

開放分岐型構造の動的解析に関する研究

西川, 元徳 / NISHIKAWA, Motonori

(発行年 / Year)

2008-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2008-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

P377.5
M35-2
2007-39

2007 年度 修士論文
Master's Thesis Academic Year 2007

開放分岐型構造の動的解析に関する研究
A Study on Dynamic Analysis of Open Branched Structure Model

指導教官 吉田 長行 教授
Academic Advisor
Prof. Nagayuki YOSHIDA

法政大学大学院 工学研究科 建設工学専攻
Department of Architecture,
Graduate School of Engineering, HOSEI University

西川 元徳
Motonori NISHIKAWA

A Study on Dynamic Analysis of Open Branched Structure Model

Motonori NISHIKAWA

Introduction

Generally I can realize the most suitable structure design that is the intersecting point mark that considered costs such as economy or strength of materials because a purpose / a function of an agenda is clear by an engineering design to make an artifact. Therefore, all the form made artificially has a purpose / a function in the meaning that is the prize. In addition, I have close relation to a form of a creature between functions mutually. Though form of a creature runs life activity with natural environments; of circumstances is made to be good, and it is it with mark structure of an intersecting point achieving the whole or a purpose of each organization / organ effectively. From such a point of view, I catch a function of a branch of a tree from the dynamic side in this study, (1) Lead a theory type to prescribe the structure; making of a tree model, (2) I perform dynamic analysis and am I investigate a structure characteristic of the model that I made, and to examine.

Technique of modeling

A function of a branch of a tree is 2 of the material transferability that it is necessary efficiently and to perform photosynthesis in a leaf in a stable state and a strength function of the dynamics of a branch. All two of them need thickness of a branch, but it is thought that I am enough for the material transportation if there is the thickness that can support weight of a branch with a general tree. Therefore, when consider a main function of a branch to be able to support self-respect safely; of break a branch of which part, and hate being the same namely a branch bend it, and it is thought with importance even which part being constant stress. As for the branch, stress becomes greatest then at crossroads

I assume structure of a branch of a tree structure of a simple cantilever (Fig.1).

A supposition 1) self-respect of a branch is in proportion to a volume of a former branch. ($W = \alpha_w V$)

A supposition 2) center of gravity distance is in proportion to length of a former branch. ($L = \alpha_l l$)

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{32\pi^2 WL}{C^3} = \frac{128\pi^3 \alpha_l W^2}{\alpha_w C^5} = k \frac{W^2}{C^5} \quad (1)$$

In addition, when demand relations of W and C , L and C under a condition of bend stress uniformity,

$$M \propto C^3 \quad (2)$$

$$W \propto C^{2.5} \quad (3)$$

$$l^2 \propto C \quad (4)$$

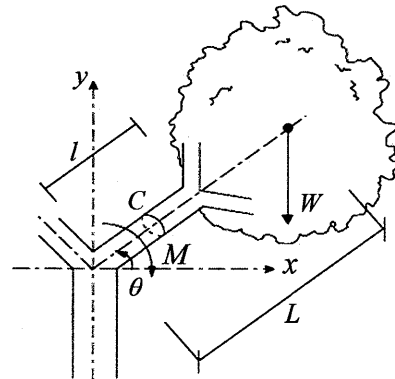


Fig.1 Model diagram for the theoretical analysis of the optimal structure of tree

The equation (2) is equal with bending stress, the equation (3) and the equation (4) are expresses limitation of structural mechanics of a branch.

I think that various factors to give below act to keep variety to a divergence angle of a branch. Various factors are an internal factor by transportation load of water / nutrition and an external factor by wind, an earthquake, gravity, photosynthesis. By these influence, survival probability shall not be the same. For example, a dynamic safety factor is high $\neq$ survival probability is high. When I estimated that optimization of outbreak probability of a dynamic safety factor, the survival probability that is not same occurs by a save of a kind and assumes that outbreak probability of a divergence corner is decided. In addition, I change divergence square and participate in a dynamic safety factor through stress. Therefore, it is thought that I have close to outbreak probability of a divergence corner relation to a dynamic safety factor. In consideration of a supposition (3), I formulate this for divergence square more newly than the above-mentioned thought.

A supposition 3) outbreak probability of a divergence corner is in proportion to outbreak probability of a dynamic safety factor of branch crossroads.

$$\frac{1}{v} = \mu \cos \phi \quad \mu = \frac{WL}{\sigma_r Z} \quad (\leq 1.0) \quad (5)$$

A growth rate gradually falls as I grow up, and a tree completely stops growth before long. I consider a supposition (4) here and stop growth if lap diameter at the end of a branch in a tree model reaches the value that there is. Generally growth of a tree excludes young and an old tree, and there are relations the equation (5) in tree's girth and the age of a tree, height of a tree and age of a tree. I can make the model that considered a growth process of a real tree by the above.

