

非線形RC回路のステップ応答

TANAKA, Tomoharu / 田中, 具治

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部
研究集報

(巻 / Volume)

27

(開始ページ / Start Page)

7

(終了ページ / End Page)

12

(発行年 / Year)

1991-02

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00003907>

非線形 RC 回路のステップ応答

田中具治*

Step Response of Nonlinear Circuit

Tomoharu TANAKA*

Abstract

The step responses of nonlinear RC circuits are investigated. The characteristics of nonlinear capacitor, is approximated by the power series, then the change rates about its terminal voltage are defined, and denoted as N_1, N_2, \dots , etc. In the parameter space (N_1, N_2) , any point (N_1, N_2) is supposed to correspond to its step responses, and we could see how the step responses change from point to point. We can get some information from this parameter space to design these nonlinear RC circuits.

§ 1. はじめに

非線形容量の特性をべき級数で近似した場合の、非線形 RC 回路のステップ応答を調べた。非線形容量 $C(\bar{Y})$ の端子電圧に対する変化率を定義し、それらを N_1, N_2, \dots , etc とする。この N_1, N_2 を軸とするパラメータ空間 (N_1, N_2) に、各パラメータの値に対応するステップ応答を並べると、パラメータ N_1, N_2 の値の変化に対して、ステップ応答波形がどう変わるかが分かる。特定のステップ応答波形、たとえば $N_1 = -0.5, N_2 = 0$ の直線応答を考える。 $N_1 = -0.4, N_2 = 0$ のときは応答は直線からずれるが、これを直線に近づけるにはどうすればよいか分かる。すなわち、非線形回路の設計についての情報がえられる。ステップ応答の解の式からは、設計などの情報が得にくいので、このような工夫が必要であると思われる。

さらに、入力ステップの大きさを変更したときの出力応答は、特定のやり方でパラメータ空間の別の点に移ることが分かる。この性質は、非線形素子の変化率を小さくした極限で、線形回路の線形性に一致する。

§.2 非線形RC回路のステップ応答

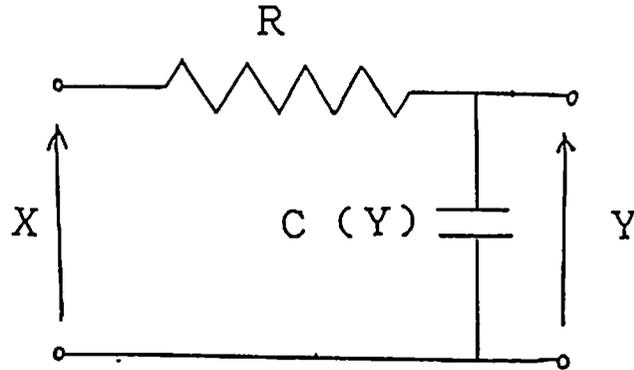


図1 非線形RC回路

図1に示す、非線形RC回路のステップ応答を調べる。非線形容量 $C(v)$ はその端子電圧により一般に変化する。ここでは、その特性をべき級数で表わす。

$$C(v) = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n v^n \quad (\text{ここで } \alpha_0 = 1 \text{ とする}) \quad (1)$$

