者Bの無差別曲線は点 $x'$ 、 $\omega$ を通る予算線の勾配より急であり、したがって、点 $x^A$ と点 $\omega$ の間の資源配分を提示するインセンティブを持たないからである。

同様のことは、例えば、消費者Bにとって、点 $x'$ 、 $\omega$ 、 $x''$ を通る予算線上で効用が最大になる点が点 $x'$ のみであったときにもいえる。この場合、消費者Bは、商品1の販売量をゼロと提示して( $z_1^S = 0$ )、真の選好順序の下での商品1の購入量のみを示せば良い。各消費者は、真の選好の下での売買量を提示するのが最適戦略になる。また、点 $x''$ のみが消費者Bにとって効用が最大となる場合には、 $z_1^B = 0$ を提示することで、資源配分は初期資源配分 $\omega$ になる。

このようにして、固定価格取引制を採用すれば、各消費者は真の選好の下での売買量を提示することが最適になっていることが理解できる。個人合理性と耐戦略性を要求すると、固定価格取引制でなければならないというわけである。但し、固定価格取引制であれば、パレート効率性は満たされない。個人合理性、パレート効率性、耐戦略性は、このようにして、同時に満たされることはなく、Barberà and Jackson (1995)の分析はハーヴィッツの定理を個人合理性、耐戦略性を満たす社会的選択関数の性質を特徴化することで証明したといえる。

## 4.2 耐戦略性 vs. 独裁制

Barberà and Jackson (1995) の分析は、個人合理性と耐戦略性の必要十分条件を探るものであったが、パレート効率性と耐戦略性を満たす社会的選択関数の必要十分条件を探ることでハーヴィッツの定理を証明する研究方向もありえる。実は、Hurwicz (1972) 以来、この研究方向の方がむしろ主流であったといえる。

パレート効率性と耐戦略性の十分条件の1つは、独裁制である。そこで、独裁制がパレート効率性と耐戦略性の必要条件であることを示せば、独裁制がパレート効率性と耐戦略性の必要十分条件であることを示せるだけでなく、独裁制は個人合理性を満たさないので、ハーヴィッツの定理をも証明したことになる。

このアプローチは、ハーヴィッツの定理を文字通りに拡張するのではなく、ハーヴィッツの定理よりも強い定理（したがって、ハーヴィッツの定理よりは証明が容易になる<sup>13)</sup>）を証明することで、間接的にハーヴィッツの定理を証明する接近になる。このような研究の方向性として、耐戦略性ではないが、真の報告を伴う支配戦略遂行に対する結果として次の定理がある。

**定理4.2 (Dasgupta et al., 1979, Theorem 4.4.1).**  $|N| \geq 2$ ,  $\ell \geq 2$ , 各消費者  $i \in N$  に対し環境空間  $E_i$  を利己性, 強凸性, 強単調性を満たす選好順序の全体とする。このとき, 社会的選択関数  $F : E \rightarrow Z$  を支配戦略遂行して真の報告が支配戦略となれば,  $F$  は独裁的である。

この定理については、若干の注釈が必要である。第1に、証明自体は2人2財の純粋交換経済を用いていることである。この点については、Satterthwaite and Sonnenschein (1981, note 2, p. 596) が3人の場合に、次のような反例を示している。

**例4.3 (Satterthwaite and Sonnenschein, 1981).**  $N = \{1, 2, 3\}$ ,  $\ell \geq 2$  とする。 $\bar{\omega} \equiv \sum_{i \in N} \omega_i$ ,  $F(\succ) = (F_1(\succ), F_2(\succ), F_3(\succ))$  としたとき, 消

13) とはいっても、簡単に作成できるわけではない。



費者 3 の消費計画 (1, 1) での限界代替率が 1 以上であれば、 $F_1(z) = \bar{w}$ 、1 より小さければ  $F_2(z) = \bar{w}$  とする。

この例では、独裁者は存在しない。しかも、真の選好順序を表明することが弱支配戦略になっており、社会的選択関数はパレート効率性を満たす。

第 2 に、定理 4.2 では選好の連続性を仮定していないが、Satterthwaite and Sonnenschein (1981, note 2, p.596) が指摘するように、この想定はパレート効率な資源配分自体が存在しない可能性を残してしまっている。そもそも、パレート効率な社会的選択関数が定義されないのであれば、定理は自明で真になる。