A supposition 4) tree's girth of an end branch is constant in the time of a throat for a stage of growth.

$$Age = \frac{C_0}{1.3 \sim 2.5} = \frac{H}{15.0 \sim 50.0} \quad [cm] \quad (6)$$

Analysis

I show a reply of displacement by an EL CENTRO earthquake wave. I show the base shear coefficient. As a tree grows up, quantity of change increases. As a tree grows up and the number of the divergence increases, the base shear coefficient almost decreases.

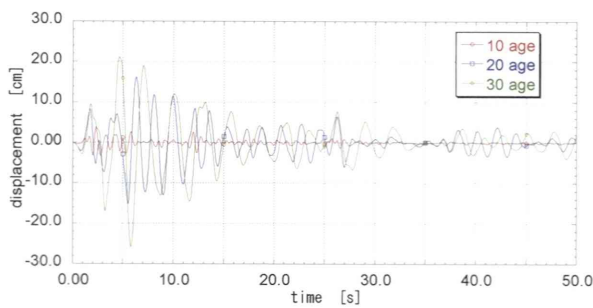


Fig.2 A relative displacement reply

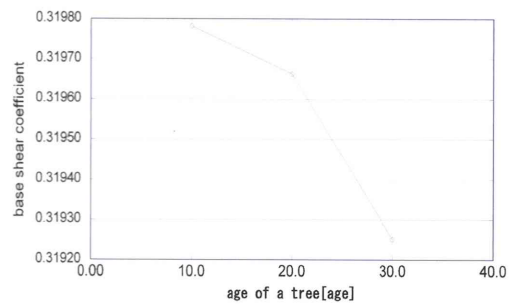


Fig.3 Base shear coefficient

Conclusion

It is almost a real tree; was able to model it. And I did vibration reply analysis by a finite element method. I got a result, the following knowledge.

- 1) As a tree grows up, quantity of change increases.
- 2) A tree gets a quakeproof effect by diverging.

Consideration of a geometric nonlinearity of superstructure and the lower part only as well as the upper part further investigation is necessary.

目次

第1章 序論

1.1 本研究の背景-----	1
1.2 本研究の目的-----	3
1.3 本論文の構成-----	4

第2章 既往の研究

2.1 概説-----	5
2.2 開放分岐型構造について-----	6
2.3 様々な分岐構造に見る開放分岐型構造-----	7

第3章 樹木について

3.1 概説-----	16
3.2 樹木の成長-----	17
3.3 樹木の成長に関わる要因-----	18
3.4 樹木の形状-----	20
3.5 根系の支持作用-----	21
3.6 樹木の上部構造と下部構造の関係-----	23

第4章 解析手法

4.1 概説-----	24
4.2 梁の要素マトリクスの定式化-----	25
4.3 数値積分法-----	34
4.4 固有値解析-----	37
4.5 時刻歴応答解析-----	44

第5章 モデル化の手法

5.1 概説	45
5.2 樹木の枝の機能と力学的構造理論	46
5.3 成長プロセスによる最適条件	52
5.4 作成手順	53

第6章 解析結果

6.1 概説	54
6.2 解析手順	55
6.3 樹木モデルの作成	56
6.4 固有値解析	58
6.5 時刻歴応答解析	59

第7章 結論

7.1 本研究の成果	70
7.2 今後の研究課題	70

参考文献	71
------	----

謝辞	73
----	----

第1章

序論

1.1 本研究の背景

20 世紀、人類は目覚ましい進歩を遂げ、大阪万博に象徴されるように、その進歩が続くことを誰もが信じて疑わなかった。しかし、従来の科学技術の発展は、現在、幾つかの壁に突き当たりつつある。それだけでなく、こうした発展により生まれた様々な人工物は少なからず常に自然環境破壊をともしない、人類はもとより、地球上のあらゆる生物の存在に大きく影響する状況となっている。今日においてこれは重要な社会問題であり、このような問題を解決するためにも、人工物そのものはもちろん、その設計・生産から利用に至る技術は、常に生物を含めた自然環境や、それら生態系と調和したものでなければならない。このようなことから、環境、バイオ、情報の 3 分野の重要性が現在、特に指摘されている。そしてこのことを実行する最も良い方法は、生物の仕組みを精査に分析し、これを工学に応用することではないだろうか。なぜなら、生物自身、環境に適応することがその生命保持の最大課題であり、そのための手段としてあらゆる方法を用いており、その特に重要な手段は情報伝達の方法であるからである。

生物の種類は多く、およそ 10 億種あるともいわれている。しかも、それらの形や大きさはもちろん、生息環境も極めて多様である。さらに、その中から人体一つを取り上げてみても、機能、構造、組織などの複雑さは驚嘆に値する。我々が生物を学び、その結果として人間・社会に役立つ何かを創造したいと思う気持ちは、実はこのような生物自身の複雑性に理由があるのかもしれない。つまり、人間・社会で生じている問題も多種多様であるから、これらを解決する方法としては、それに対応する十分な複雑性を有するものでなければならないからである。

