非線形な観測方程式を持つカルマン・フィルタとニュートン・ラプソン法

NISHIYA, Takanobu / 西谷, 隆亘

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
26
(開始ページ / Start Page)
161
(終了ページ / End Page)
170
(発行年 / Year)
1990-02
(URL)
https://doi.org/10.15002/00003916

非線形な観測方程式をもつカルマン・フィルタとニュートン・ラプソン法

西 谷 隆 亘*

Kalman Filter with Non-linear Measurement Equations and Newton-Raphson Method

Takanobu NISHIYA*

Abstract

For the following non-linear discrete-time dynamic system:

$$\begin{cases} x(j+1)=\Phi(j+1;j)x(j)+\Theta(j+1;j)u(j)+v(j) \\ y(j)=f(x(j))+w(j), \end{cases}$$

non-linear discrete-time Kalman filter is also derived on the principle of minimum quadratic loss in the same process as that of linear discrete-time Kalman filter.

Kalman filter equations are:

$$\begin{cases} \Delta(k)=\{P(k|k-1)J_k'+Z(k|k-1)\}[J_kP(k|k-1)J_k'+R(k)]^{-1} \\ \hat{x}^0(k|k)=\hat{x}^0(k|k-1)+\Delta(k)\{y(k)-f(\hat{x}^0(k|k-1))\} \\ \hat{x}^0(k+1|k)=\Phi(k+1;k)\hat{x}^0(k|k)+\Theta(k+1;k)\bar{u}(k) \\ P(k|k)=P(k|k-1)-\Delta(k)\{J_kP(k|k-1)+Z'(k|k-1)\} \\ \qquad\quad =\{I-\Delta(k)J_k\}P(k|k-1)-\Delta(k)Z'(k|k-1) \\ P(k+1|k)=\Phi(k+1;k)P(k|k)\Phi'(k+1;k)+\Theta(k+1;k)S(k)\Theta'(k+1;k)+Q(k) \end{cases}$$

where I is unit matrix, J_k is Jacobian (functional determinant), J_k' is transposed matrix and, covariance matrices are:

$$Q(k)=E[v(k)v'(k)],$$

$$W(k)=E[w(k)w'(k)],\quad S(k)=E[\tilde{u}(k)\tilde{u}'(k)]$$

$$R(k)=J_kZ(k|k-1)+\{J_kZ(k|k-1)\}'+E[r(k|k-1)r'(k|k-1)]+W(k),$$

$$Z(k|k-1)=E[\tilde{x}(k|k-1)r'(k|k-1)],\quad \tilde{x}(k|k-1)=x(k)-\hat{x}^0(k|k-1),$$

$r(k|k-1)$ is the residual of the first order Taylor approximation *i.e.*

$$f(x(k))=f(\hat{x}^0(k|k-1))+J_k\tilde{x}(k|k-1)+r(k|k-1).$$

The algorithm of Kalman Filtering involves that of Newton-Raphson method, and the latter is the special case of the former.

For the time-invariant case, it is shown that the filter is applicable to solve the non-linear simultaneous equations $f(x)=0$.

* 土木工学科

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta}(k)=\{\boldsymbol{P}(k|k-1)\boldsymbol{J}_k'+\boldsymbol{Z}(k|k-1)\}[\boldsymbol{J}_k\boldsymbol{P}(k|k-1)\boldsymbol{J}_k'+\boldsymbol{R}(k)]^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{x}}^0(k+1|k)=\hat{\boldsymbol{x}}^0(k|k-1)-\boldsymbol{\Delta}(k)\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}^0(k|k-1)) \\ \boldsymbol{P}(k+1|k)=\{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Delta}(k)\boldsymbol{J}_k\}\boldsymbol{P}(k|k-1)-\boldsymbol{\Delta}(k)\boldsymbol{Z}'(k|k-1)+\boldsymbol{Q}(k). \end{cases}$$

And its algorithm is something like "damped" Newton-Raphson scheme. But it has much more flexibility than Newton-Raphson method.