これらの問題に対する 1 つの答えとして、Zhou (1991) は次の成果を示した。

**定理 4.4 (Zhou, 1991).**  $|N| = 2$ ,  $\ell \geq 2$  の純粋交換経済において、各消費者の定義域が利己性、強単調性、強凸性、連続性を満たす選好順序の全体であるとする。このとき、パレート効率性、耐戦略性、非逆独裁制を満たす社会的選択関数は存在しない。

ここで、「逆独裁制 (inverse dictatorship)」とは、2 人の消費者を消費者 A, B, 経済全体の初期付与ベクトルを  $\bar{w} \equiv \omega_A + \omega_B$  としたときに、任意の選好順序の組  $z = (z_A, z_B)$  に対し、 $F(z) = (0, x_B)$ 、又は  $F(z) = (x_A, 0)$  となることをいう。前者の場合、消費者 A が「逆独裁者」であり、後者では消費者 B が「逆独裁者」になる。

2 人の場合、一方が独裁者であれば、他方は逆独裁者になる。また、強単調性を想定しているので、パレート効率な資源配分では資源は完全利用されている。したがって、逆独裁者が存在すれば、残りの消費者は独裁者である。すなわち、逆独裁制と独裁制は同値である。

Zhou の成果は、Satterthwaite-Sonnenschein の指摘の内、第 2 の問題を克服したといえる。また、商品数を 2 種類以上としている点も評価に値しよう。しかしながら、Satterthwaite-Sonnenschein が示した反例が何故成り立つのか、裏返せば、定義域が利己性、強単調性、強凸性、連続性を満たす

選好順序の全体であれば、消費者が3人以上でもZhouの結果、特に定理4.2が成り立つのか否かの問題は、残されたままである。

### 4.3 定義域の制限と独裁制

ハーヴィッツの定理は、定義域をレオンチェフ型効用関数の族に制限すると成り立たないことを見た。同様の疑問は、定理4.2に対しても湧いてくる。すなわち、どのような定義域であれば、独裁制がパレート効率性と耐戦略性の必要条件にならないのか、裏返せば、パレート効率性と耐戦略性の必要条件が独裁制となる定義域の最小範囲は何であるかの疑問である。

定理4.2が成り立つ定義域の特徴化については、Schummer (1997) が丁寧な分析を示した。先ず、相似な選好の場合について、次の結果を示している。

**定理4.5 (Schummer, 1997, Theorem 1).**  $|N| = 2, \ell \geq 2$  の純粋交換経済において、各消費者の定義域が単調性、連続性、強凸性、相似性を満たす選好順序の全体であるとする。このとき、社会的選択関数がパレート効率性と耐戦略性を満たせば、独裁的である。

例えば、コブ・ダグラス、CES型効用関数は、相似な選好の典型である。Schummer (1997) は、更に定義域を縮小させて、次の結果を示した。

**定理4.6 (Schummer, 1997, Theorems 2&3).**  $|N| = 2, \ell \geq 2$  の純粋交換経済において、各消費者の定義域が強単調性を満たす線形選好順序の全体であるとする。このとき、社会的選択関数がパレート効率性と耐戦略性を満たせば、独裁的である<sup>14)</sup>。

ここで、線形選好順序とは、

$$x' \succ_i x \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{R}_+^\ell : p \cdot x' \geq p \cdot x$$

が成り立つ選好順序を指す。Schummerは、このようにして、定義域を段階的に縮小させた分析を提供して、定理4.2が  $|N| = 2$  のときに成り立つ

14)  $\ell = 2$  の場合の証明は、坂井他 (2008, 3.3.1) でも紹介されている。

ことを示した。極めて興味深いことは、線形選好順序の場合、4つの異なる選好順序が存在すれば、証明ができることである。逆に、3つ以下の場合、次のような反例を作成できる。