しかし、我々はただ複雑で混沌とした状態のものからは何も学ぶことはできない。つまり、生物には何らかの合理性があると判断でき、このような合理性の裏づけが、我々に学ぶ意欲を起こさせているともいえる。それでは、生物における合理性とは何であろうか。この点についてこれまでよくいわれていることは、次のようなものである。

一般に高等生物は自律的な生命活動を営む細胞から構築されているが、細胞一つだけ取り出しても生物固有の顔は見えず、細胞が集まって組織となり、更に器官や個体となって、初めてそれぞれ自律機能を持

第1章 序論

った形が構築され、生物（全体）として任務を達成する生理機能を持ったシステムとなる。本稿で述べる樹木も、このような生物システムとみなすと、根・幹・枝・葉という各器官要素が自律的に生命活動を営み、各要素間で巧みに協調をとりながら樹木としての生育活動を行っていると考えることができる。

さて、技術者が自動車や船、飛行機、橋や建物などの人工物を造る場合、それぞれの対象物の機能目的が明確なため、材料の経済性や強度などのコストを考慮した合目的な最適構造が設計でき、逆に出来上がった実体を概念化（数理モデル等）して一般性を持たせることもできる。したがって、造られた形（構造）は全て何らかの意味で目的・機能を持つが、一般に生物の機能目的を客観的に明確化することは困難な場合が多い。しかし、機能目的なしに生物の形が定まらないのも事実であり、Rosen（文献 [45]）によれば、四足動物の骨格、鳥の翼、魚の形、血管の構造など、いろいろな具体例を用いて生物の形と機能が相互に密接な関係を持っていることを示している。すなわち、生物の形は自然環境で生命活動を営むのに都合の良いように造られ、全体あるいは各組織・器官の機能目的を最も効率的に達成するような合目的構造となっていると指摘している（文献[45-48]）。更に、環境が不断に変化する自然界で生育する生物は、人工物とは全く異なり、自然環境に対して柔軟に適応する能力も備わっており、環境変化に応じて巧みに形が都合良く自律的に適応変化するように再構築（remodeling）されることも知られている（文献 [1] , [46] , [47] , [48]）。生物の形がある法則性の基に構築されるとすれば、このような調節機構を解明する重要な手掛りとなろう。

1.2 本研究の目的

研究背景より、人工的に造られた形は全て何等かの意味で目的・機能を持つ。また、生物の形態と機能の間にも、相互に密接な関係がある。生物の形は、自然環境で生命活動を営むのに都合のいいように造られ、全体あるいは各組織・器官の目的を、最も効率的に達成するような合目的的構造となっている。

このような観点から、樹木、河川、雷、骨、血管など自然界に存在する、上部および下部へ開放、さらに分岐する形状について取り上げ、それらの構造特性を検討する。本研究では、このような構造形態を開放分岐型構造と定義する。その中でも、特に樹木の耐震性に着目し、樹木の枝の機能・目的を力学的側面から捉え、導いた理論式を用い、以下に挙げる項目について検討することを本稿の目的とする。

また樹木モデルを作成するにあたり、山越らの研究報告（文献 [1] , [2]）より、理論式の一部を引用した。

- (1) 樹木の成長段階の異なるモデルの作成
- (2) 作成したモデルの動的特性についての検討

現段階では、本研究における開放分岐型構造が、どのように建築、または建築現場に直結し、利用されるのか未知である。しかし、今後の研究成果により、大空間建築物の屋根を支える柱など、開放分岐型構造の実社会での利用を最終的な目的とする。