梗　　概

本論は観測方程式が非線形な関数で表現される時間離散型の動的システムのカルマン・フィルタを最小自乗法により誘導できることを示したものである。また，非線形方程式の解法は定常なカルマン・フィルタの問題に定式化できることが述べられ，解のアルゴリズムが示されている。そして，非線形カルマン・フィルタのアルゴリズムは Newton-Raphson 法のアルゴリズムを包含していて，後者は前者の特別な場合であることが分かる。Newton-Raphson 法が関数のヤコビアンが零の場合には計算不能となるのに対し，非線形カルマン・フィルタではそれを避けることができる。

§1.　緒　　論

1960年に R.E. Kalman により提案された線形フィルタ理論[1]は非線形のものに拡張されて論じられている[2]。応用範囲を広めるには計算に直結する代数的手段を通じての理解が大切であろう。

著者は先に最小自乗の原理によって代数的に線形カルマン・フィルタの誘導を試みたのであるが[3]，観測方程式が非線形な関数で与えられている動的システムに対するカルマン・フィルタも前と同様な方法で誘導できる。

非線形関数の増分は最小自乗法による推定[4]やフィルタ理論[2]では Taylor 級数に展開して，擬似線形として取り扱われる。本論でも関数の誤差の近似にこの考え方を用いている。

一方，方程式を解くことはシステム制御の観点から見ると，出力を常に0に制御する時の状態変数の推定に対応する。逐次計算法である Newton-Raphson 法は定常な動的システムを構成していると解釈できるので，それと制御フィルタ理論のアルゴリズムとの比較により非線形カルマン・フィルタは非線形方程式の解法の拡張にもなっていることがわかろう。

フィルタ理論と Newton-Raphson 法の関連についてはすでに論じているが[5]，本論文はその一般化を試みたものである。

＜記号の説明＞

英大文字は確率変数，英小文字でその実現値（観測値）を表し，小文字の太字はベクトル（例えば $\boldsymbol{x}$），大文字の太字はマトリクス（例えば $\boldsymbol{X}$）を表すことを原則とする。ただし，確率変数

のベクトルは英大文字の太字で表されることもある。

ベクトルとマトリクスの転置は ′ によって表す。

$E[\ ]$……平均値の作用素
$-$　……平均値
を表す（例えば$E[\boldsymbol{x}]=\bar{\boldsymbol{x}}$）。

$\wedge$　……推定値
$\wedge^0$　……最適推定値
$\sim$　……誤差
を表す（例えば，$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}^0$ はある $\boldsymbol{x}$ とその最適推定値 $\hat{\boldsymbol{x}}^0$ との差）。

<u>最小自乗の原理</u>

実現値を $\boldsymbol{x}$，推定値を $\hat{\boldsymbol{x}}$ とすると，制約条件

$$E[(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}})'] \rightarrow \text{minimum} \tag{1—1}$$

を充足する最適推定値 $\hat{\boldsymbol{x}}^0$ は

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\{E[(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}})']\}=0 \text{ により} \tag{1—2}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}^0=E[\boldsymbol{x}] \tag{1—2}$$

となる[6]。

§2.　最小自乗法による非線形カルマン・フィルタの誘導

2.1　Kalman の推定問題

観測方程式が非線形である時間離散型の次のような非線形動的システムを考える。

状態方程式

$$\boldsymbol{x}(j+1)=\boldsymbol{\Phi}(j+1;j)\boldsymbol{x}(j)+\boldsymbol{\Theta}(j+1;j)\boldsymbol{u}(j)+\boldsymbol{v}(j) \tag{2—1}$$

観測方程式

$$\boldsymbol{y}(j)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(j))+\boldsymbol{w}(j) \tag{2—2}$$

ここに　$\boldsymbol{x}(j)$；ステップの時の状態量を表すベクトル（$p\times1$）
（観測不能であってもかまわない）。

$\boldsymbol{y}(j)$；ステップ j の時の観測量を表すベクトル（$q\times1$）

$\boldsymbol{u}(j)$；ステップ j の時の入力または制御量を表すベクトル（$r\times1$）

$\boldsymbol{\Phi}(j+1;j)$；ステップ j の状態量をステップ（$j+1$）のものへ遷移させるマトリクス（$p\times p$）（遷移行列）

$\boldsymbol{\Theta}(j+1;j)$；ステップ j の入力をステップ（$j+1$）での状態量へ寄与させるマトリクス（$p\times r$）（駆動行列）

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(j))$；状態量を観測量へ変換する関数ベクトル（$q\times1$）

$\boldsymbol{v}(j)$, $\boldsymbol{w}(j)$；各々（$p\times1$），（$q\times1$）の次元を持つ誤差ベクトル。