**例4.7 (Schummer, 1997, p.53).**  $|N| = 2$ ,  $\ell = 2$ ,  $\bar{\omega} = (1, 1)$ として、定義域が  $p = (1, 2), (1, 1), (2, 1)$  の3つの線形選好順序のみとする。社会的選択関数は、 $((1, 0), (0, 1))$  がパレート効率になる選好順序の組であれば  $((1, 0), (0, 1))$  を、そうでない場合には  $((0, 1), (1, 0))$  を与える。

この例の場合、社会的選択関数は、耐戦略性、パレート効率性、非独裁制を満たしている<sup>15)</sup>。

Zhou (1991) や Schummer (1997) の定理では、Schummerの線形選好順序を除き、屈折した無差別曲線の存在が極めて大きな役割をもつ。これは、滑らかな選好、例えば、コブ・ダグラス型やCES効用関数に定義域を制限したときにも、彼らと同じ不可能性定理が成り立つか否かの疑問を残す。この疑問に対し、Hashimoto (2008) は次の定理を示した。

**定理4.8 (Hashimoto, 2008).**  $N = \{1, 2\}$ ,  $\ell \geq 2$  の純粋交換経済において、コブ・ダグラス型効用関数  $U = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_\ell^{a_\ell}$  のあるパラメータの組  $((\hat{a}_{1h})_{h=1}^\ell, (\hat{a}_{2h})_{h=1}^\ell)$  をとる。各消費者  $i = 1, 2$  の定義域を  $a_{i1} \geq \hat{a}_{i1}$  としたコブ・ダグラス型効用関数の全体としたとき、パレート効率性と耐戦略性を満たす社会的選択関数は独裁的である。

以上の結果を整理すると、相似、コブ・ダグラス、線形の各々に定義域を制限しても、定理4.2の不可能性定理が成り立つことが理解できる。

$|N| = 2$  の場合、定義域をレオンチェフ型効用関数に制限しない限り、独裁制がパレート効率性と耐戦略性の必要条件になるように予測されるわけであるが、定義域がどのような性質を満たせば不可能性定理が成り立つ程、「豊富 (rich)」であるといえるのであろうか。このような疑問に対す

15) 本稿の主旨から脱線するが、Zhou (1991) と Schummer (1997) は、パレート効率性と耐戦略性が選好順序の組のマスクン単調変換に対し不変 (invariant) であるという成果も示している。論文の本来の目的を果たす中で、このような有益な副産物も産み出されている。

る1つの答えとして、Ju (2003) による分析がある。その詳細はJu (2003) に譲るが、CES, 期待効用, 準線形, 異時点間上の効用, 例えば,

$$U = \sum_{t=0}^T \delta^{t-1} u(x_t)$$

といった効用関数の族も又, 独裁制がパレート効率性と耐戦略性の必要条件になる程, 定義域がJuの意味で「豊富」であることが示されている。

## 5 結語

本稿では, ハーヴィッツが1972年に示した不可能性定理の拡張, 一般化, あるいは反例について, 近年の研究成果も踏まえてサーベイを行ってきた。ハーヴィッツの定理それ自体を文字通りに一般化した定理は, 実は, 存在していないと結論付けられる。この点について, 以下で議論して本稿を締めくくりにしたい。

坂井他 (2008, p.86) は「ハーヴィッツ以来の未解決問題は事実上の解決を見た」としているが, Serizawa (2002) の成果は, 相似な効用関数の族に定義域を制限してもハーヴィッツの定理が成り立つことを示したと考えるのが, 実は妥当であるように見える。というのは, レオンチェフ型効用関数の族に定義域を制限すればハーヴィッツの定理が成り立たないという Nicolò (2004) の成果は, 定義域を特定の効用関数の族に制限したときにハーヴィッツの定理が成り立つのか否かの疑問を投げているからである。このようにして, Serizawa (2002) は定義域を相似な効用関数の族に制限してもハーヴィッツの定理は成り立つが, Nicolò (2004) は相似でもレオンチェフ型効用関数の族に制限すればハーヴィッツの定理は成り立たないことを示したと位置付けられる。

相似や線形, レオンチェフ型, CES型など, それらもつ性質を利用した証明ではなく, より一般的に利己性, 強単調性, 凸性, 連続性を満たす合理的な選好順序の全体においてハーヴィッツの定理が消費者数, 商品数