1.3 本論文の構成・内容

第1章では、研究背景と研究目的を述べる。

第2章では、分岐モデルに関する既往の研究や具体例を交えて記述する。

第3章では、主に、樹木の成長や形状に関する樹木の基本的な特徴・性質を記述する。

第4章では、本研究で用いた解析手法について記述する。

第5章では、第3章で記述した樹木の基本的な特徴・性質から力学的に樹木の形状に関わると思われる機能・性質に着目し、モデル化の手法を記述する。

第6章では、第5章で作成したモデルについて振動応答解析を行い、その構造特性を検討・調査する。

第7章では、本研究の成果と今後の展望を述べる。

第2章

既往の研究

2.1 概説

本章では、開放分岐型構造と考えられるいくつかの分岐モデルに関する研究や具体例について示す。

ここでは、血管、河川、樹木のモジュール性についての研究事例を示す

2.2 では、開放分岐型構造の基本的特性について示す。

2.3 では、血管、河川、樹木のモジュール性などの研究や具体例を挙げ、様々な分岐構造について示す。

2.2 開放分岐型構造について

2.2.1 開放分岐型構造の基本的特性

樹木の枝分かれや根の主根から毛根への分岐、生体内の血管の分岐、合流など生物の分岐網形態は非常に精巧かつ巧みにできている。これらの分岐は、規定された二次元、または三次元空間や物体の各領域へのエネルギーや物質の配送、収集システムとみなすことができる。例えば、動物の動脈・静脈血管網は摂取した栄養分や酸素を、毛細血管を通して末端の細胞に配送し、不要となった老廃物や熱交換によって発生した CO_2 を静脈網を通して回収するシステムと見なせる。集配する物質などの粘性と摩擦を考慮しながら、巧みな枝分かれ・合流によって分岐網の末端では領域の全体をくまなく網羅し、圧力や配送量を均一にする形態を実現している。同様に根や枝分かれの分岐網を、荷重を支える構造とみると、自重や風雪の分布荷重を分岐網末端で支え、徐々に統合して最終的に太い幹や主根で集中的に支持する巧みな構造とみなすことができる。もちろん、枝の先には葉を付けて光合成により糖分を生成し、根からは養分や水分を吸収して、生物本来の生命維持活動を担っている。つまり、通常、自然界の分岐網形態は複数の目的に関して自然かつ巧妙に最適化が図られていると考えられる。

生物の分岐形態は、ほとんどが一箇所ですべてに分岐する二分岐網で、予め定められた領域内をできるだけくまなく網羅するように、分岐末端での流量や圧力低下、一定などの条件のもとに分岐網は発達する。これら動植物の分岐網形態を決定するパラメータには、分岐前後の枝や根、管の太さの変化、分岐角度と方向、末端の細かさ、網羅する二次元または三次元分布領域の大きさなど多くの要素が考えられる。さらには分岐網が関与している外界の環境の影響を大いに受けながら、全体の成長と共にその分岐網形態も変化し、必ずしも先に生成した枝や管が常に太く成長しないなど、成長の度合いにも局所的な分布がみられ、支配則も明確ではない。しかし、分岐網の成長過程や成熟した分岐網の形態は、単純化されたモデルによってある程度の説明が可能である。

2.3 様々な分岐構造に見る開放分岐型構造

2.3.1 血管の形態と機能の関係

生物界に見られる形態は多種多様であるが、生物個体間には互いに、程度の差こそあれ自分の周りのものの形を認識したり区別したりしていることは明らかである。例えばアヒルや白鳥などの水鳥のひなは、生まれたときから見慣れている親鳥の姿を記憶していて、親鳥について泳ぐ。また人間の子供では、親の顔形はもちろんその表情まで知覚できるようになる。このように生物にとって形そのものが情報伝達の手段となり、生活を営む上で重要な意味を持つ反面、生物の形態がいかにして決まるかという問題も重要で興味深い点である。これは発生学上の問題からアプローチすることも重要である一方、生物系の形態はその機能と互いに密接な関係を持ち、特に代謝エネルギーに関与する内部環境と自然淘汰に係る外部環境に対して最適に設計されたものとしてとらえる立場も当然考えられる。例えば水中にすむ魚は流線型をしている方が最も泳ぎやすいし、光の入らない洞窟にすむ魚、哺乳類や昆虫では色素欠乏症であり、また目が無いことがエネルギー代謝の上からも都合が良い。このように生物界に見られる形態と機能は互いに独立したものとは考えにくく、何らかの関連を持つものと理解される。

生体内の各器官は、心臓、肺臓、腎臓など、それぞれ独立した機能を持ち、その機能目的に直接関与する特異的な細胞や組織より構成された部分でその機能を営んでいる。例えば、心筋線維による収縮と弛緩、肺胞膜におけるガス交換、腎糸球体における代謝産物の濾過および尿細管における水分、塩類、Na 等の再吸収などである。ところが一方では、これら特異的な機能を安定した状態で効率よく働かせている部分として、いわば器官全体、あるいは生体全体のシステムとしての構成に関与している部分がある。このような部分として、最も一般的に存在しているのが血管系である。さてこの血管系は一見非常に複雑な形態をなしているが、管径がそこを流れる血液量によってほぼ決まっていることや、分岐において親枝より子枝が細くなり、断面積の和は増加することなど、明らかに法則性のあることも知られている。このように血管系の形態上の特性は、血管系が生体全体のシステムとしての効率に関与し、また血液循環が一時の停滞も無く維持されねばならないことなどを考えると、その機能と密接な関連を持っていると考えるのは当然であろう。このような観点から、血管系の機能を生理学的に大雑把に規定し、それについての最適構造を実際の血管系と比較する。すなわち血管全体の機能は非常に複雑であるが、物質交換に関与する毛細管および血流調節に関与する細動脈は除外して、血流を供給する導管の部分だけを考える。また血流源と血流を供給すべき部位の位置関係、必要な血流量と圧の関係などを拘束条件として与える場合のことを考えると、以下に示すかなり単純化したモデルで血管系の最適構造を取り扱うことができる。

