ファジィ計算可能関数について

TANAKA, Hisao / 田中, 尚夫

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
25
(開始ページ / Start Page)
19
(終了ページ / End Page)
31
(発行年 / Year)
1989-02
(URL)
https://doi.org/10.15002/00003935

ファジィ計算可能関数について

田 中 尚 夫*

On Fuzzy Computable Functions

Hisao TANAKA*

Abstract

Zadeh [Z 2] introduced the notion of fuzzy algorithms and subsequently Santos [S 1], [S 2] formulated Zadeh's idea on fuzzy Turing machines and defined fuzzy computable functions. Recently Clares and Delgado [CD] introduces a notion of fuzzy recursiveness, but their definition of fuzzy recursive functions does not seem to be natural one. The aim of this report is to discuss some properties of fuzzy computable functions and to consider another notion of fuzzy recursiveness. Various problems will be proposed.

アルゴリズムの概念，あるいは同等に，計算可能性の概念は，帰納的関数の理論の確立とともに直観的な概念から数学的概念へと定式された。それはチャーチの提唱によって"エフェクティヴに計算可能な関数は帰納的関数である"として把握されている。

他方，Zadeh は二十数年前に，あいまいさの概念を定式化し，ファジィ集合を導入した [Z 1] が，彼は間もなくこれをアルゴリズムと結合し，ファジィ・アルゴリズムの概念を得た [Z 2]。Zadeh の記述は直観的なアウトラインのみであったので，Santos は Zadeh によるファジィ・チューリング・マシンを数学的に定式化し，これによってファジィ計算可能関数を定義した [S1], [S 2]。しかし現在までの研究では，具体的にどんな関数（あるいは集合）がファジィ計算可能であり，またファジィ計算可能でない関数や集合が存在するかという問題は見過されてきた。またごく最近，Clares と Delgado [CD] はファジィ帰納的関数を導入したが，彼等の定義は後述の理由によって自然な定義とは言い難い。

本報告の目的は上記の諸点について考察し，この理論の recursion-theoretic な様相を調べ，さらに今後追究すべき諸問題点を指摘することである。

* 計測制御専攻

§1.　ファジィ・チューリング・マシンとファジィ計算可能性

ファジィ・チューリング・マシンとファジィ・チューリング計算可能集合（関数）の定義を述べる。これは [S 1], [S 2], および [CD] の中の定義を若干モディファイしたものである。

順序半環

$$W=\langle[0, 1], \vee, \otimes, \leq\rangle$$

を用いる。ここに $\vee$ は sup である。$\otimes$ は inf$(=\wedge)$ または通常の積であり，必要な場面ではこれを特定する。$\leq$ は実数の閉区間 $[0, 1]$ 上の通常の線形順序である。

ファジィ・チューリング・マシン (FTM) とは次のようなシステムを言う

$$M=\langle S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, F\rangle=\langle S^{(M)}, \Sigma^{(M)}, \Gamma^{(M)}, \delta^{(M)}, s_0^{(M)}, F^{(M)}\rangle$$

ここに，S は（内部）**状態**と呼ばれる記号の有限集合，Σ は**入力記号**のアルファベット，Γ は**テープ記号**の有限集合で，$\Sigma\cup\{\#\}\subseteq\Gamma$（$\#$ は空白記号，$\#\in\Sigma$ のこともある），$\Gamma\cap S=\phi$ なるものとする。δ は

$$\delta:(S\times\Gamma)\times(S\times\Gamma\times\{+, -, \cdot\})\rightarrow W$$

なる関数で，**遷移度関数**と呼ばれる。ただし，$+$, $-$, $\cdot$ はそれぞれ右，左，不動を表し，マシンのヘッドの動きを規定する。それらは S にも Γ にも現れない記号で，$s\neq s'$ ならば，$\delta(s, a; s', b, \cdot)=0$ とする。ここに $s, s'\in S$, $a, b\in\Gamma$ とする。

また，$s_0\in S$ は**開始記号**で，F は $F: S\rightarrow\{0, 1\}$ なる関数である。$F=\{s|F(s)=1\}$ とし，F のメンバーを**受理状態**という。

この定義では，開始記号をただ1つに決めてある。[S 1] において，開始記号を1つに決めておいても一般性を失わないことが示されているからである。

一般に，集合 A に対し，A の要素の有限列全体の集合を A^* で表す。特に空列を λ で表す。Γ^* の要素をテープ表現と言い，$(S\cup\Gamma)^*$ のメンバーで S の記号を丁度1個含むものを M の**時点表示** (ID) という。α が M の ID であるとき，