一般に，誤差は分散を持つが，期待値はゼロで，相互に独立であるから

$$E[\boldsymbol{v}(j)]=0;\ E[\boldsymbol{w}(j)]=0 \tag{2—3}$$

$$E[\boldsymbol{v}(j)\boldsymbol{w}'(j)]=0 \tag{2—4}$$

が成り立つ。また，分散は次のように表す。

$$E[\boldsymbol{v}(j)\boldsymbol{v}'(j)]=\boldsymbol{Q}(j);\ E[\boldsymbol{w}(j)\boldsymbol{w}'(j)]=\boldsymbol{W}(j) \tag{2—5}$$

遷移行列 $\boldsymbol{\Phi}(j+1;j)$，駆動行列 $\boldsymbol{\Theta}(j+1;j)$ と関数ベクトル $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(j))$ の関数型は既知であるものとする。

$\boldsymbol{y}(j)$ の最適推定値 $\hat{\boldsymbol{y}}^0(j)$ は最小自乗の原理により(2—2)式より

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{y}}^0(j)&=E[\boldsymbol{y}(j)]=E[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(j))]+E[\boldsymbol{w}(j)]\\&=E[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(j))]=\boldsymbol{f}(E[\boldsymbol{x}(j)])=\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}^0(j))\end{aligned} \tag{2—6}$$

であり，$\hat{\boldsymbol{y}}^0(j)$ を計算するには $\hat{\boldsymbol{x}}^0(j)$ が必要となる。(2—1) 式により

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}^0(j+1)&=E[\boldsymbol{x}(j+1)]=\boldsymbol{\Phi}(j+1;j)E[\boldsymbol{x}(j)]+\boldsymbol{\Theta}(j+1;j)E[\boldsymbol{u}(j)]+E[\boldsymbol{v}(j)]\\&=\boldsymbol{\Phi}(j+1;j)\hat{\boldsymbol{x}}^0(j)+\boldsymbol{\Theta}(j+1;j)\bar{\boldsymbol{u}}(j)\end{aligned} \tag{2—7}$$

であるから，逐次的に求めることができる。

以上のことから，この場合も次のような Kalman の推定問題[5,6]：

『動的システムが与えられた場合，観測値 $\{\boldsymbol{y}(j);\ j=0, 1, 2, \cdots, k\}$ が得られたとき，状態ベクトル $\boldsymbol{x}(j)$ の最小自乗法の意味での最適推定値 $\hat{\boldsymbol{x}}^0(j)$ を求めること』

に属することが分かる。

2.2 Kalman の推定問題の解（カルマン・フィルタの誘導）

$\hat{\boldsymbol{x}}^0(j)$ を求めるには，観測値の蓄積とともに推定の精度は向上するものとし，Kalman による次の式が成立するものとする。

<u>Kalman の仮定</u>

$$\hat{\boldsymbol{x}}^0(j|k)=\hat{\boldsymbol{x}}^0(j|k-1)+\boldsymbol{\Delta}(j)\tilde{\boldsymbol{y}}(k|k-1) \tag{2—8}$$

ここに，　$\tilde{\boldsymbol{y}}(k|k-1)=\boldsymbol{y}(k)-\hat{\boldsymbol{y}}^0(k|k-1)$　(2—9)

$\hat{\boldsymbol{x}}^0(j|k)$ は k ステップまでの観測値が既知の場合の $\boldsymbol{x}(j)$ の最適推定値を表す。

$\hat{\boldsymbol{x}}^0(j|k-1)$, $\hat{\boldsymbol{y}}^0(k|k-1)$ は $k-1$ ステップまでの観測値が既知の場合の各々，$\boldsymbol{x}(j)$, $\boldsymbol{y}(k)$の最適推定値を表す。

$\boldsymbol{\Delta}(j)$ は比例係数のマトリクス ($p\times q$)。(Kalman gain)

(2—8)式を仮定すると，(2—6)式より

$$\hat{\boldsymbol{y}}^0(k|k-1)=\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}^0(k|k-1)) \tag{2—10}$$

であるから，(2—9)式は

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(k|k-1)=\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}^0(k|k-1)) \tag*{(2—9)$'$}$$