無関係に成り立つことを示す研究成果が求められているといえる。

〈参考文献〉

- Barberá, S. (1983) “Strategy-Proofness and Pivotal Voters: A Direct Proof of the Gibbard-Satterthwaite Theorem,” *International Economic Review*, Vol.24, No.2, pp.413-417.
- Barberá, S. (2001) “An Introduction to Strategy-Proof Social Choice Functions,” *Social Choice and Welfare*, Vol.18, No.4, pp.619-653.
- Barberá, S. and Jackson, M. O. (1995) “Strategy-Proof Exchange,” *Econometrica*, Vol.63, No.1, pp.51-87.
- Bourbaki, N. (1987) *Topological Vector Spaces*, Chapters 1-5, New York: Springer-Verlag.
- Ching, S. and Zhou, L. (2002) “Multi-Valued Strategy-Proof Social Choice Rules,” *Social Choice and Welfare*, Vol.19, No.3, pp.569-580.
- Dasgupta, P., Hammond, P., and Maskin, E. (1979) “The Implementation of Social Choice Rules: Some General Results on Incentive Compatibility,” *Review of Economic Studies*, Vol.46, No.2, pp.185-216.
- Gibbard, A. (1973) “Manipulation of Voting Schemes: A General Result,” *Econometrica*, Vol.41, No.4, pp.587-601.
- Hashimoto, K. (2008) “Strategy-Proofness versus Efficiency on the Cobb-Douglas Domain of Exchange Economies,” *Social Choice and Welfare*, Vol.31, No.3, pp.457-473.
- Hayek, F. A. (1945) “The Use of Knowledge in Society,” *American Economic Review*, Vol.35, No.4, pp.519-530.
- Hurwicz, L. (1960) “Optimality and Informational Efficiency in Resource Allocation Processes,” in K. J. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes eds. *Mathematical Models in the Social Sciences*, Stanford: Stanford University Press, pp.27-46.
- (1972) “On Informationally Decentralized Systems,” in C. B. McGuire and R. Radner eds. *Decision and Organization: A Volume in Honor of Jacob Marschak*, Amsterdam: North-Holland, pp.297-336.
- Hurwicz, L. and Reiter, S. (2006) *Designing Economic Mechanisms*, New York: Cambridge University Press.
- Hurwicz, L. and Walker, M. (1990) “On the Generic Nonoptimality of Dominant-Strategy Allocation Mechanisms: A General Theorem That

- Includes Pure Exchange Economies,” *Econometrica*, Vol.58, No.3, pp.683-704.
- Jackson, M. O. (2001) “A Crash Course in Implementation Theory,” *Social Choice and Welfare*, Vol.18, No.4, pp.655-708.
- Jordan, J. S. (1982) “The Competitive Allocation Process is Informationally Efficient Uniquely,” *Journal of Economic Theory*, Vol.28, No.1, pp. 1-18.
- Ju, B.-G. (2003) “Strategy-Proofness versus Efficiency in Exchange Economies: General Domain Properties and Applications,” *Social Choice and Welfare*, Vol.21, No.1, pp.73-93.
- Kelly, J. S. (1977) “Strategy-Proofness and Social Choice Functions without Singlevaluedness,” *Econometrica*, Vol.45, No.2, pp.439-446.
- Maskin, E. S. (1985) “The Theory of Implementation in Nash Equilibrium: A Survey,” in L. Hurwicz, D. Schmeidler, and H. Sonnenschein eds. *Social Goals and Social Organization: Essays in memory of Elisha Pazner*, Cambridge: Cambridge University Press, pp.173-203.
- McLean, R. and Postlewaite, A. (2002) “Informational Size and Incentive Compatibility,” *Econometrica*, Vol.70, No.6, pp.2421-2453.
- Moore, J. (1992) “Implementation, Contracts, and Renegotiation in Environments with Complete Information,” in J.-J. Laffont ed. *Advances in Economic Theory Sixth World Congress*, Vol. I, Cambridge: Cambridge University Press, pp.182-282.
- Moulin, H. (1982) “Non-Cooperative Implementation: A Survey of Recent Results,” *Mathematical Social Sciences*, Vol.3, No.3, pp.243-257.
- Muller, E. and Satterthwaite, M. A. (1985) “Strategy-Proofness: the Existence of Dominant-Strategy Mechanisms,” in L. Hurwicz, D. Schmeidler, and H. Sonnenschein eds. *Social Goals and Social Organization: Essays in memory of Elisha Pazner*, Cambridge: Cambridge University Press, pp.131-171.
- Myerson, R. B. (1981) “Optimal Auction Design,” *Mathematics of Operations Research*, Vol.6, No.1, pp.58-73.
- Nehring, K. (2000) “Monotonicity implies Generalized Strategy-Proofness for Correspondences,” *Social Choice and Welfare*, Vol.17, No.2, pp.367-375.
- Nicolò, A. (2004) “Efficiency and Truthfulness with Leontief Preferences. A Note on Two-Agent, Two-Good economies,” *Review of Economic Design*, Vol.8, No.4, pp.373-82.
- Palfrey, T. R. (1992) “Implementation in Bayesian Equilibrium: The Multiple