　$st(\alpha)$: α の中の S の記号

　$sc(\alpha)$: $st(\alpha)$ の右隣の記号 $\in\Gamma$，これを α の注目記号という。

　$tp(\alpha)$: α から $st(\alpha)$ を除去して得られる Γ^* の要素，これを α のテープ表現と言う。

したがって

$$\alpha=(st(\alpha), sc(\alpha), tp(\alpha))$$

のように書くことができる。M の ID 全体の集合を $\boldsymbol{D}(M)$（混乱の恐れがなければ $\boldsymbol{D}$）で表す。

$\alpha, \beta\in\boldsymbol{D}$ に対し，M によって α から β へ移る**度合**（**重み**）$p(\alpha|\beta)$ を次のように定義する。$s, s'\in S$, $x, y\in\Gamma^*$, $c, c'\in\Gamma$ として，

1°)（a）$\alpha=xscy$, $\beta=xc's'y$ ($x=\lambda$, $c'=\#$ なら，c' を省く；すなわち $\alpha=scy$, $\beta=s'y$) で

あるか，（b）$\alpha=xsc$, $\beta=xc's\#$ であれば，$p(\alpha|\beta)=\delta(s, c; s', c', +)$ とする。

2°)（a）$\alpha=xdscy$, $\beta=xs'dc'y(y=\lambda$, $c'=\#$ ならば c' を省く；すなわち $\alpha=xdsc$, $\beta=xs'd)$ であるか，（b）$\alpha=scy$, $\beta=s'\#c'y$ であれば，$p(\alpha|\beta)=\delta(s, c; s', c', -)$ とする。

3°) その他の場合は，$p(\alpha|\beta)=0$ とする。

Mへの依存を明確にしたいときは，$p^{(M)}$ と書く。

ID の有限列全体を $\boldsymbol{D}^+$(正確には $\boldsymbol{D}^+(M)$) で表す（空列は含めない)。$\bar{\alpha}\in\boldsymbol{D}^+$ に対し

$$\bar{\alpha}=(\alpha_0, \alpha, \cdots\cdots, \alpha_l)$$

と書く。ここに $\alpha_i\in\boldsymbol{D}$ であり，$l=lh(\bar{\alpha})$ を $\bar{\alpha}$ の長さという。かかる $\bar{\alpha}$ に対し

$$\Omega[\bar{\alpha}](=\Omega(M)(\bar{\alpha}))=p(\alpha_0|\alpha_1)\otimes p(\alpha_1|\alpha_2)\otimes\cdots\cdots\otimes p(\alpha_{l-1}|\alpha_l)$$
$$\otimes\delta(st(\alpha_l), sc(\alpha_l); st(\alpha_l), sc(\alpha_l), \cdot)$$

を，α_0 で始まり α_l で停止する計算 $\bar{\alpha}$ の度合と言う。このとき，x, $y\in\Sigma^*$ に対し

$$\Phi(M)(x)=\vee\{\Omega[\bar{\alpha}]\otimes F(st(\alpha_l))|\bar{\alpha}\in\boldsymbol{D}^+, \alpha_0=s_0x, l=lh(\bar{\alpha})\}$$

$$\Phi(M)(x|y)=\vee\{\Omega[\bar{\alpha}]\otimes F(st(\alpha_l))|\bar{\alpha}\in\boldsymbol{D}^+, \alpha_0=s_0x, l=lh(\bar{\alpha}), tp(\alpha_l)=y\}$$

が定義される。$\Phi(M)(x)$ は $\alpha_0=s_0x$ で出発し受理状態で停止するようなあらゆる計算 $\bar{\alpha}$ の度合たちの最小上界であり，Mによって定義されたファジィ集合と言う。$\Phi(M)(x|y)$ は s_0x で出発し，$tp(\alpha_l)=y$ なる ID α_l で受理状態を以って停止するようなあらゆる計算 $\bar{\alpha}$ の度合たちの最小上界であり，Mによって定義されたファジィ関数と呼ばれる。x の代わりに

$$x_1\#x_2\#\cdots\cdots\#x_k$$

を使うことにより，これらは k-ary ファジィ集合（すなわち述語，関係)，k-ary ファジィ関数の場合に拡張される。以下同様な拡張については言及しない。

f: $\Sigma^*\times\Sigma^*\to W$ なる f がファジィ部分計算可能関数であるとは，ある FTM M が存在して，すべての x, $y\in\Sigma^*$ に対し

$$f(x|y)=\Phi(M)(x|y)$$

が成り立つことである。このとき，

$$Dom(f)=\{x|\exists y[\Phi(M)(x|y)>0]\}$$

を f の定義域という。特に $Dom(f)=\Sigma^*$ ならば，f は全域的であり，ファジィ計算可能関数と呼ばれる。([CD] のファジィ部分計算可能関数の定義では，定義域を任意に与える方式となっているので，エフェクティヴ性がなく，古典帰納関数理論と対比して，不自然である。)

また，A: $\Sigma^*\to W$ なるファジィ集合に対し，ある FTM M があって

$$A(x)=\Phi(M)(x)\qquad(x\in\Sigma^*)$$

となるならば，Aはファジィ計算可能集合であると言う。このとき次の定理が成り立つ。

定理 1. 1　⊗を通常の積とする。g_i: $\Sigma^*\to\Sigma^*$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ が帰納的関数であって，$i=1, 2, \cdots, k$ に対し r_i が $0<r_i<1$ なる実数であるとき，

$$A(x)=r_1^{|g_1(x)|}\cdot r_2^{|g_2(x)|}\cdots\cdots r_k^{|g_k(x)|} \qquad (x\in\Sigma^*)$$

