ニューラルネットワークを用いたFuzzy逆問題の近似解法及び精度の改良

HIROTA, Kaoru / IKOMA, Norikazu / 生駒, 哲一 / 廣田, 薫

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学工学部研究集報 / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
26
(開始ページ / Start Page)
137
(終了ページ / End Page)
146
(発行年 / Year)
1990-02
(URL)
https://doi.org/10.15002/00003919

ニューラルネットワークを用いたFuzzy逆問題の近似解法及び精度の改良

廣田　薫*・生駒哲一**

Approximate Solving Method of Fuzzy Relational Equation and its Precision Improvement by Using Neural Network

Kaoru HIROTA* and Norikazu IKOMA**

Abstract

Max-min fuzzy relational system can be regarded as a network of max and min operational elements. Thus the inverse problem of fuzzy relational equation is interpreted as an input value estimation problem from output values in the corresponding network. An approximate network model of fuzzy relational system is proposed. An algorithm of obtaining an approximate solution of the system is presented by using a neural network technique. Improving method of the precision of approximation is also discussed by showing several results of numerical experiments.

§1. はじめに

Fuzzy 逆問題は E. Sanchez により提案され[1]，塚本らによりその解析的な解法が提案されている[2]。またニューラルネットワークを用いたFuzzy逆問題の逐次的解法はすでに著者らにより提案されている[3]。著者らの提案した方法は，多層パーセプトロンによりFuzzy関係を近似的に実現して使用しているが，近似の際の誤差が大きいために解の精度が悪いという問題がある。

本論文においては，まず多層パーセプトロンを用いて max 及び min を近似的に実現するネットワークを構成し，その特性を調べる。次に，それらの max 及び min ネットワークを組み合わせて Fuzzy 関係を近似するネットワークを構成する。そして最後に，そのネットワークを用いた Fuzzy 逆問題の解法を提案し，その有用性について検討する。

§2. ニューラルネットワークを用いたFuzzy逆問題の解法

ニューラルネットワークを用いたFuzzy逆問題の解法の概要について説明する[3]。この手法は

* 工学部電気工学科計測制御専攻
** 大学院工学研究科システム工学専攻

以下の三つの手順に分けることができる。

① Fuzzy 関係として実現したい対象の，入出力のデータを用意する。

② ①を用いて多層パーセプトロンにより Fuzzy 関係を近似する。

③ ②を用いて，Fuzzy 逆問題の解を得る。

以下において，Fuzzy 関係及び Fuzzy 逆問題，ニューラルネットワーク，そしてニューラルネットワークを用いた Fuzzy 逆問題の解法について説明する。

2.1 Fuzzy 逆問題

集合XからYへの Fuzzy 関係Rは，直積 $X\times Y=\{(x, y)|\, x\in X,\ y\in Y\}$ における Fuzzy 集合である[2]。Rはメンバーシップ関数 μ_R: $X\times Y\to[0, 1]$ により特性づけられる。AをXにおける Fuzzy 集合，BをYにおける Fuzzy 集合とし，それぞれのメンバーシップ関数を μ_A, μ_B とする。このとき，Fuzzy 関係式は式(2—1) で表わされ，具体的には式(2—2) の演算を意味する。

$$B=R\circ A \tag{2—1}$$

$$\mu_B(y)=\bigvee_{x\in X}\{\mu_R(x, y)\wedge\mu_A(x)\} \tag{2—2}$$

ただし，$\vee$と$\wedge$はそれぞれ max と min を表わす。

A, B をそれぞれ Fuzzy 入力及び出力，Rを Fuzzy システムとみなすと式(2—1) は Fig. 1 のような Fuzzy 入出力を持つシステムを表しているものと考えられる。