- Equilibrium Problem in Mechanism Design,” in J.-J. Laffont ed. *Advances in Economic Theory Sixth World Congress*, Vol.I, Cambridge: Cambridge University Press, pp.283-323.
- (2002) “Implementation Theory,” in R. J. Aumann and S. Hart eds. *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Vol.III, Amsterdam: North-Holland, pp.2271-2326.
- Sato, S. (2008) “On Strategy-Proof Social Choice Correspondences,” *Social Choice and Welfare*, Vol.31, No.2, pp.331-343.
- Satterthwaite, M. A. (1975) “Strategy-Proofness and Arrow’s Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions,” *Journal of Economic Theory*, Vol.10, No.2, pp.187-217.
- Satterthwaite, M. A. and Sonnenschein, H. (1981) “Strategy-Proof Allocation Mechanisms at Differentiable Points,” *Review of Economic Studies*, Vol.48, No.4, pp.587-597.
- Schummer, J. (1997) “Strategy-Proofness versus Efficiency on Restricted Domains of Exchange Economies,” *Social Choice and Welfare*, Vol. 14, No.1, pp.47-56.
- Serizawa, S. (2002) “Inefficiency of Strategy-Proof Rules for Pure Exchange Economies,” *Journal of Economic Theory*, Vol. 106, No.2, pp.219-241.
- Serrano, R. (2004) “The Theory of Implementation of Social Choice Rules,” *SIAM Review*, Vol.46, No.3, pp.377-414.
- Zhou, L. (1991) “Inefficiency of Strategy-Proof Allocation Mechanisms in Pure Exchange Economies,” *Social Choice and Welfare*, Vol.8, No.3, pp.247-254.
- 奥山利幸 (2009) 『ミクロ経済学』, 白桃書房.
- 西條辰義・大和毅彦 (2006) 「自然なメカニズム・デザインをめざして」, 鈴木興太郎・長崎貞男・花崎正晴 (編) 『経済制度の生成と設計』, 東京大学出版会, 第2章, 55-101頁.
- 坂井豊貴・藤中裕二・若山琢磨 (2008) 『メカニズムデザイン—資源配分制度の設計とインセンティブ』, ミネルヴァ書房.
- 芹澤成広 (2003) 「戦略的虚偽表明を防止する社会的意決定の方法: 効率性と平等性の追求 vs. 戦略的虚偽表明の防止」, 小野善康・福田慎一・中山幹夫・本多佑三 (編) 『現代経済学の潮流 2003』, 東洋経済新報社, 第5章, 145-180頁.

## Strategy-Proofness in Economic Environments: A Survey on Generalizations of the Hurwicz Theorem

Toshiyuki OKUYAMA

### 《Abstract》

In this paper, three approaches to generalizing the Hurwicz Theorem are surveyed. The first approach is literal generalization, which involves extending the number of agents and commodities to more than two. The second is composed of two steps: (1) proving that dictatorship is necessary for strategy-proofness in a general setting, and (2) invoking the fact that dictatorship is not individually rational. The third approach is to discover what conditions are necessary and sufficient for strategy-proofness and individual rationality. Directions for possible future research are also presented.