で定義されるファジィ集合Aはファジィ計算可能である。ただし $x\in\Sigma^*$ に対し $|x|$ は有限列xの長さである。

証明　g_i を計算する TM を M_i とする。入力xに対し，先づxで M_1 を走らせ $g_1(x)$ を計算する。数表現を unary notation で行っておく。よって $g_1(x)$ の値がその長さ $|g_1(x)|$ になる。この計算は重み1で行う。そこで値 $g_1(x)$ の文字を1個読むごとにそれを消して重み r_1 を乗ずる。読み終ったならば入力xの先頭に戻り今度は M_2 を走らせ $g_2(x)$ を計算する（このような行動は重み1で行われる)。再び $g_2(x)$ の文字を1個読むごとにそれを消して重み r_2 を乗ずる。この操作を $g_k(x)$ についてまで続ける。かくして，最終のファジィ値が所要のものとなる FTM が得られる。 □

なお，通常の集合 ($\subseteq\Sigma^*$) がファジィ計算可能であれば，それは帰納的集合になる。これは柳下健二によって指摘された：

定理1.2　A: $\Sigma^*\to\{0, 1\}$ を crisp set とする。Aがファジィ計算可能ならば，Aは帰納的である。

証明　仮定により或 FTM $M=\langle S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, F\rangle$ があって

$$\begin{aligned}A(x)&=\Phi(M)(x) \qquad \text{for all } x\in\Sigma^*\\&=\vee\{\Omega(M)[\bar{\alpha}]\otimes F(st(\alpha_l))\,|\,\bar{\alpha}\in \boldsymbol{D}^+(M),\ l=lh(\bar{\alpha}),\ \alpha_0=s_0x\}\end{aligned}$$

となる。Crisp TM $T=\langle S, \Sigma, \Gamma, \delta^*, s_0, F\rangle$ を次のように作る。$S, \Sigma, \Gamma, s_0, F$ はMのものと同じ。δ^* の定義：

$0<\delta(s, a;\ s', b, \sigma)<1$ のとき，$\delta^*(s, a;\ s', b, \sigma)=0$　とする。

$\delta(s, a;\ s', b, \sigma)=0$ または1のとき，$\delta^*(s, a;\ s', b, \sigma)=\delta(s, a;\ s', b, \sigma)$ とする。

このとき

$$A(x)=\vee\{\Omega(T)[\bar{\alpha}]\otimes F(st(\alpha_l))\,|\,\bar{\alpha}\in \boldsymbol{D}^+(T),\ l=lh(\bar{\alpha}),\ \alpha_0=s_0x\}$$

が成り立つ。 □

問題1.　$\otimes$を通常の積とする。ファジィ計算可能集合は，定理1.1で与えられる形のものに限るか？

$\otimes$が$\wedge$である場合のファジィ計算可能集合の特徴づけは後節で与えられる。

§2.　ファジィ計算不可能性

本節ではファジィ計算可能でない集合を考察する。Σ^* 上のファジィ集合全体のクラス

$$\{A\,|\,A:\ \Sigma^*\to W\}$$

は連続の濃度($2^{\aleph_0}$)を持つが，Σ上の FTM 全体の個数も同じく連続の濃度であるから，濃度計算によってはファジィ計算可能でないファジィ集合の存在を導くことはできない。しかし，かか

るものは存在する。

補題 2. 1　$R\subset[0, 1]$ を 0, 1 以外の数を含む有限部分集合とし，R の要素の $\otimes$ に関する重複を許しての有限積たち全体の集合を $K(R)$ とする。このとき，$K(R)$ の集積点はもし存在すれば，0 のみである。

証明は自明である。 $\square$

定理 2. 2　A: $\Sigma^*\rightarrow W$ のファジィ値の集合 (*i. e.* $Rng(A)$) が或正数より大きい値を無限個含むならば，A はファジィ計算可能でない。

証明　A がファジィ計算可能なら，$A(x)=\Phi(M)(x)$ なる FTM M がある。δ^M の値域を R とすれば，R は有限集合である。仮定により R は 0，1 以外の実数を含む。$Rng(A)\subseteq K(R)$ である。しかし仮定により $Rng(A)$ は 0 でない集積点を含む。これは補題 2. 1 に反する。よって A はファジィ計算可能でない。$\square$

この定理によって，例えば

$$A(x)=1-2^{|-x|}$$

なるファジィ集合 A はファジィ計算可能でない。しかしこのような関数は $\Sigma^*\rightarrow[0, 1]$ なる実数値関数として帰納的関数であるから，かかる A がファジィ計算可能となるように，この概念を改良すべきかも知れない。それはさておき，現在のところは今までの定義にしたがって議論を進めよう。