Fuzzy 逆問題とは Fuzzy 関係式の逆問題のことで，式(2—1) においてBとRを与えてAを求める問題である[2]。

Fig. 1　Fuzzy システムとしてみた Fuzzy 関係

2.2 ニューラルネットワーク

今回用いたニューラルネットワークは，パーセプトロンと呼ばれる階層的結合ネットワークである。以下このパーセプトロンについて説明する[4]。

2.2.1 パーセプトロンの構成

パーセプトロンを構成する基本的情報処理演算要素であるユニットは，Fig. 2 のような多入力1出力の演算要素である。入力 $i_1\sim i_n$ にはそれぞれ結合係数 $w_1\sim w_n$ が付加される。出力値uはこれら及びしきい値θとから，式(2—3)～(2—5)により与えられる。

$$u=f(s) \tag{2—3}$$

$$s=\sum_{j=1}^{n} w_j\cdot i_j-\theta \tag{2—4}$$

式(2—3) における $f(s)$ は入出力関数と呼ばれ，式(2—5) などが代表的である。

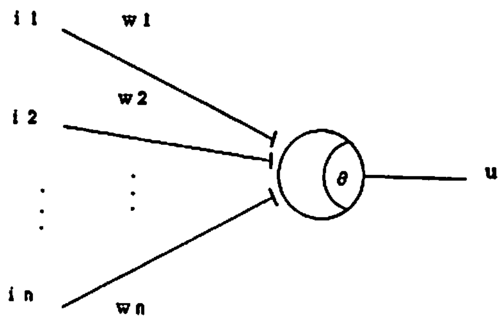

Fig. 2　ニューラルネットワークの構成ユニット

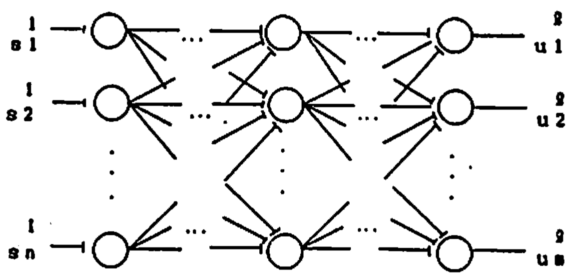

Fig. 3　階層的結合ネットワークの概略

$$f(s)=\frac{1}{1+\exp(-s)} \qquad (2\text{—}5)$$

パーセプトロンにおけるユニットの結合の形態は階層的である。階層的結合ネットワークはFig. 3のような形態である。その特徴を以下に示す。

① 層状にユニットが結合されている（入力層を第1層とする）。

② 層内のユニット間に結合はない。

③ 隣接する層間のすべてのユニットの間に結合がある。

④ 隣接する層間の結合は一方向（k層から（$k+1$）層へ）である。

階層的結合のネットワークにおいて，情報は入力側から出力側へと1方向に伝達される。

このような形態のネットワークを式で記述するために，ユニット，しきい値，及び重み係数を次のように表す。

① 第i層，第j番目のユニット（及びそれに関する値）を

$$u_j^i$$

と表記する。

② 第i層，第j番目のユニットに対するしきい値を

$$\theta_j^i \quad (\in R)$$

と表記する。

③ 第i層，第j番目のユニットから，第$i+1$層，第k番目のユニットに対する結合の重み係数を

$$w_{j^i k^{i+1}} \quad (\in R)$$

と表記する。

以上の表記により，多層パーセプトロン全体を式で表すと以下のようになる。

$$u_k^{i+1}=f(s_k^{i+1}) \tag{2—6}$$

$$f(s_k^{i+1})=\frac{1}{1+\exp(-s_k^{i+1})} \tag{2—7}$$

$$s_k^{i+1}=\sum_j w_{j^i k^{i+1}}\cdot u_j^i-\theta_k^{i+1} \tag{2—8}$$

このときのネットワーク外部からの入力は s_k^1（k 任意の入力端子番号）であり，ネットワークから外部への出力は u_j^l（j 任意の出力端子番号，l はネットワークの最終層の番号）となる。

2.2.2　誤差逆伝播アルゴリズム

ニューラルネットワークに所望の動作をさせるには，各ユニットの結合係数 w_j 及びしきい値 θ を調整することが必要である。誤差逆伝播アルゴリズム(Error Back Propagation) によれば，ネットワークに対する入力とそのときの期待出力との組を多数与えることで，w_j 及び θ の値を自動的に調整することが可能である[5]。このパラメータ自動調整をニューラルネットワークの学習と呼んでいる。