となる。従って，(2—8)式は

$$\hat{x}^0(j|k)=\hat{x}^0(j|k-1)+\Delta(j)\{y(k)-f(\hat{x}^0(k|k-1))\} \qquad (2\text{—}8)'$$

となり，一方，(2—7)式より

$$\hat{x}^0(j+1|k)=\Phi(j+1;j)\hat{x}^0(j|k)+\Theta(j+1;j)\bar{u}(j) \qquad (2\text{—}11)$$

であるから，(2—8)′式と (2—11) 式によりサイクリックな逐次計算が可能となる。この時，逐次計算において新たに得られる実際のデータは1ステップ毎のものであるから，計算の便宜上からは $j=k$ のとき，最も有効に働くことになる。すなわち，係数マトリクス $\Delta(k)$ が既知であれば，

$$\hat{x}^0(k|k)=\hat{x}^0(k|k-1)+\Delta(k)\{y(k)-f(\hat{x}^0(k|k-1))\} \qquad (2\text{—}12)$$

$$\hat{x}^0(k+1|k)=\Phi(k+1;k)\hat{x}^0(k|k)+\Theta(k+1;k)\bar{u}(k) \qquad (2\text{—}13)$$

により逐次計算ができる。$\Delta(k)$ は以下に示されるように，最小自乗法の意味で $\hat{x}^0(k|k)$ を推定するように決定される。

なお，(2—8)式は形式的に，$j>k$ の場合は予測問題，$j=k$ の場合はフィルタ問題，$j<k$ の場合は平滑問題に対応する。

以下は $j=k$ の場合について，議論を展開する。

<u>$\Delta(k)$ の決定</u>

$x(k)$ の推定誤差 $\tilde{x}(k|k)$ を

$$\tilde{x}(k|k)=x(k)-\hat{x}^0(k|k) \qquad (2\text{—}14)$$

と表現すると，最適推定値 $\hat{x}^0(k|k)$ は推定誤差の自乗の期待値

$$P(k|k)=E[\tilde{x}(k|k)\tilde{x}'(k|k)] \qquad (2\text{—}15)$$

を最小にするように，最小自乗法の意味で推定される。そのとき，(2—14)式は(2—8)式により

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k|k)&=x(k)-\{\hat{x}^0(k|k-1)+\Delta(k)\tilde{y}(k|k-1)\}\\&=x(k)-\hat{x}^0(k|k-1)-\Delta(k)\tilde{y}(k|k-1)\\&=\tilde{x}(k|k-1)-\Delta(k)\tilde{y}(k|k-1)\end{aligned} \qquad (2\text{—}14)'$$

であるから，$\Delta(k)$ は $P(k|k)$ を $\Delta(k)$ で微分してゼロとおくことにより得られる「正規方程式」から求まる。すなわち，

$$\frac{dP(k|k)}{d\Delta'(k)}=0;\ E[\tilde{x}(k|k-1)\tilde{y}'(k|k-1)]-\Delta(k)E[\tilde{y}(k|k-1)\tilde{y}'(k|k-1)]=0 \qquad (2\text{—}16)$$

(2—9)′式は (2—2)式により

$$\begin{aligned}\tilde{y}(k|k-1)&=f(x(k))+w(k)-f(\hat{x}^0(k|k-1))\\&=f(x(k))-f(\hat{x}^0(k|k-1))+w(k)\end{aligned} \qquad (2\text{—}9)''$$

ところで，Taylor展開により

$$\begin{aligned}f(x(k))&=f(\hat{x}^0(k|k-1))+J_k(x(k)-\hat{x}^0(k|k-1))+r(k|k-1)\\&=f(\hat{x}^0(k|k-1))+J_k\tilde{x}(k|k-1)+r(k|k-1)\end{aligned} \qquad (2\text{—}17)$$