$$n = 0 \text{ のとき } C(v) = C_0 \quad (2-1)$$

$$n = 1 \text{ のとき } C(v) = C_0 (1 + \alpha_1 v) \quad (2-2)$$

$$n = 2 \text{ のとき } C(v) = C_0 (1 + \alpha_1 v + \alpha_2 v^2) \quad (2-3)$$

回路の入力 X を、大きさ E のステップ関数とすると

$$X = E u(t) \quad (3-1)$$

ここで $u(t)$ は、単位ステップ関数である。

入力 X と出力 Y を、ステップの大きさ E で基準化する。

$$\bar{X} = X/E = u(t) \quad (3-2)$$

$$\bar{Y} = Y/E \quad (4)$$

非線形容量の特性は (2-3) 式を用いる。(4) 式を用いてかきかえると

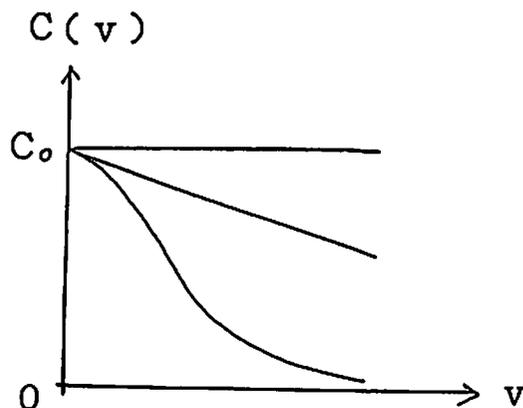


図2 非線形容量の (C - V) 特性

$$C(\bar{Y}) = C_0(1 + \alpha_1 E \bar{Y} + \alpha_2 E^2 \bar{Y}^2) \quad (5)$$

$C(\bar{Y})$ の端子電圧 \bar{Y} についての変化率は、 C_0 について基準化して次式のようになる。

$$N_1 = \frac{1}{C_0} \frac{d}{d\bar{Y}} [C(\bar{Y})]_{\bar{Y}=0} = \alpha_1 E \quad (6-1)$$

$$N_2 = \frac{1}{C_0} \frac{d^2}{d\bar{Y}^2} [C(\bar{Y})]_{\bar{Y}=0} = 2\alpha_2 E^2 \quad (6-2)$$

図1に示すRC回路の微分方程式は、

$$RC_0(1 + 2\alpha_1 E \bar{Y} + 3\alpha_2 E^2 \bar{Y}^2) \frac{d\bar{Y}}{dt} + \bar{Y} = u(t) \quad (7-1)$$

ここで、時定数関数を次式で定義する。

$$\text{初期時定数を } T_0 = RC_0 \text{ として} \quad (8-1)$$

$$T(\bar{Y}) = T_0(1 + 2\alpha_1 E \bar{Y} + 3\alpha_2 E^2 \bar{Y}^2) \quad (8-2)$$

$C(\bar{Y})$ の変化率 (6-1, 2) 式を用いて

$$T(\bar{Y}) = T_0(1 + 2N_1 \bar{Y} + 1.5N_2 \bar{Y}^2) \quad (8-3)$$

(7-1) 式をかきかえると、

$$T_0(1 + 2N_1 \bar{Y} + 1.5N_2 \bar{Y}^2) \frac{d\bar{Y}}{dt} + \bar{Y} = u(t) \quad (7-2)$$

時間 t を、初期時定数で基準化する。

$$\bar{t} = t/T_0 \quad (9)$$

回路の微分方程式は、

$$(1 + 2N_1 \bar{Y} + 1.5N_2 \bar{Y}^2) \frac{d\bar{Y}}{d\bar{t}} + \bar{Y} = u(\bar{t}) \quad (7-3)$$

$t = 0$ で、 $Y = 0$ の初期条件で上式の解を求めると、

$$\begin{aligned} \ln(1 - \bar{Y}) + 2N_1 \{\ln(1 - \bar{Y}) + \bar{Y}\} \\ + 1.5N_2 \{\ln(1 - \bar{Y}) + \bar{Y} + 0.5\bar{Y}^2\} = -\bar{t} \end{aligned} \quad (10-1)$$

ここで、 $\alpha_2 = 0 (N_2 = 0)$ とおくと、(2-2) 式の $n=1$ の場合の解になる。(10-1) 式で、 $N_2 = 0$ とし

$$\ln(1 - \bar{Y}) + 2N_1 \{\ln(1 - \bar{Y}) + \bar{Y}\} = -\bar{t} \quad (10-2)$$

さらに、 $\alpha_1 = 0 (N_1 = 0)$ とおいて、(2-1) 式の $n=0$ の線形容量の場合の解は、上式で、 $N_1 = 0$ とし

$$\ln(1 - \bar{Y}) = -\bar{t} \quad \text{または} \quad \bar{Y} = 1 - e^{-\bar{t}} \quad (10-3)$$