2.3　ニューラルネットワークを用いたFuzzy逆問題の解法

ニューラルネットワークを用いたFuzzy逆問題の解法の概要は，以下のとおりである。

(1)　多層パーセプトロンにFuzzy関係を学習させる。

(2)　解くべきFuzzy集合 B に対して，パーセプトロンの入力値推定アルゴリズムにより，多層パーセプトロンの入力の推定値を求める。

(3)(2)で求められた入力の推定値をFuzzy逆問題の解とする。

2.3.1　多層パーセプトロンの入力推定アルゴリズム

本アルゴリズムは，n 入力 m 出力 l 層パーセプトロンにおける第 l 層の各ユニットの出力値が既知であるときに，第1層の各ユニットへの入力値を推定するものである。以下に，その詳細を示す。

(準備)

(1)　第 l 層の各ユニットの出力値（既知）を $y_1\sim y_m$ とする。

(2)　評価関数 $E(s)$ を以下のように定義する。

ただし，$s=[s_1^1, s_2^1, \cdots, s_n^1]$ とする。

$$E(s)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}[y_j-u_j^l(s)]^2 \tag{2—9}$$

(アルゴリズム)

(1)　s_i^1 より u_j^l を計算する（$i=1\sim n$, $j=1\sim m$）。

（2） s_i^1 の値を

$$
-\varepsilon\frac{\partial E}{\partial s_i{}^1}
$$

$$
=-\varepsilon\sum_{\cdot=1}^{m}\frac{\partial E}{\partial u_{\cdot}^{l}}\frac{\partial u_{\cdot}^{l}}{\partial s_{\cdot}^{l}}\sum_{\cdot\cdot}\frac{\partial s_{\cdot}^{l}}{\partial u_{\cdot\cdot}^{l-1}}\frac{\partial u_{\cdot\cdot}^{l-1}}{\partial s_{\cdot\cdot}^{l-1}}\cdots\quad\cdots\sum_{\cdots\cdot=1}^{n}\frac{\partial s_{\cdot\cdot\cdot}^{2}}{\partial u_{\cdots}^{1}}\frac{\partial u_{\cdots}^{1}}{\partial s_{\cdots}^{1}} \tag{2—10}
$$

だけ変化させる。ここで，εは適当な値の正定数である。

（3） $E(s)$ の値を計算する。

（4） $E(s)$ の値が十分小さくなるまで（1)～(3）を繰り返す。

（5） 最終的に得られた s_i^1 の値が，第1層の各ユニットへの入力の推定値である。

§3. 多層パーセプトロンを用いた max, min ネットワークの構成

多層パーセプトロンはニューラルネットワークの中でも学習性に優れたものである。その学習性を利用して max, min 演算を近似的に実現するネットワークの構成方法について述べる。

3.1 max 及び min ネットワークの構成

① 多層パーセプトロンの学習用データを次のように用意する。

l 層パーセプトロンにおいて，希望出力値 $u^*{}_i^l$ が次式を満たす。

$$
u^*{}_i^l=\begin{cases}1 & \text{if } s_i{}^l=\bigvee_i s_i{}^l\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{3—1}
$$

（max ネットワークの場合。min ネットワークの場合には∨を∧に替える）

この学習データの例を，Table 1 (max ネットワーク用)，Table 2 (min ネットワーク用）に示す。

② ①の学習データについて多層パーセプトロンに学習をさせる。学習には誤差逆伝播アルゴリズムを用いる。

Table 2 min-ネットワークに用いるパーセプトロンに対する学習データ

入力値				出力希望値			
s1	s2	…	sn	u1	u2	…	un
0.1	0.2	…	0.5	0.0	0.0	…	1.0
0.3	0.3	…	0.1	1.0	1.0	…	0.0
0.4	0.6	…	0.4	0.0	1.0	…	0.0