ここに，J_k は $x=\hat{x}^0(k|k-1)$ における $f(x)$ のヤコビアン $\dfrac{df(x)}{dx}$

$r(k|k-1)$ は剰余項

であるので，(2—9)″ 式は

$$\tilde{y}(k|k-1)=J_k\tilde{x}(k|k-1)+r(k|k-1)+w(k) \tag{2—18}$$

となる。誤差に関しては (2—3)～(2—5) 式の他に

$$E[\tilde{x}(k|k-1)w'(k)]=0,\quad E[r(k|k-1)w'(k)]=0 \tag{2—19}$$

$$E[\tilde{x}(k|k-1)r'(k|k-1)]=Z(k|k-1) \tag{2—20}$$

が成り立つとすれば，(2—16) 式の各項は

$$\begin{aligned}E[\tilde{x}(k|k-1)\tilde{y}'(k|k-1)]&=E[\tilde{x}(k|k-1)\tilde{x}'(k|k-1)]J_k'\\&\quad+E[\tilde{x}(k|k-1)r'(k|k-1)]=P(k|k-1)J_k'+Z(k|k-1)\end{aligned} \tag{2—21}$$

$$\begin{aligned}E[\tilde{y}(k|k-1)\tilde{y}'(k|k-1)]&=J_kE[\tilde{x}(k|k-1)\tilde{x}'(k|k-1)]J_k'\\&\quad+J_kE[\tilde{x}(k|k-1)r'(k|k-1)]+E[r(k|k-1)\tilde{x}'(k|k-1)]J_k'\\&\quad+E[r(k|k-1)r'(k|k-1)]+E[w(k)w'(k)]\\&=J_kP(k|k-1)J_k'+J_kZ(k|k-1)+\{J_kZ(k|k-1)\}'\\&\quad+E[r(k|k-1)r'(k|k-1)]+W(k)\end{aligned} \tag{2—22}$$

となる。ここで，あらためて

$$R(k)=J_kZ(k|k-1)+\{J_kZ(k|k-1)\}'+E[r(k|k-1)r'(k|k-1)]+W(k) \tag{2—23}$$

とおくと，(2—22) 式は

$$E[\tilde{y}((k|k-1)\tilde{y}'(k|k-1)]=J_kP(k|k-1)J_k'+R(k) \tag{2—24}$$

となるから，(2—16) 式の $\Delta(k)$ は結局，次のようになる。

$$\therefore\quad \Delta(k)=\{P(k|k-1)J_k'+Z(k|k-1)\}\{J_kP(k|k-1)J_k'+R(k)\} \tag{2—25}$$

(2—25)式すなわち(2—16)式が成立するとき，(2—15)式は(2—14)′式及び(2—21)式により

$$\begin{aligned}P(k|k)&=E[\tilde{x}(k|k-1)\tilde{x}'(k|k-1)]-\Delta(k)E[y(k|k-1)\tilde{x}'(k|k-1)]\\&=P(k|k-1)-\Delta(k)\{J_kP(k|k-1)+Z'(k|k-1)\}\\&=\{I-\Delta(k)J_k\}P(k|k-1)-\Delta(k)Z'(k|k-1)\end{aligned} \tag{2—26}$$

また，(2—1)式と(2—13)式から

$$\tilde{x}(k+1|k)=\Phi(k+1;\,k)\tilde{x}(k|k)+\Theta(k+1;\,k)\tilde{u}(k)+v(k) \tag{2—27}$$

であるから，$E[\tilde{x}(k|k)v'(k)]=0$に注意して

$$\begin{aligned}P(k+1|k)=E[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{x}'(k+1|k)]&=\Phi(k+1;\,k)P(k|k)\Phi(k+1;\,k)\\&\quad+\Theta(k+1;\,k)S(k)\Theta(k+1;\,k)+Q(k)\end{aligned} \tag{2—28}$$

ただし，$S(k)=E[\tilde{u}(k)\tilde{u}'(k)]$

を得る。

ところで，(2—14)′ 式は (2—18) 式から

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(k|k) &= \tilde{x}(k|k-1) - \Delta(k)\{J_k\tilde{x}(k|k-1) r(k|k-1) + w(k)\} \\
&= \{I-\Delta(k)J_k\}\tilde{x}(k|k-1) - \Delta(k)\{r(k|k-1)+w(k)\}
\end{aligned}
$$