以上から、解 (10-1) 式の左辺の第1項、第2項、第3項は、それぞれ非線形容量の特性を表わすべき級数の第1項、第2項、第3項に対応している。項別積分である。

非線形容量の変化率 N_1, N_2 をパラメータとして、非線形RC回路のステップ応答の $(\bar{Y}-\bar{t})$ 特性を、図3に表わす。図3 (b) は、 $N_2=0$ で (10-2) 式を N_1 を手前から奥の方向に軸をとり、 $(\bar{Y}-\bar{t})$ 特性を並べた。 $N_1=-0.5$ では直線の応答となっている。

$N_2 < -0.5$ では、 $\bar{Y} < 1$ のある値で時定数関数 $T(\bar{Y})=0$ となるので、そこで $\bar{Y}=1$ までジャンプする。図3 (a) は、 $N_2=0.1$ の (10-1) 式の $(\bar{Y}-\bar{t})$ 応答を図3 (b) と同様に N_1 をパラメータとして並べた。図3 (c) も同様に $N_2=-0.1$ として N_1 をパラメータとして $(\bar{Y}-\bar{t})$ 特性を並べた。この図3では、 \bar{Y}, \bar{t}, N_1 の3つの座標による3次元表現で、解の集まりはこの3次元内の曲面になる。もう1つ N_2 軸をつくると、4次元空間を考えることができる。しかし4次元空間での曲面を表現し難いので、図3のように N_2 はパラメータとして、3つの値だけで N_2 による応答の変化をみたわけである。

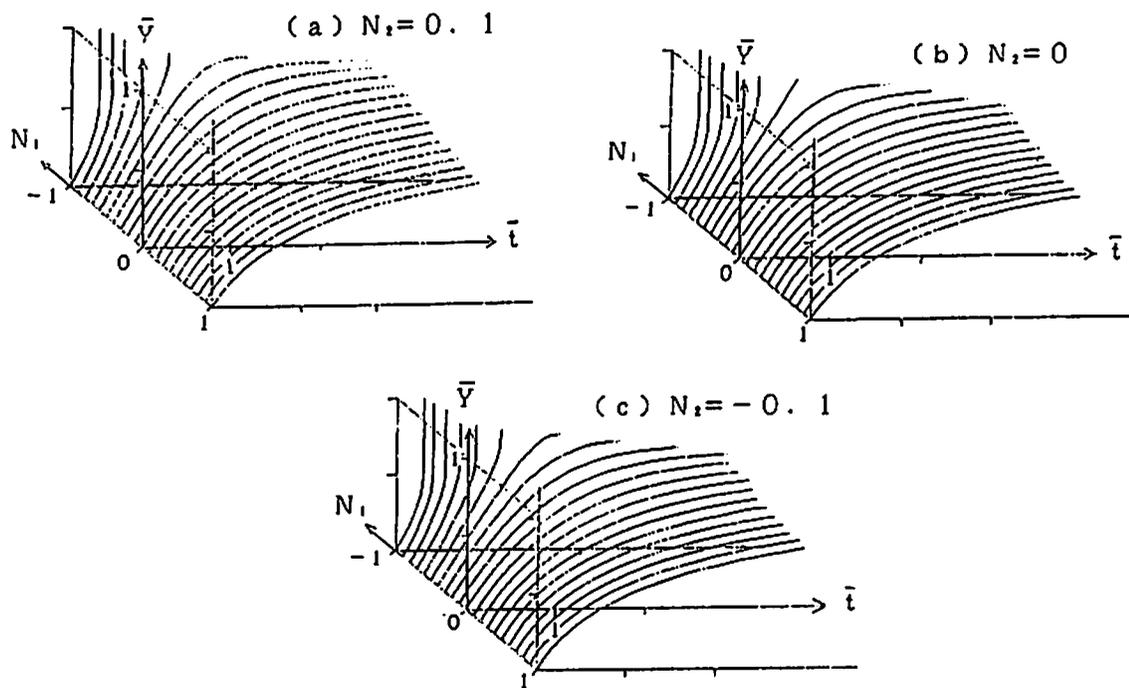


図3 非線形RC回路のステップ応答
[N_2 をパラメータとする (N_1, \bar{Y}, \bar{t}) 応答]