Table 1 max-ネットワークに用いるパーセプトロンに対する学習データ

入力値				出力希望値			
s1	s2	…	sn	u1	u2	…	un
0.1	0.2	…	0.5	1.0	0.0	…	0.0
0.3	0.3	…	0.1	0.0	0.0	…	1.0
0.4	0.6	…	0.4	1.0	0.0	…	1.0

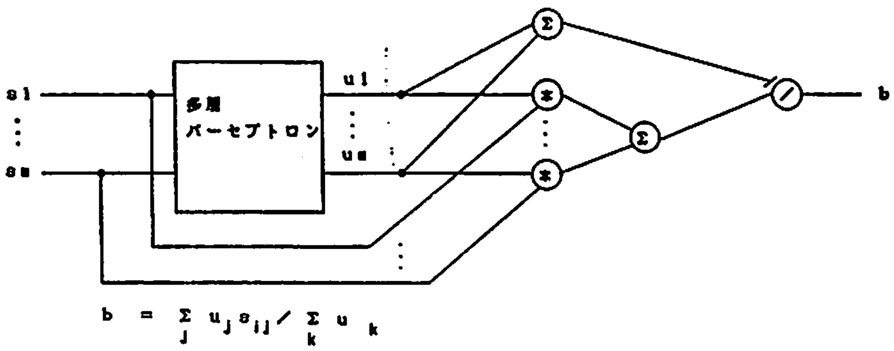

Fig. 4　max-ネットワークの概略

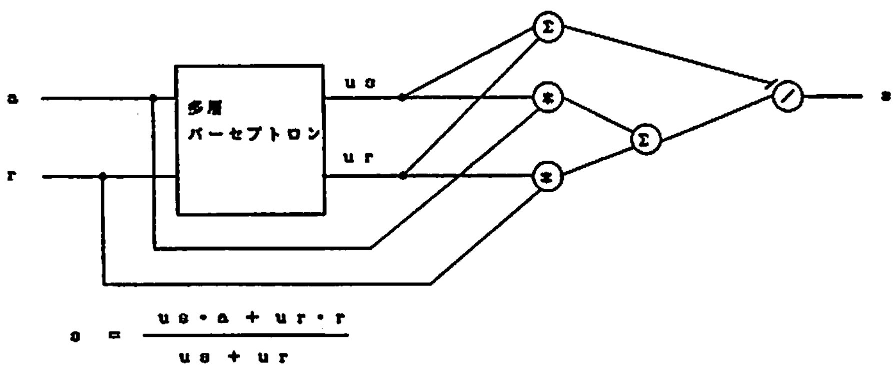

Fig. 5　min-ネットワークの概略

③　学習済みのパーセプトロンを次のように用いる。

$$b_j=\frac{\sum_i u_i{}^l\cdot s_i{}^1}{\sum_i u_i} \tag{3—2}$$

このときの b_j が，max 及び min ネットワークの出力であり，入力は si^1 である。

Fig. 4 , Fig. 5 に max ネットワーク及び min ネットワークの概略を示す。

3.2　max 及び min ネットワークの特性評価

前述した方法により構成された max 及び min ネットワークの特性について評価を行う。評価の方法は以下の通りである。

[評価方法]