血管系を単なるダクト系と考えるとその最適構造はどのように決まるのであろうか。この点に関し Murray の考え方を示しておく。血管系の中で、循環を維持するために消費されるエネルギーは二つに大別される。一つは血管に一定の流量で血液を流すために要する機械的エネルギーであり、他の一つは、血液を常に新鮮かつ活動的に保っておくために必要な化学的エネルギーである。後者のエネルギーは血液量に比例すると考えられるが、その比例定数がどの程度の値をとるのかは明らかではない。しかし血液が生体にとってかなり高価であり余裕の無いことは、少量の出血によって全身の状態が変化したり、全血液量の40%を失えば死亡することを見ても明らかである。他の組織ではこのようなことはない。

そこで、血管系の評価関数として、両者のエネルギーの和を考え、この評価関数を最小にする構造を最適構造とする。このようにして決まる最適構造のモデルを最小仕事のモデルと呼ぶ。

第2章 既往の研究

さて、この管の評価関数（cost function：CF）は

$$CF = f * \Delta P + kV \quad (2.1)$$

と表わされる．ここで ΔP は管の両端の圧差， f は流量， V は管内の血液量， k は容積当たりの血液の維持エネルギーの比例定数である．管内の流れを層流として Hagen-Poiseuille の法則を用い，管の半径を r ，長さを l とすると

$$\Delta P = \frac{8\eta l}{\pi r^4} f \quad \text{ここで、}\eta : \text{血液の粘性率} \quad (2.2)$$

となる．また

$$V = \pi r^2 l \quad (2.3)$$

ここで l を一定として，(2.2)，(2.3)式を(2.1)式に代入して，CF を r で微分し $dCF/dr = 0$ とおくと

$$f^2 = \frac{\pi^2 k}{16\eta} r^6 \quad \text{または、} \quad f = \sqrt{\frac{\pi^2 k}{16\eta}} * r^3 \quad (2.4)$$

が得られる．すなわち血液の性状が変わらない限り， η, k は変わらないから，評価関数を最小にする構造では f は r^3 に比例していることがわかる．

血管が分岐している場合には，評価関数は単純に各枝についての値の和と考えられるため，各枝が最適条件で分岐していれば，全体として最適である．

いま半径 r_0 の枝が，半径 r_1 ， r_2 の枝に分岐したとすると図 2.1 のように各枝の流量を f_0, f_1, f_2 として (2.4) 式から

$$\frac{r_0^3}{f_0} = \frac{r_1^3}{f_1} = \frac{r_2^3}{f_2} \quad (2.5)$$

となる．また

$$f_0 = f_1 + f_2 \quad (2.6)$$

より

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3 \quad (2.7)$$

を得る．Murray はさらに分岐角の関係について解析し

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{r_0^4 + r_1^4 - r_2^4}{2r_0^2 r_1^2} \\ \cos \theta_2 &= \frac{r_0^4 + r_2^4 - r_1^4}{2r_0^2 r_2^2} \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \frac{r_0^4 - r_1^4 - r_2^4}{2r_1^2 r_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

を得ている。

以上の得られた結果を実際の血管と比較してみる。血管系の分岐構造に関する解剖学的性質として、D'Arcy Thompson による次のような記述がある。

- (1) 血管が親枝から子枝に分岐するとき、親枝の断面積は子枝の断面積の和より小さい。
- (2) 子枝の断面積が等しいとき、それぞれの親枝に対する分岐角は等しい。
- (3) 片方の子枝の管径が他方より小さいとき、その子枝の親枝に対する分岐角は他方のそれより大きい。

これらの定性的な性質は、ほぼすべての血管系について、よく観察される事実である。上述した血管系の最適構造から得られた関係式 (2.7) から容易に

$$r_0^2 \leq r_1^2 + r_2^2 \quad (2.9)$$

を得るが、これは記述(1)に相当している。

また (2.8) 式で、 $r_1^2 \geq r_2^2$ とすると $\theta_1 \leq \theta_2$ を得ることができ、これは記述 (2), (3) に一致するものである。以上のように最適分岐構造の関係(2.7), (2.8) 式は定性的にも実際の血管の性状をよく表わしているものと理解される。

そこで特に (2.7) 式 (または (2.4) 式) に関して統計的な性質について検討してみる。

人のいろいろな器官の血管分岐についての統計から、親枝の半径 r_0 と子枝の半径 r_i の間に

$$r_0^n = \sum r_i^n \quad (2.10)$$

なる関係式を仮定して、統計学的に n の平均値 $\bar{n}$ を求めた。各臓器ごとに $\bar{n}$ の値は多少の差異が見られたが、測定誤差 (半径の測定はアクリル樹脂注入によって行っている) からみて動脈系では、 $\bar{n} = 2.7$ を得ている。このように解剖・病理学的な推計からも、 $f \propto r^{2.7}$ が示され、理論的に導出された $f \propto r^3$ とよく一致していることがわかる。