$N_1 = -0.5, N_2 = 0$ の場合は、直線応答となる。そこで $N_1 = -0.5$ で $N_2 = 0.1$ の場合を調べると、 \bar{Y} の1に近い所で直線から外れ1への漸近曲線となっている。一方、 $N_1 = -0.5$ で $N_2 = -0.1$ の場合を調べると、 \bar{Y} の1に近い所で応答は垂直になりジャンプする。これが N_2 項の影響である。 $N_1 = -0.4, N_2 = 0$ の場合は \bar{Y} が1に近い所で応答は直線に近い所から1への漸近曲線となる。これを直線応答に近づけるには、 $N_2 = -0.1$ と N_2 を負の方に少し変えればよい。また $N_1 = -0.6, N_2 = 0$ の場合は \bar{Y} が1に近い所で応答は垂直になりジャンプする。これを直線応答に近づけるには、

N_2 を0から十の方向に増せばよい。このように非線形容量をもつRC回路のステップ応答を、変化率 N_1 , N_2 などをパラメータとして、パラメータ平面 (N_1 , N_2) にならべることによって、この回路のステップ応答を特定の波形に近づけることができる。すなわち、非線形回路の設計の問題への手がかりとすることができる。

横軸を \bar{Y} 、たて軸を N_1 とし、 $d\bar{Y}/d\bar{t} = \dot{\bar{Y}}$ をパラメータとしてステップ応答族を表わしたのが、図4である。 N_2 をパラメータとして、図4 (a) は $N_2 = 0.1$ 、図4 (b) は $N_2 = 0$ 、図4 (c) は $N_2 = -0.1$ の (N_1 - \bar{Y}) 応答を示す。図3の表現の方が分かりやすい所もある。たとえば、 $N_1 = -0.5$, $N_2 = 0$ の直線応答の場合は、 $\dot{\bar{Y}} = 1$ の線と重なっていて、応答の傾斜ははつねに1であることが分かる。