①　ランダムな入力データを 1,000 個用意する。

②　max, min ネットワークそれぞれについて，①のデータに対する出力データを計算する。

③　②で得られた出力データと，①のデータに対する max, min 演算の結果との誤差を計算する。

上記の評価により得られた 5 入力 max ネットワーク，2 入力 min ネットワークに対する誤差の分布を，Fig. 6 , Fig. 7 にそれぞれ示す。

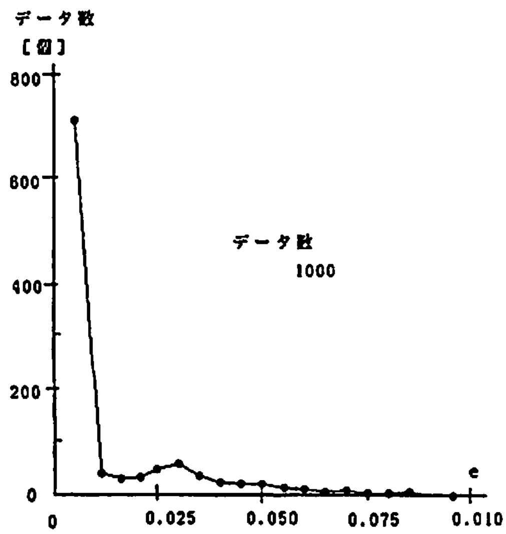

Fig. 6　max-ネットワークの誤差の分布

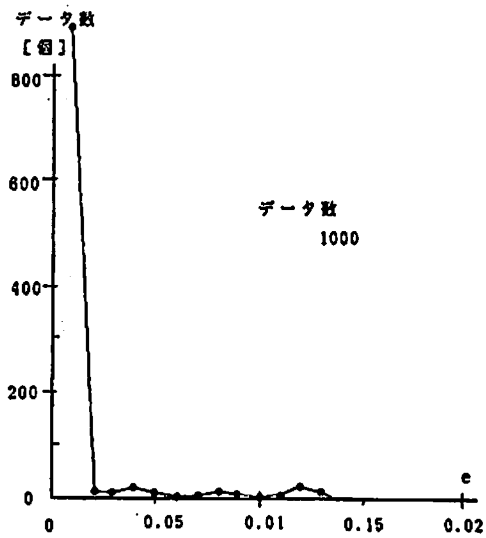

Fig. 7　min-ネットワークの誤差の分布

§4.　max, min ネットワークを用いた Fuzzy 関係ネットワークの構成

3 で述べた max 及び min ネットワークを用いることで，Fuzzy 関係を近似的に実現するネットワークは簡単に構成できる。Fuzzy 関係を近似するネットワークを Fuzzy 関係ネットワークと呼ぶことにする。Fuzzy関係ネットワークを n 入力 m 出力であるとすると，次式により表される。

$$b_i=\frac{\sum_{j=1}^{n} u_j \cdot s_{ji}}{\sum_{j=1}^{n} u_j},\quad (1 \leqq i \leqq m) \tag{4—1}$$

$$s_{ji}=\frac{u_{sj} \cdot a_j + u_{rj} \cdot r_{ji}}{u_{sj}+u_{rj}} \tag{4—2}$$

(4—1)式は n 入力 max のネットワークを表している。(4—2)式は 2 入力の min ネットワークを表しており，その出力信号は(4—1)の max ネットワークの入力へ伝達される。(4—2) のネットワークへの入力信号は，Fuzzy 関係の入力 Fuzzy 集合のメンバシップ値とその Fuzzy 関係のメンバシップ値である。

Fig. 8 に Fuzzy 関係ネットワークの概略を示す。

4.2　Fuzzy 関係ネットワークの特性評価

(4—1), (4—2) で構成される Fuzzy 関係ネットワークの特性について評価を行う。評価方法は以下のとおりである。

[評価方法]