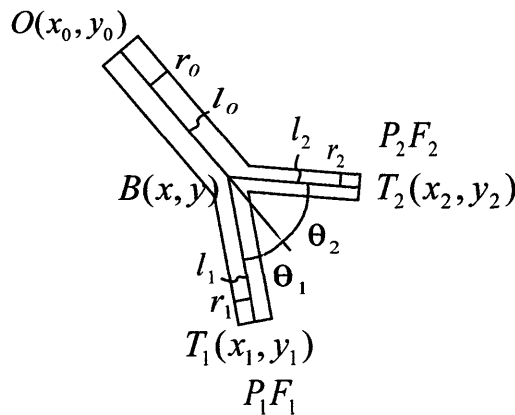


図 2.1 2 分岐構造モデル

2.3.2 河川の形状（数学的による）

抽象パターンは、いたずら書きや美術から生まれようと、あるいは数学的解析から出たものであろうと、自然が物理的システムの相互作用によって展開しているパターンなのである。すべてのパターンは芸術家が描こうが、数学者が計算しようが、自然力が生み出そうが、同じ空間的環境によって形成されるのである。すべては空間という暴君に服するものである。線と点の合成パターンはそれぞれ理にかなっているのだが、より重要なことは、すべての事物が避け難くも担っている秩序を雄弁に物語っているということである。

雨がなだらかに傾斜した地形に様に降っているとき、流れのネットワークにはどんな種類のものができらうか。この問いには、正確な解を与えることはできない。なぜなら、流れのネットワークでは多くの因子、地形、灌漑、降雨量の相違、岩石学、流れの屈曲部に働く遠心力などが流れの方向に影響を与え、しかも、これらの因子が互いに複雑な形で関連しているためである。しかし、生じてくるネットワークを厳密には予測できなくとも、我々はまったく閉塞状況に陥っているわけではない。もしも、様々な点における流れの向きがランダムに決められているのなら、ネットワークの一般的特性を記述することができる。もう少し詳しくいえば、流れの人口パターンをつくることによって、流れのネットワークについての一般的な記述を入手できるのである。

たとえば、相等しい六角形のモザイクを描いてから、一組の乱数（ π の数列のような）を使って六角形群内部における流れの向きを決めるとすれば、ランダムに決められたそれらの流れは大部分、自動的に繋がりがあってひとつの分岐ネットワークをつくっていくであろう。こうして得られる分岐パターンは、より大きな数列を用意してより多くの数字を使いさえすれば、いかなる向きにも限りなく拡張していくことができる。

ホーント解析という、河川系を解析する方法がある。この方法では、河川系を、高次の流れは低次の流れによってのみ維持しようという規則に従って、一次系、二次系、三次系・・・と分割する。こうして、一次流はひとつの源から発して他の流れを受け入れることがなく、二次流はふたつの一次流の交わりに発して一次流しか受け入れず、三次流はふたつの二次流の交わりに発して二次流しか受け入れない、等々。現実の河川流域では、一次流の数はより高次の流れの三ないし五倍にも上ることがわかっている。いいかえれば、ある任意のネットワークにおいて、通常、一次流の数は二次流のおよそ四倍あるというようになっている。先に得られた分岐パターンにより作られたモデルからは、これに一致する結果が得られる。

この分岐パターンにはもうひとつ別の形式的な傾向のあることに気付く。すなわち、より高次の流れはより低次の流れよりも長くなろうとする。これも現実の河川について見られる傾向である。水文学者たちは、このことを使ってある流域の支流全部をあわせた全長がいくらになるか、その次数さえ決定できれば計算することができるのである。

そのような推定に基づいて、全米における河川系の全長が 325 万マイルである、と主張されている。ホーントは、流域面積もまた流れの次数に関連していて、河川の本流の長さ L は、平均してその河川の流域（放流区域）面積 A をある累乗したものの 1.4 倍になることを見出した。この冪は約三分の二になる。したがって式は

$$L = 1.4A^{2/3} \quad (2.11)$$

となる。

第2章 既往の研究

実際の河川流域についてみると、係数 1.4 は 1 と 2.5 の間、冪数は 0.6 と 0.7 の間の値をとっている。先の分岐パターンはこの制限内にあり、やはり式に従っている。

この経験式における冪数三分の二は、河川の形状についてさらに多くのことを明らかにしてくれる。もしもこの冪数が二分の一で、すなわち、河川系の全長が流域面積の平方根に比例するとしたら、河川流域の形状は河川の大小によらず同一になるだろう。その冪数が二分の一よりも大きく三分の二であるということは、大河の流域は細長くなる一方、小河の流域は太短くなることを示している。こうして、サイズの変化が形状の変化を伴うことがわかる。面白いことに、葉の水循環システムも似たような傾向を示している。すなわち、大きな葉になるほど、より長細くなる傾向がある。大きな細長いバナナの葉は、小さな丸まったブルーベリーの葉と対照的である。