であるから，(2—19) 式および (2—20) 式を考慮して

$$
\begin{aligned}
P(k|k) &= E[\tilde{x}(k|k)\tilde{x}'(k|k)] \\
&= \{I-\Delta(k)J_k\}E[\tilde{x}(k|k-1)\tilde{x}'(k|k-1)]\{I-\Delta(k)J_k\}' \\
&\quad -\{I-\Delta(k)J_k\}E[\tilde{x}(k|k-1)r'(k|k-1)]\Delta'(k) \\
&\quad -[\{I-\Delta(k)J_k\}E[\tilde{x}(k|k-1)r'(k|k-1)]\Delta(k)]' \\
&\quad +\Delta(k)[E[r(k|k-1)r'(k|k-1)]+W(k)]\Delta'(k) \\
&= \{I-\Delta(k)J_k\}P(k[k-1)\{I-\Delta(k)J_k\}' \\
&\quad -\{I-\Delta(k)J_k\}Z(k|k-1)\Delta'(k) \\
&\quad -[\{I-\Delta(k)J_k\}Z(k|k-1)\Delta'(k)]' \\
&\quad +\Delta(k)R(k)\Delta'(k) \\
&\quad -\Delta(k)[J_kZ(k|k-1)+\{J_kZ(k|k-1)\}']\Delta'(k) \\
&= \{I-\Delta(k)J_k\}P(k|k-1)\{I-\Delta(k)J_k\}' \\
&\quad +\Delta(k)R(k)\Delta'(k)-\{Z(k|k-1)\Delta'(k)+\Delta(k)Z'(k|k-1)\} \qquad (2\text{—}29)
\end{aligned}
$$

に変形されるから，(2—26) 式は対称マトリクスであることが明白となる。

以上の議論から(2—12), (2—13), (2—25), (2—26), (2—28)の5式により逐次式が構成される。$Z(k|k-1)$ や $R(k)$の計算において $\tilde{x}(k|k-1)$の値が問題となるが，それは次のように仮定する。

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(k|k-1) &\fallingdotseq \hat{x}^0(k|k) - \hat{x}^0(k|k-1) \\
&= \Delta(k)\tilde{y}(k|k-1) = \Delta(k)\{y(k)-\hat{y}^0(k|k-1)\} \qquad (2\text{—}30)
\end{aligned}
$$

剰余項 $r(k|k-1)$ は (2—30) 式を用いて，$x=\hat{x}^0(k|k-1)$ における $f(x)$ の Taylor 展開を2次以上の項まで行う。

§3.　逐次計算手順

非線形な観測方程式を持つ時間離散型の動的システムの計算のアルゴリズムは次のようにまとめられる。

$$
\begin{cases}
\text{状態方程式}\quad x(k+1)=\Phi(k+1;\,k)x(k)+\Theta(k+1;\,k)u(k)+v(k) & (3\text{—}1) \\
\text{観測方程式}\quad y(k)=f(x(k))+w(k) & (3\text{—}2)
\end{cases}
$$

に対するカルマン・フィルタによる逐次計算手順は各ステップでの遷移行列 $\Phi(k+1;k)$，駆動行列 $\Theta(k+1;k)$ および $(k-1)$ ステップでの状態量の最適推定値 $\hat{x}^0(k|k-1)$，状態量の分散 $P(k|k-1)$，$f(x)$ の $x=\hat{x}^0(k|k-1)$ でのヤコビアン J_k，x の推定誤差の自乗以上の剰余項 $r(k|k-1)$ などを既知として，観測値 $y(k)$ が与えられると

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\Delta(k)=\{P(k|k-1)J_k'+Z(k|k-1)\}[J_kP(k|k-1)J_k'+R(k)]^{-1} && \text{(3—3)}\\
&\hat{x}^0(k|k)=\hat{x}^0(k|k-1)+\Delta(k)\{y(k)-f(\hat{x}^0(k|k-1))\} && \text{(3—4)}\\
&\hat{x}^0(k+1|k)=\Phi(k+1;k)\hat{x}^0(k|k)+\Theta(k+1;k)\bar{u}(k) && \text{(3—5)}\\
&P(k|k)=P(k|k-1)-\Delta(k)\{J_kP(k|k-1)+Z'(k|k-1)\} && \\
&\qquad=\{I-\Delta(k)J_k\}P(k|k-1)-\Delta(k)Z'(k|k-1) && \text{(3—6)}\\
&P(k+1|k)=\Phi(k+1;k)P(k|k)\Phi'(k+1;k) && \\
&\qquad\qquad+\Theta(k+1;k)S(k)\Theta'(k+1;k)+Q(k) && \text{(3—7)}
\end{aligned}
\right.
$$