①　ランダムな入力データを 1,000 個用意する。

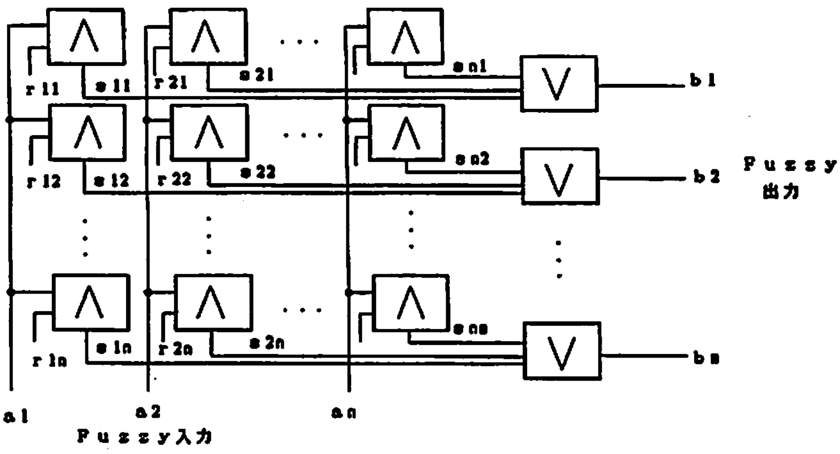

Fig. 8　Fuzzy 関係ネットワークの概略

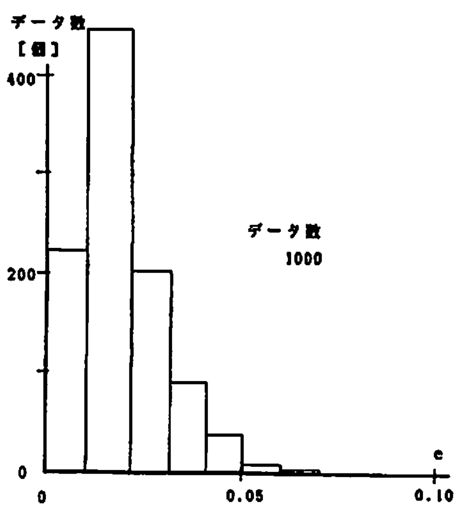

Fig. 9　Fuzzy 関係ネットワークの誤差の分布

② Fuzzy関係ネットワークについて，①のデータに対する出力データを計算する。

③ ②で得られた出力データと，①のデータに対する Fuzyy 関係演算の結果との誤差を計算する。

上記の評価により得られた5入力5出力Fuzzy関係ネットワークに対する誤差の分布をFig. 9に示す。

§6.　Fuzzy 関係ネットワークを用いた Fuzzy 逆問題の解法

Fuzzy 関係ネットワークを用いた Fuzzy 逆問題の解法は以下の通りである。

① Fuzzy 関係ネットワークの入力 Fuzzy 集合 $A=[a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]$ を任意に決める。

② Fuzzy 逆問題として解くべき Fuzzy 集合を $B^*=[b_1{}^*, b_2{}^*, b_3{}^*, \cdots, b_m{}^*]$ とする。

③ 評価関数として (5—1) を用いる。

$$E=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(b_i-b_i^*)^2 \tag{5—1}$$

④ Fuzzy 関係ネットワークの入力値を，(5—2) に従って変化させる。

$$\frac{da_j}{d_t}=-\frac{\partial E}{\partial a_j} \tag{5—2}$$

(5—2) の右辺は，(5—3)〜(5—6) から成る。

$$\frac{\partial E}{\partial a_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial E}{\partial b_i}\cdot\frac{\partial b_i}{\partial s_{ji}}\cdot\frac{\partial s_{ji}}{\partial a_j} \tag{5—3}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_i}=b_i-b_i^* \tag{5—4}$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial s_{ji}}=\frac{1}{\sum_k u_k}\left(\left(s_{ij}-\frac{\sum_k u_k\cdot s_{ki}}{\sum_k u_k}\right)\frac{\partial u_k}{\partial s_{ji}}+u_i\right) \tag{5—5}$$

$$\frac{\partial s_{ji}}{\partial a_j}=\frac{1}{u_{rj}+u_{sj}}\left(\left(a_j-\frac{u_{sj}\cdot a_j+u_{rj}\cdot r_{ji}}{u_{rj}+u_{sj}}\right)\frac{\partial s_{ji}}{\partial a_j}+s_{ji}\right) \tag{5—6}$$

⑤ 評価関数 (5—1) の値が十分小さくなるまで④を繰り返す。

§6. 数　値　例

Fuzzy 数値例関係ネットワークを用いた Fuzzy 逆問題の解について，数値例をいくつか示す。

（例）

Fuzzy 関係としてつぎのものを用いる。

$$R=\begin{bmatrix}\mu_R(x1,\ y1) & \mu_R(x2,\ y1)\cdots\mu_R(x5,\ y1)\\ \mu_R(x1,\ y2) & \mu_R(x2,\ y2)\cdots\mu_R(x5,\ y2)\\ \mu_R(x1,\ y3) & \mu_R(x2,\ y3)\cdots\mu_R(x5,\ y3)\\ \mu_R(x1,\ y4) & \mu_R(x2,\ y4)\cdots\mu_R(x5,\ y4)\\ \mu_R(x1,\ y5) & \mu_R(x2,\ y5)\cdots\mu_R(x5,\ y5)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.6 & 0.5 & 0.8 & 0.3 & 0.2\\ 0.4 & 0.1 & 0.9 & 0.6 & 0.4\\ 0.1 & 0.1 & 0.9 & 0.8 & 0.5\\ 0.9 & 0.2 & 0.9 & 0.1 & 0.5\\ 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.8 & 0.9\end{bmatrix} \tag{6—1}$$