§3.　必要十分条件

本節ではファジィ集合がファジィ計算可能であるための必要十分条件について考察する。A: $\Sigma^*\rightarrow[0, 1]$ は与えられたファジィ集合とする。本節では $\otimes$ は $\wedge$ の意味とする。x, $y\in\Sigma^*$ に対し

$$x\sim_A y \Longleftrightarrow A(x)=A(y)$$

と定義すれば，$\sim_A$ は Σ^* 上の 1 つの同値関係である。

$$\Sigma^*=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n,\quad C_i\cap C_j=\phi(i\neq j)$$

を Σ^* の任意の有限分割とする。これを $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ で表す。

分割 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ が帰納的であるとは，各 C_i が帰納的集合であることと定める。したがってこのとき，各 $i=1, 2, \cdots, n$ に対し

$$x\in C_i \Longleftrightarrow T_i \text{ は } x \text{ を受理する}$$

が成り立つような crisp チューリング計算機 T_i が存在する。

今，A がファジィ計算可能であるとしよう。よってある FTM M

$$M=\langle S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, F\rangle=\langle S^{(M)}, \Sigma, \Gamma^{(M)}, \delta^{(M)}, s_0{}^{(M)}, F^{(M)}\rangle$$

が存在して，すべての $x\in\Sigma^*$ に対し，$A(x)=\Phi^{(M)}(x)$ となる。ここで

$$\mathrm{COMP}[M,\ x]=\{\Omega(\bar{\alpha})\wedge F(st(\alpha_l))\mid \bar{\alpha}\in \boldsymbol{D}^{+}\ \&\ \alpha_0=s_0x\ \&\ l=lh(\bar{\alpha})\}$$

とおけば，

$$A(x)=\Phi^{(M)}(x)=\vee\ \mathrm{COMP}[M,\ x]$$

である。COMP$[M, x]$ は，$\wedge$についての $K(Rng(\delta))$ の部分集合であるから，有限集合である。そこで $Rng(\delta)=\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}\subset[0, 1]$ とし，

$$C_r=\{x\in\Sigma^*\mid A(x)=\Phi^{(M)}(x)=r\}$$

とおけば，Σ^* の $\sim_A$ による有限分割 $\{C_1, C_2, \cdots, C_{r_n}\}$ が得られる。これを

(1)　　$\Sigma^*/A=\{C_{r_1}, C_{r_2}, \cdots, C_{r_n}\}$

で表す。

Claim 1)　分割 (1) は帰納的である。

証明　$r_1, r_2, \cdots, r_n$ がどんなに複雑な実数であっても，$\bar{\alpha}$ に関する述語として

$$r_i=\Omega(\bar{\alpha})\wedge F(st(\alpha_l)),\ l=lh(\bar{\alpha})$$

は帰納的である。何故なら，右辺の値は個々の実数 r_i 自身に依存するのではなくて，単に順序関係 $r_1<r_2<\cdots<r_n$ のみに依存して定まるものであるからである。したがって

$$x\in C_{r_i}\Longleftrightarrow A(x)=r_i\Longleftrightarrow \vee\ \mathrm{COMP}[M,\ x]=r_i$$
$$\Longleftrightarrow \exists\bar{\alpha}[\bar{\alpha}\in\boldsymbol{D}^{+}\ \&\ \alpha_0=s_0\ \&\ l=lh(\bar{\alpha})\ \&\ (r_i=\Omega(\bar{\alpha})\wedge F(st(\alpha_l)))]$$

は x に関する述語として Σ_1^0 である。また，

$$x\notin C_{r_i}\Longleftrightarrow \bigvee_{j\neq i}(\vee\ \mathrm{COMP}[M,\ x]=r_j)$$

であるから，$x\notin C_{r_i}$ もまたΣ_1^0 である。ゆえに Kleene-Post の定理により，“$x\in C_{r_i}$” は帰納的である。

今度は逆の問題を考えよう。ファジィ集合 A は，もし $Rng(A)$ が有限集合であれば，**有限的**であると言う。このとき

Claim 2)　ファジィ集合 A が有限的でかつ Σ^*/A が帰納的分割になっていれば，A はファジィ計算可能である。

証明　$Rng(A)=\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ とする。$C_i=\{x\mid A(x)=r_i\}$ とおけば，

$$\Sigma^*/A=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$$

である。仮定により各 C_i は帰納的であるから

$$x\in C_i\Longleftrightarrow T_i \text{ は } x \text{ を受理する}$$

が成り立つような crisp チューリング計算機 T_i が存在する。それをファジィチューリング計算機に作り直したものを

$$T_i=\langle S^{(i)},\ \Sigma,\ \Gamma^{(i)},\ \delta^{(i)},\ s_0^{(i)},\ F^{(i)}\rangle$$

としよう。これより，ファジィチューリング計算機

$$M=\langle S,\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta,\ s_0,\ s_F\rangle$$