ただし，Iは単位マトリクス

$$Q(k)=E[v(k)v'(k)]$$

$$R(k)=J_kZ(k|k-1)+\{J_kZ(k|k-1)\}'$$
$$+E[r(k|k-1)r'(k|k-1)]+E[w(k)w'(k)]$$

$$S(k)=E[\tilde{u}(k)\tilde{u}'(k)]$$

$$Z(k|k-1)=E[\tilde{x}(k|k-1)r'(k|k-1)]$$

である。出力 y の最適推定値は

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\hat{y}^0(k|k)=f(\hat{x}^0(k|k)) && \text{(3—8)}\\
&\hat{y}^0(k+1|k)=f(\hat{x}^0(k+1|k)) && \text{(3—9)}
\end{aligned}
\right.
$$

となる。

システムの関数が

$$f(x(k))=D(k)x(k) \qquad \text{(3—10)}$$

のように線形である場合は $J_k=D(k)$, $r(k|k-1)=0$, 従って $Z(k|k-1)=0$ となり，$R(k)=E[w(k)w'(k)]$ となり，(3—1)～(3—9)までの式は著者が前に示した線形システムのものと完全に一致する[3]。

特に，定常過程 ($\Phi(k+1;k)=I$ かつ $u(k)\equiv 0$) の場合は次のようになる。

時間離散型非線形動的システム

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\text{状態方程式}\quad x(k+1)=x(k)+v(k) && \text{(3—11)}\\
&\text{観測方程式}\quad y(k)=f(x(k))+w(k) && \text{(3—12)}
\end{aligned}
\right.
$$

に対して，逐次計算手順は $(k-1)$ ステップでの最適推定値 $\hat{x}^0(k|k-1)$, 分散 $P(k|k-1)$, $f(x)$ の $x=\hat{x}^0(k|k-1)$ でのヤコビアン J_k, 2次以上の剰余項 $r(k|k-1)$ などを既知として，観測値 $y(k)$ が与えられると

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\Delta(k)=\{P(k|k-1)J_k'+Z(k|k-1)\}\{J_kP(k|k-1)J_k'+R(k)\}^{-1} && \text{(3—13)}\\
&\hat{x}^0(k|k)=\hat{x}^0(k|k-1)+\Delta(k)\{y(k)-f(\hat{x}^0(k|k-1))\}=\hat{x}^0(k+1|k) && \text{(3—14)}\\
&P(k|k)=P(k|k-1)-\Delta(k)J_kP(k|k-1)-\Delta(k)Z'(k|k-1) && \text{(3—15)}\\
&P(k+1|k)=P(k|k)+Q(k) && \text{(3—16)}
\end{aligned}
\right.
$$

出力 $\boldsymbol{y}$ の最適推定値は

$$\hat{\boldsymbol{y}}^0(k|k)=\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}^0(k|k))=\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}^0(k+1|k))=\hat{\boldsymbol{y}}^0(k+1|k) \quad (3\text{—}17)$$

で与えられる。

§4.　非線形方程式の解法への応用

微分可能な関数の方程式

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=0 \quad (4\text{—}1)$$

が与えられているとき，これを逐次近似法で解くことを考える。これは次のように定式化される。「関数型 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が既知で，かつ，微分可能である定常な動的システム

$$\begin{cases} \text{状態方程式} \quad \boldsymbol{x}(j+1)=\boldsymbol{x}(j)+\boldsymbol{v}(j) & (4\text{—}2) \\ \text{観測方程式} \quad \boldsymbol{y}(j)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(j))+\boldsymbol{w}(j) & (4\text{—}3) \end{cases}$$

において，$\boldsymbol{y}(j)\equiv 0$ が観測される時，最適状態量 $\hat{\boldsymbol{x}}^0(j)$ を求める。」

これに対する解は(3—13)～(3—16)式により，k ステップでの観測値 $\boldsymbol{y}(k)=0$ として

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta}(k)=\{\boldsymbol{P}(k|k-1)\boldsymbol{J}_k'+\boldsymbol{Z}(k|k-1)\}\{\boldsymbol{J}_k\boldsymbol{P}(k|k-1)\boldsymbol{J}_k'+\boldsymbol{R}(k)\}^{-1} & (4\text{—}4) \\ \hat{\boldsymbol{x}}^0(k+1|k)=\hat{\boldsymbol{x}}^0(k|k-1)-\boldsymbol{\Delta}(k)\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}^0(k|k-1)) & (4\text{—}5) \\ \boldsymbol{P}(k+1|k)=\{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Delta}(k)\boldsymbol{J}_k\}\boldsymbol{P}(k|k-1)-\boldsymbol{\Delta}(k)\boldsymbol{Z}'(k|k-1)+\boldsymbol{Q}(k) & (4\text{—}6) \end{cases}$$