電光の写真を二次元に投影したものをホーント解析してみてもこれらの法則に当てはまり、ホーントの統計的な発見は、河川の流れの機構によるよりも、より一般的な空間の諸性質によるものではないか、と考えられる。支流、血管系、雷の放電に共通に見られるパターン、およびランダムに生成するネットワークは、材料とか力とかが似ているために生じるのではない。この類似はそれらの系のそれぞれに作用場、空間的な設定領域が同じために生じることなのである。

もしもどのネットワークも空間において一様に分布すべきだとしたら、それは外周を扇型に広げた形、すなわち空間自体が末広がりになる仕方に直接対応した形になるに違いない。分岐ネットワークでは、そのような末広がりとは大きな数の小流の展開となって姿を見せる。このネットワークは、そういう小さな流れの幾つかが延長することによって生長するが、こうして延長した流れもまた、末広がりになるか、羽根を広げたようになってそれ自身の流れをつくっていく。こうしてひとつの階層的な分岐構造が発生し、ここでは常に、小さな分岐はより大きな分岐よりも数において優るのである。

2.3.3 樹木のモジュール性

樹木の形態と資源獲得とのつながりについて「樹木がいかに光をとらえ、光合成産物を得るか」ということは重要な点である。しかし当然のことであるが、光合成産物を得るだけでは十分ではなく、得られた光合成産物を樹木の成長や繁殖などの活動に役立てることが必要である。そのためには、光合成を行う器官（ソース）で得られた光合成産物を、成長や繁殖などの活動をこれらの光合成産物を使って行う樹木の部位（シンク）に輸送しなければならない。具体的には、光合成産物を成長に役立てるのであれば梢端部や根茎などの分裂組織へ、繁殖に役立てるのであれば花芽や果実などの繁殖器官へ送る必要がある。

光合成産物を輸送する植物体の仕組みについては、主に草本植物を材料として植物生理学的な立場からその機構が明らかにされてきた。しかしながら光合成産物の輸送パターン、すなわちどのソースからどのシンクに対して、どれだけの光合成産物を輸送するかは、植物の形態やサイズ、環境条件、あるいは生活史戦略などによって異なっていることが知られており、一概に答えることは難しい。特に樹木は他の植物に比べてサイズが大きく、またシンクとソースの両方が樹体のあちこちに分布しているため光合成産物の輸送パターンは複雑になると予想される。樹木の樹体内での光合成産物輸送パターンは果樹栽培などにおいて重要な意味を持つため古くから研究は行われているものの、実際に樹体の中で光合成産物がどこからどこへと輸送されているのかまだ分かっていない部分が多い。

樹体の中での光合成産物の流れについて特に注目したい点は、樹木のモジュール性との結びつきである。樹木は一見ランダムなネットワークにより比規則的な形で成長しているように見えるが、基本単位（モジュール）の繰り返しにより構成されている。モジュールは一つの個体を構成する要素でありながら、それぞれのモジュールがあたかも個体であるかのようにふるまうことが知られている。たとえば HAUKIOJA et al.(1990)は *Betula pubescens* spp. *tortuosa* の葉を切り取り、その枝から翌年に伸びる枝の成長が低下することを示している。また TUOMI et al. (1988a) は、同様に *B. pubescens* spp. *tortuosa* の葉を除去し、その枝につく花芽重量が減少することを示している。樹木全体として考えた場合、一本の枝にある葉が失われたとしても光合成産物の減少量は微々たるものであって、樹木全体が成長や繁殖に配分できる光合成産物の量にはほとんど変化がないだろう。すなわち、葉の切り取りによる光合成産物の減少の影響が樹木全体に及ぶのならば、すべての枝で成長や繁殖がわずかに低下するのみと予測される。しかしながら葉を切り取った枝で成長や繁殖が低下したということは葉の切り取りによる負の影響が樹木全体に及ばず、その枝みにとどまっていることを示している。このようにモジュールは、個体の一部であるにもかかわらず、あたかも個体であるかのように、自律的に振舞っている。

このようなモジュールの自律性の背景として、光合成産物の配分がこれらのモジュール内で優先的に行われている、すなわちモジュールが資源的に独立なユニットなのではないかとの指摘が以前からなされてきた。先に示した葉の切り取りの例でいえば、もし葉を切り取った枝以外の枝から光合成産物が十分に配分されているならば、葉を切り取ったことによる光合成産物の減少を埋め合わせて、翌年の成長や繁殖に影響は現れないか、現れても非常に弱い影響にとどまるだろう。しかしながら、光合成産物量の減少した枝で成長や繁殖が低下するというこれらの結果は、モジュール内で生産された光合成産物が、モジュール内の成長や繁殖に対して優先的に配分されているとすれば、うまく説明できる。