を次のように構成する：$\cup\{S^{(i)}|i=1, 2, \cdots, n\}\subset S$ とし，$s_0=s_0^{(1)}$ とする。

与えられた入力 $x\in\Sigma^*$ に対し，M は x 上で $T^{(1)}$ をシミュレートする。$T^{(1)}$ が拒否すれば，M は x 上で $T^{(2)}$ をシミュレートする．．．M が x 上で $T^{(i)}$ をシミュレートすることになって $T^{(i)}$ が x を受理したならば，そのとき M は度合として r_i をとり受理状態 s_F に移って停止する。すなわち

$$\delta(s_F^{(i)}, a;\ s_F, b, +)=r_i$$

とする。その他の δ の値は状況により0か1に設定する。このようにすれば，この計算過程の度合は r_i となる：

$$\Phi^{(M)}(x)=r_i.$$

また，構成から明らかなように $A(x)=\Phi^M(x)$ が成り立っている。ゆえに A はファジィ計算可能である。 □

以上の2つの Claims から次の定理が得られる：

定理 3.1　ファジィ集合 A がファジィ計算可能であるための必要かつ十分な条件は，$Rng(A)$ が有限集合でかつ有限分割 Σ^*/A が帰納的であることである。 □

§4.　ファジィチューリング計算機の符号化

$\Sigma=\{0, 1\}$ 上の FTM

$$M=\langle S, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\rangle$$

は次のように標準化することができる：

S は $\{s_0, s_1, s_2, \cdots\}$ の有限部分集合；Γ は $\{c_0, c_1, c_2, \cdots\}$ の有限部分集合。ただし $\Gamma\supset\{c_0, c_1, c_2\}$，$c_0=0$, $c_1=1$, $c_2=\#$ とする。q_0 は或 s_i, $F\subseteq S$. また

$$\delta\colon (S\times\Gamma)\times(S\times\Gamma\times\{+, -, \cdot\})\rightarrow W.$$

このように標準化したとき，Σ 上の FTM's は $2^{\aleph_0}$ 個あることになる。よってこれらをベール零空間 N^N のメンバーでコード化することができる（このことは後述の oracle FTM's についても同様である）。コード $\xi\in N^N$ をもつ FTM を

$$T_\xi=\langle S_\xi, \Gamma_\xi, \delta_\xi, s_0^{(\xi)}, F_\xi\rangle$$

で表す。具体的なコード化の方法は付録で述べる。このとき，“$\Phi(T^{(\xi)})(x|y)>0$” は $\xi\in N^N$, $x, y\in\Sigma^*$ についての関係として Σ_0^1 である。よって

定理 4.1　ファジィ計算可能関数を定義する FTM T_ξ のコード全体の集合を FCF とすると，FCF は（N^N の部分集合として）Π_2^0 である。 □

系　4.2　“f がファジィ計算可能である” という関係は Σ_1^1 である。 □

問題2　（1） FCF は proper Π_2^0 であるか。（2）“f がファジィ計算可能である” は proper Σ_1^1 の関係であるか。

§5.　Oracle ファジィチューリング計算機

$0 \leq \theta \leq 1$ なる実数 θ を閾値とし，oracle ファジィ集合 A をもつ oracle ファジィチューリング計算機（Oracle FTM）を定義する。システム自体は A と θ に無関係に定義されるが，その動作において oracle A が関係するようになっている。

$$M=\langle S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, F\rangle$$

において，仕様は FTM と殆んど同じである。異なる点は次の3点である：

（1）　S は特別な3つの状態を含む：s_Q(質問状態)，s_Y(肯定状態)，および s_N(否定状態)。

（2）　oracle テープと呼ばれる作業テープを持ち，このテープ上には Σ 上の語が記録される。

（3）　M が状態 s_Q に入ったときの動作が A に依存して規定される。

今 A を任意のファジィ集合とする。A を oracle に持つ閾値の θ の Oracle FTM $M^{A,\theta}$ の計算は次のように定義される。入力 x に対し $M^{A,\theta}$ は s_0x で出発する。質問状態 s_Q に入ったならば，その時点で oracle テープ上に記録されている語 w に対し $A(w)$ の値を問う。

$A(w) \geq \theta$ ならば $M^{A,\theta}$ は肯定状態 s_Y へ入る。

$A(w) < \theta$ ならば $M^{A,\theta}$ は否定状態 s_N へ入る。

そしてこのステップでの移行の度合は1とする。($\otimes A(w)$ を施すのは不適切である。) この操作を除いては $M^{A,\theta}$ の動作は通常の FTM のそれと同じであるとする。このようにして $M^{A,\theta}$ の計算過程

$$\bar{\alpha}=(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_l),\ l=lh(\bar{\alpha})$$