のようになる。

(2—17)式で $\boldsymbol{r}(k|k-1)=0$ ならば，(2—20)式において $\boldsymbol{Z}(k|k+1)=0$ となる。また，$\boldsymbol{W}(k)=0$ であれば，$\boldsymbol{R}(k)=0$ となるので，(4—4)式は

$$\boldsymbol{\Delta}(k)=\boldsymbol{J}_k^{-1} \quad (4\text{—}7)$$

となる。この場合，(4—5)，(4—6) の両式は

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}^0(k+1|k)=\hat{\boldsymbol{x}}^0(k|k-1)-\boldsymbol{J}_k^{-1}\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}^0(k|k-1)) & (4\text{—}8) \\ \boldsymbol{P}(k+1|k)=\boldsymbol{Q}(k) & (4\text{—}9) \end{cases}$$

となり，(4—4)～(4—6) 式の逐次計算は Newton-Raphson 法に縮退する。この場合，(4—8)式が単独でサイクリックな過程となり，(4—9) 式は $\hat{\boldsymbol{x}}^0(k+1|k)$ には寄与しない。更に，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}$ の時は，$\boldsymbol{J}_k\equiv\boldsymbol{A}$ となり，(4—8) 式は連立一次方程式の解となる。

カルマン・フィルタの(4—4)～(4—6)式による計算では，近似解が真の解に近づくにつれて，剰余項 $\boldsymbol{r}(k|k-1)$ は急速に 0 に近づくので，$\boldsymbol{Z}(k|k-1)$ も急速に 0 に近づく。そのとき，(2—23)式で表される $\boldsymbol{R}(k)$ は $\boldsymbol{W}(k)$ に近づき，$\|\boldsymbol{W}\|\ll\|\boldsymbol{J}_k\boldsymbol{P}(k|k-1)\boldsymbol{J}_k'\|$ なれば $\boldsymbol{\Delta}(k)\simeq\boldsymbol{J}_k^{-1}$ となり，$\boldsymbol{P}(k+1|k)\approx\boldsymbol{Q}(k)$ となる。すなわち，比 $\|\boldsymbol{R}(k)\|/\|\boldsymbol{Q}(k)\|$ が小さければ，カルマン・フィルタは Newton-Raphson 法とほゞ同様になる。これはカルマン・フィルタの式が (2—8)式の仮定に基づくことからの帰結である。

Newton-Raphson 法が $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ のヤコビアン $\boldsymbol{J}_k=0$ のときには解の修正がなされないのに対し

て，カルマン・フィルタでは $Z(k|k-1)$ および $R(k)$ を 0 でなく選ぶことにより，ヤコビアン $J_k=0$ であっても解の修正がなされることがわかる。

§5. 結　論

微分可能な非線形の観測方程式をもつ時間離散型の動的システムに対するカルマン・フィルタが線形システムと同様に最小自乗法により誘導された。

解の収束の数学的に厳密な証明はなされていないが，Newton-Raphson 法の計算アルゴリズムは非線形カルマン・フィルタのアルゴリズムに包含されることが示めされた。そして，前者が与えられた関数のヤコビアンが 0 になる時，計算が不能になるのに対し，後者では剰余項や誤差の分散が緩和項となり，計算が可能となる。

参 考 文 献

1) Kalman, R.E.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problem. *Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng.*, Vol. 82, pp.35-45, 1960.

2) Cox, H.: On the Estimation of State Variables and Parameters for Noisy Dynamic System. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-9, pp.5-12, Jan. 1964.

3) 拙著：「カルマン・フィルタと最小自乗法」. 法政大学工学部研究集報，第19号, pp.93-109, 1983年 3 月.

4) Levenberg, K.: A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least Squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. II, No. 2, pp.164-168, 1944.

5) 拙著：「非線形カルマン・フィルタとニュートン・ラプソン法」. 法政大学計算センター研究報告，第 3 巻，pp.87-93, 1989.

6) Kuo, B.C.: Discrete-Data Control Systems, Prentice-Hall, pp.305-307, 1970.