逆問題として解くべき Fuzzy 集合 B^* は，つぎのものを用いる。

$B_1^*=[0.5\quad 0.4\quad 0.5\quad 0.5\quad 0.7]$

$B_2^*=[0.6\quad 0.5\quad 0.5\quad 0.9\quad 0.5]$

$B_3^*=[0.3\quad 0.4\quad 0.5\quad 0.5\quad 0.8]$

$B_4^*=[0.4 \quad 0.4 \quad 0.4 \quad 0.4 \quad 0.4]$

$B_5^*=[0.7 \quad 0.7 \quad 0.7 \quad 0.7 \quad 0.4]$

ただし，これらはすべて解を持つ Fuzzy 集合である。

解として求められた Fuzzy 集合Aは，以下のとおりである。

$A_1=[0.502500 \quad 0.509037 \quad 0.237663 \quad 0.477503 \quad 0.711724]$

$A_2=[0.900000 \quad 0.590000 \quad 0.421063 \quad 0.549868 \quad 0.454929]$

$A_3=[0.315244 \quad 0.338806 \quad 0.255846 \quad 0.470328 \quad 0.798615]$

$A_4=[0.406658 \quad 0.413564 \quad 0.409418 \quad 0.406671 \quad 0.403134]$

$A_5=[0.691894 \quad 0.371195 \quad 0.707585 \quad 0.329383 \quad 0.463119]$

Aを用いて Fuzzy 関係の演算を行い，求められた Fuzzy 集合Bは，以下のようになった。

$B_1=[0.502250 \quad 0.477503 \quad 0.500000 \quad 0.502250 \quad 0.711724]$

$B_2=[0.600000 \quad 0.549868 \quad 0.549868 \quad 0.900000 \quad 0.549868]$

$B_3=[0.338806 \quad 0.470328 \quad 0.500000 \quad 0.500000 \quad 0.798615]$

$B_4=[0.413564 \quad 0.409418 \quad 0.409418 \quad 0.409418 \quad 0.413564]$

$B_5=[0.707585 \quad 0.707585 \quad 0.707585 \quad 0.707585 \quad 0.463119]$

評価関数 (5—1) の値はそれぞれ以下のようになる。

$E_1=0.003077$

$E_2=0.003730$

$E_3=0.003227$

$E_4=0.000317$

$E_5=0.002107$

§7. ま と め

多層パーセプトロンを用いた max, min ネットワークの近似的構成方法を提案し，それらの特性について調べた。またそれらを組み合わせた Fuzzy 関係ネットワークを提案し，その特性について調べた。そして，Fuzzy 関係ネットワークによる Fuzzy 逆問題の解法を提案した。

参 考 文 献

1) E. Sanchez: Resolution of Composite Fuzzy Relation Equations, *Information and Control*, **30**(1), pp.38-48 (1976).

2) 塚本，田代: Fuzzy 逆問題の解法. 計測自動制御学会論文集，第**15**巻，第1号，pp.21-25 (1977).

3) 廣田，生駒: ニューラルネットワークを用いた Fuzzy 逆問題の解法. 第15回システムシンポジウム，第10回知識工学シンポジウム合同シンポジウム，講演論文集(計測自動制御学会), pp.257-260 (1989).

4) Rosenblatt, F.: The perceptron: A probabilistic model for information sorage and organization in the brain. *Psychol. Rev.* **65**(6), pp.386-408 (1958).

5) Rumelhart et al.: Learning Representations by Back-propagating errors, *Nature*, 323-9, pp.533-536 (1986).