が定義される。ここに α_i は $M^{A,\theta}$ の時点表示(ID)である。このとき

$$\Phi(M^{A,\theta})(x)=\bigvee\{\Omega[\bar{\alpha}]\times F(st(\alpha_l))\,|\,\bar{\alpha}\in D^{+}(M^{A,\theta}),\ \alpha_0=s_0x,\ l=lh(\bar{\alpha})\}$$

と定義し，$\Phi(M^{A,\theta})$ を $M^{A,\theta}$ によって定義されたファジィ集合という。ファジィ関数についても同様である。

ファジィ集合 B に対し

$$B=\Phi(M^{A,\theta})$$

となる oracle FTM M と oracle A および閾値 θ があるならば，B は A に θ-ファジィ還元可能であると言い，

$$B \leq_F^{\theta} A$$

で表す。

前節の方法で oracle FTM's を N^N のメンバーでコード化し，コード ξ を持つものを

$$T_{\xi}^{\sim,-}$$

で表す。～には oracle を，－には閾値をおく。このとき

$$B \leq_F^{\theta} A \Longleftrightarrow \exists\xi[B=\Phi(T_{\xi}^{A,\theta})]$$

となる。よってこの還元性関係は Σ_1^1 *in* θ である。

定理 5. 1　$\leq_F^\theta$ は擬順序である。すなわち，任意のファジィ集合 A, B, C と，任意の閾値 θ とに対し

（1）　$A \leq_F^\theta A$　　（2）　$A \leq_F^\theta B$ & $B \leq_F^\theta C \Longrightarrow A \leq_F^\theta C.$

証明　（1）　与えられた入力 $x \in \Sigma^*$ に対し，x を度合(重み) 1 で読む。読み終ったならば，$x \in A$ か否かを問う。

$$s_0 x \xrightarrow[\text{度合 } 1]{*} x s_Y \# \begin{cases} \xrightarrow{Y} x s_Y \# \longrightarrow \text{停止} & (Y = \text{Yes}) \\ \xrightarrow{N} x s_N \# \longrightarrow \text{停止} & (N = \text{No}) \end{cases}$$

$$\delta(s_Y, \#; s_Y, \#, \cdot) = \delta(s_N, \#; s_N, \#, \cdot) = 1, \ F(s_Y) = F(s_N) = 1$$

という oracle FTM $M^{\sim,-}$ を作る。このとき

$$\Phi(M^{A,\theta})(x) = A(x).$$

（2）　$A = \Phi(T_\xi^{B,\theta})$, $B = \Phi(T_\eta^{C,\theta})$ とする。次の部分計算を考える：

$$\langle s_0^{(B)}, x, \lambda \rangle \xrightarrow{*} (s_Q^{(B)}, x', w) \begin{cases} \xrightarrow{Y} & (s_Y^{(B)}, x', w) \rightarrow \cdots \\ & B(w) \geq \alpha\,? \\ \xrightarrow{N} & (s_N^{(B)}, x', w) \rightarrow \cdots \end{cases}$$

ここで，w は oracle テープ上の語である。$B(w) \geq \alpha$? を w で始まる $T_\eta^{C,\theta}$ の計算に切り換える。$\Phi(T_\eta^{C,\theta})(w) \geq \theta$ ならば，$s_Y^{(B)}$ へ，そうでないなら $s_N^{(B)}$ へ移る。このような計算過程を行う oracle FTM $M^{C,\theta}$ を構成すればよい。そのとき $A = \Phi(M^{C,\theta})$ となり，$A \leq_F^\theta C$ が成立する。□

この定理によって，θ-ファジィ次数の概念を定義できる。すなわち

$$A \equiv_F^\theta B \Longleftrightarrow A \leq_F^\theta B \ \& \ B \leq_F^\theta A$$

とすれば，$\equiv_F^\theta$ は同値関数である。$\equiv_F^\theta$ に関する同値類を θ-ファジィ次数と言う。

FTM は oracle FTM の特別な場合と考えられるから，A がファジィ計算可能集合ならば，すべてのファジィ集合 B について

$$A \leq_F^\theta B$$

が成立する。よって，ファジィ計算可能集合のクラスは最小の θ-ファジィ次数を与える。これを $\boldsymbol{O}$ で表す。ファジィ計算可能でないファジィ集合 B について

$$\boldsymbol{O} <_F^\theta [B]^\theta$$

となる。ここに $[B]^\theta$ は B の θ-ファジィ次数である。

θ-ファジィ還元性 $\leq_F^\theta$ に関し沢山の問題がある。例えば jump 演算子，ファジィ帰納的可算集合をどのように定義すべきか，あるいはまた $\leq_F^\theta$ は稠密性を持つか，比較不可能性はどうか……と言ったことが問題となる。これらについては今後の研究にまたなければならない。

§6.　ファジィ帰納的関数

Clares & Delgado はファジィ帰納的関数の概念を定義した

（[CD]）．しかし彼等の定義では，初期関数の中にすべての1変数ファジィ計算可能関数を含めてしまったので，ファジィ帰納的関数とファジィ計算可能関数の同等性がほとんど自明である。そしてそのような定義は古典帰納的関数論の立場から見て不自然であると考えられる。