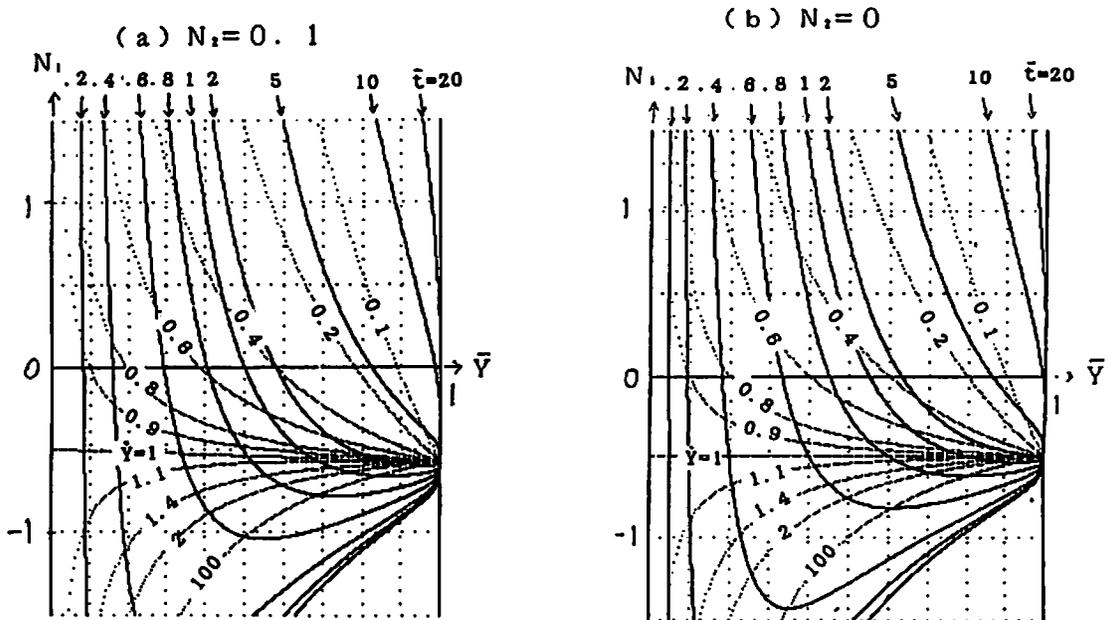


図4-a $N_2 = 0.1$ の場合の(n_1 , \bar{Y})の応答 図4-b $N_2 = 0$ の場合の(n_1 , \bar{Y})の応答

(c) $N_2 = -0.1$

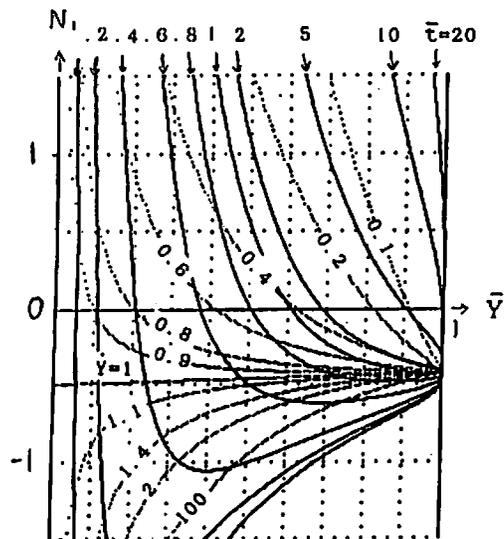


図4-c $N_2 = -0.1$ の場合の(n_1 , \bar{Y})の応答

入力ステップの大きさ E を k 倍して kE としたとき、出力応答はどう変わるかを考える。

$$N_1' = \alpha_1 kE = kN_1, \quad N_2' = 2\alpha_2 (kE)^2 = k^2 N_2 \quad (11)$$

すなわち、パラメータ空間の点 (N_1, N_2) から点 $(kN_1, k^2 N_2)$ に移ることが分かる。 α_1, α_2 を小さくしてゆき、 $\alpha_1=0, \alpha_2=0$ の極限では、 $C(\bar{Y})=C_0$ で線形の場合に一致するので、(11) 式の性質は線形回路の線形性に縮退する。

§ 3. まとめ

非線形容量 $C(\bar{Y})$ の特性を、(1) 式のようにべき級数で表わす。 $C(\bar{Y})$ の端子電圧 \bar{Y} についての変化率は一般に次式で定義する。

$$N_j = \frac{1}{C_0} \frac{d^j}{d\bar{Y}^j} [C(\bar{Y})]_{\bar{Y}=0} = j! \alpha_j E_j \quad (6-3)$$

$j=0$ では $N_0=0$ となり、これは線形の場合で変化しないことを示す。 N_1, N_2 は (6-1, 2) 式である。 \bar{Y} は 0 から 1 の間の値をとるので、べき級数の低次の項が重要で、高次の項の応答への寄与は小さい。また非線形容量の特性がゆっくり変化する、急に变化しないとすると、べき級数の高次の項の影響は大きくない。たとえば、 N_1, N_2 の2つだけでも近似がよい場合を考える。パラメータ空間 (N_1, N_2) の各点にRC回路のステップ応答を対応させる。このパラメータ空間から、パラメータの変化に対するステップ応答波形の変化の様子が分かる。この情報により、あるステップ応答をするような非線形RC回路の設計の手がかりがえられることが分かった。

また、ステップ入力の大きさ E を k 倍すると、パラメータ空間の点 (N_1, N_2) から点 $(kN_1, k^2 N_2)$ へ移る。この性質から、ステップ入力の大きさが変化したときの出力波形の変化の動向を知ることができる。

最後に、御助言をいただいた本学の斉藤利通助教授に感謝する。

参考文献

- (1) 田中具治：変定数素子による積分回路の直線性の改善について、応用物理、vol25、No. 4、(昭和31年)、p.141/143
- (2) 田中具治：非線形回路の直流単エネルギー通過特性、非直線理論研究会資料 (昭和31年)
- (3) 田中具治：非線形回路の入出力関係、電子通信情報学会、NLP89-4