ファジィ帰納的関数の自然な定義を与えることはなかなか困難であるように思える。初期関数として非可算個のファジィ関数を採用しなければならないことがその一因である。そこでここではファジィ理論の実際面を考慮して，ファジィ値を特別な集合

$$L_b=\left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots\right\}$$

に属するものと制限して論ずることとする。すなわち，W の代わりに構造

$$\langle L_b,\ \vee,\ \otimes,\ \leq\rangle$$

をとり，L_b-ファジィ・チューリング計算機（L_b-FTM）を考え，L_b-ファジィ集合（関数）を取扱う。

Σ^* と自然数全体 N とを1対1に対応付けておき，Σ^* のメンバーを自然数と考える：

$$\lambda<0<1<00<01<10<11<000<001<\cdots$$

よって，$x,\ y\in\Sigma^*$ に対し，$x+y$，$x-y$（ただし $x\geq y$）などが意味を持つ。

初期関数

（1）　後者関数

$$\mathscr{S}(x|y)=\begin{cases}1 & \text{if } y=x+1\\ 0 & \text{ow}(=\text{otherwise})\end{cases}$$

（2）　ファジィ後者関数

$$\mathscr{S}_F(x|y)=\begin{cases}1/2^{n-1} & \text{if } y=x+n,\ n>0\\ 0 & \text{if } y\leq x\end{cases}$$

（3）　零関数

$$C^0(x|y)=\begin{cases}1 & \text{if } y=0\\ 0 & \text{ow}\end{cases}$$

（4）　ファジィ零関数

$$C^0_F(x|y)=\frac{1}{2^n}\quad \text{if } y=n$$

（5）　射影関数

$$I^{k,i}(x_1,\ \cdots,\ x_k|y)=\begin{cases}1 & \text{if } y=x_i\\ 0 & \text{ow}\end{cases}$$

（6）　ファジィ射影関数

$$I^{k,i}_F(x_1,\ \cdots,\ x_k|y)=\frac{1}{2^m}\quad \text{if } y=|y-x_i|=m,\ \ 1\leq i\leq k$$

（7）　$\varphi(x_1,\ \cdots,\ x_k,\ y)$ が crisp 帰納的関数ならば

$$\bar{\varphi}(x_1,\ \cdots,\ x_k|y)=2^{-\varphi(x_1,\cdots,x_n,y)}$$

合成演算

（8） $g(v_1, \cdots, v_m|y)$，$h_1(x_1, \cdots, x_k|v_1)$，$\cdots$，$h_m(x_1, \cdots, x_k|v_m)$ が与えられたとき，

$$f(x_1, \cdots, x_k|y)=\bigvee_{v_1,\cdots,v_m}[g(v_1, \cdots, v_m|y)\otimes h_1(x_1, \cdots, x_k|v_1)\otimes\cdots\otimes h_m(x_1, \cdots, x_k|v_m)]$$

原始帰納法演算

（9） $g(x_1, \cdots, x_k|y)$，$h(x_1, \cdots, x_k, v, x|y)$ が与えられたとき

$$\begin{cases} f(x_1, \cdots, x_k, 0|y)=g(x_1, \cdots, x_k|y) \\ f(x_1, \cdots, x_k, x+1|y)=\bigvee_{v\in\Sigma^*}[h(x_1, \cdots, x_k, v, x|y)\otimes f(x_1, \cdots, x_k, x|v)] \end{cases}$$

最小化演算

（10） $g(x_1, \cdots, x_k, u|v)$ と u_0 が与えられたとき，

$$f(x_1, \cdots, x_k|y)=g(x_1, \cdots, x_k, y|u_0)$$

ただし，$y=\min\{u|g(x_1, \cdots, x_k, u|u_0)>0\}$ である。もし正則性条件

（11） $\forall x_1\cdots\forall x_k\exists y[g(x_1, \cdots, x_k, y|u_0)>0]$

がみたされていれば，f は§1 の意味で全域的となる。

g が crisp 関数ならば（すなわち，ファジィ値が 0 と 1 だけならば，（10）による f の定義は通常の最小化演算と一致する。

定義 6.1 初期関数（1）〜（7）から出発し，合成演算，原始帰納法演算，最小化演算を有限回施すことによって得られるファジィ関数を，**L_b-ファジィ部分帰納的関数**という。もし最小化演算を正則性条件がみたされる g のみに適用するように制限したときは，**L_b-ファジィ帰納的関数**という。

定理 6.2 L_b-ファジィ部分帰納的関数は L_b-ファジィ計算可能である。 □

これは上記の帰納的定義にしたがって，対応する L_b-FTM を順に構成することによって証明できる。逆が成立するか否かは検討中である。

§7. 付録（Coding の方法）

$\Sigma=\{0, 1\}$ とする。$c_0=0$, $c_1=1$, $c_2=\#$ を固定する。$\xi\in N^N$ を与える。S, Γ のメンバーの個数や，F などを表わすのに ξ の値 $\xi(0)$, $\xi(1)$, $\xi(2)$, $\cdots$ を利用する（そのものではないが)。簡単のため

$$\omega(0)=\xi(3),\ \omega(1)=\xi(3)+\xi(5)+1,\ \omega(2)=\xi(3)+\xi(5)+\xi(7)+2,\ \cdots$$

$$\tau(3)=\xi(4)+3,\ \tau(4)=\xi(4)+\xi(6)+4,\ \tau(5)=\xi(4)+\xi(6)+\xi(8)+5,\ \cdots$$

とおく。S_ξ, Γ_ξ を次のように定義する。

$$S_\xi=\{s_{\omega(0)}, s_{\omega(1)}, s_{\omega(2)}, \cdots, s_{\omega(\xi(0))}\}$$

$$\Gamma_\xi=\{c_0, c_1, c_2\}\cup\{c_{\tau(3)}, c_{\tau(4)}, c_{\tau(5)}, \cdots, c_{\tau(\xi(1)+2)}\}$$

このとき，$|S_\xi|=\xi(0)+1$，$|\Gamma_\xi|=\xi(1)+3$．ただし $\xi(1)=0$ のときは，$\Gamma_\xi=\{c_0, c_1, c_2\}$ とす

る。

Max$\{(2\xi(0)+3), (2\xi(1)+2)\}=m_\xi$ とおく。m_ξ は今までに使用された $\xi(i)$ の最大の引数 i である。よって

$N_\xi=\{i|i>m_\xi\}$ のメンバーは，ξ の引数として未使用のものである。

N_ξ を $(\xi(0)+1)\times(\xi(1)+3)\times(\xi(0)+1)\times(\xi(1)+3)\times3(=n_\xi$ とおく）個に分割する。これは mod n_ξ によって分類すればよい。それを

$$N_\xi=K_0\cup K_1\cup\cdots\cup K_l,\quad l=n_\xi-1$$

とする。他方，$S_\xi\times\Gamma_\xi\times S_\xi\times\Gamma_\xi\times\{+, -, \cdot\}$ のメンバーたちを一定の方法で並べて

$$\{q_0, q_1, q_2, \cdots, q_l\},\quad l=n_\xi-1 \text{ (quintuples)}$$

とする。

$K_i=\{k_0{}^i, k_1{}^i, k_2{}^i, \cdots\}$ とするとき，$\xi|K_i\in N^N$ を次のように定義する。

$$(\xi|K_i)(j)=\xi(k_j{}^i),\quad (j=0, 1, 2, \cdots)$$

このとき，

$$q_i \longmapsto \xi|K_i$$

と対応づける。N^N と $[0, 1]$ を予め effectively に1対1対応づけておけば，この対応は結局

$$\delta_\xi:\ S_\xi\times\Gamma_\xi\times S_\xi\times\Gamma_\xi\times\{+, -, \cdot\}\longrightarrow W$$

なる一つの写像 δ_ξ を定義したこととなる。

$$s_0{}^{(\xi)}=s_{\xi(3)}$$

と定める。受理状態は，

$$F_\xi:\ S_\xi\longrightarrow\{0, 1\}$$

なる写像 F_ξ を ξ に依存して一つ決めることによって与えられる。すなわち：$|S_\xi|=\xi(0)+1$ なる S_ξ のメンバーに0, 1を割り当てる方法は $2^{\xi(0)+1}$ 通りある。これらのメンバーには番号がつけられているので，それを

$$i_0<i_1<i_2<\cdots<i_{\xi(0)}$$

とする。ブール関数の定義表のように行えばよい。この並べ方の $\xi(2)$ 番のものを F_ξ のメンバーとする。ただし $\xi(2)\geq2^{\xi(0)+1}$ ならば，この並びの $2^{\xi(0)+1}-1$ 番を割り当てる。

このようにして，各 $\xi\in N^N$ に対し

$$T_\xi=\langle S_\xi, \{0, 1\}, \Gamma_\xi, \delta_\xi, s_0{}^{(\xi)}, F_\xi\rangle$$

が定められる。

参考文献

[CD] B. Clares and M. Delgado: Introduction to the concept of recursiveness of fuzzy functions, *Fuzzy Sets and Systems*, 21 (1987), 301-310.

[S1] E.S. Santos: Fuzzy algorithms, *Inform. Control*, 17 (1970), 326-339.
[S2] E.S. Santos: Fuzzy and probabilistic programs, in; M. M. Gupta, G.N. Saridis and B.R. Gaines, Eds.: Fuzzy Automata and Decision Processes (North-Holland, Amsterdam), (1977), 133-148.
[Z1] L.A. Zadeh: Fuzzy sets, *Inform. Control*, 8 (1965), 338-353.
[Z2] L.A. Zadeh: Fuzzy algorithms, *Ibid.*, 12 (1968), 94-102.