光合成産物がモジュール内で優先的に配分されていることを示す簡単な方法の一つは光合成産物の移動過程を明らかにすることである。しかし残念ながら、光合成産物の移動過程は直接外部から観察することができない。光合成産物の移動を測定する方法として、デンプンあるいは糖類などの経時的な変化量を測定し、移動を推定する手法などがあるが、光合成産物の移動を直接的に測定しているわけではなく、移動

過程の証明としては不十分である。そこで光合成産物の移動を直接測定する方法として、同位体を用いたトレース実験が古くより用いられている。

同位体は同一の元素でありながら中性子の数が異なるために質量数の異なる原子同士をいう。これらの同位体はいずれも質量数以外の化学的性質は同一である。同位体は自然界ではその存在比が地球上の地域、季節、時間、環境に依存せず、ほぼ一定という性質を持つ。たとえば炭素の場合、すべての炭素原子のうち ^{12}C が98.9%、 ^{13}C が約1.1%、その他の同位体はごく微量を占めていて、この値は世界的に同じである。この性質を利用し、ある箇所に自然状態の存在比よりもはるかに高い比率で同位体を含む化合物を与えることで、その行方を追跡するのが同位体トレース実験である。

ヤマハノキを対象に炭素安定同位体 ^{13}C を用いたトレース実験を行った。当年枝、一年枝における光合成産物の輸送過程を明らかにするために、以下の方法で $^{13}\text{CO}_2$ の添加を行った。花芽や果実の ^{13}C の存在比を調べ、これを無処理の花芽や果実（コントロール）の ^{13}C の存在比と比較することで光合成産物の移動を調べた。

実験 A：花芽をつけた当年枝の独立性

1. 花芽をつけた当年枝の葉に $^{13}\text{CO}_2$ を与える
2. 花芽をつけた当年枝に隣接する当年枝の葉に $^{13}\text{CO}_2$ を与える

実験 B1：果実をつけた一年枝の独立性

1. 果実をつけた一年枝由来の当年枝に $^{13}\text{CO}_2$ を与える
2. 果実をつけた一年枝に隣接する一年枝由来の当年枝に $^{13}\text{CO}_2$ を与える

実験 B2：果実成熟に寄与する一年枝上の当年枝

1. 果実をつけた一年枝由来の当年枝のうち、果実に最も近い当年枝に $^{13}\text{CO}_2$ を与える
2. 果実をつけた一年枝由来の当年枝のうち、果実から数えて二番目に遠の当年枝に $^{13}\text{CO}_2$ を与える

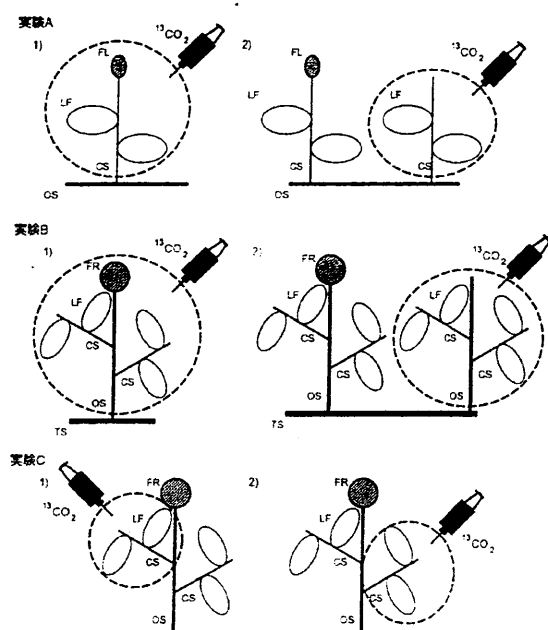


図 2.2 トレース実験設定の模式図

実験 A の結果

花芽を持つ当年枝に $^{13}\text{CO}_2$ を添加したところ、花芽の ^{13}C の存在比はコントロールより有意に高かった。しかしながら、花芽を持つ当年枝に隣接する当年枝に $^{13}\text{CO}_2$ を添加した場合は花芽の ^{13}C の存在比はコントロールと有意な差は見られなかった。これらの結果は当年枝につく花芽には、その当年枝にある葉で生産された光合成産物が投資されていることを示している。

実験 B1 の結果

果実を持つ一年枝に $^{13}\text{CO}_2$ を添加したところ、果実の ^{13}C の存在比はコントロールより有意に高かった。しかしながら、果実を持つ一年枝に隣接する一年枝に $^{13}\text{CO}_2$ を添加した場合、果実の ^{13}C の存在比はコントロールと有意な差は見られなかった。これらの結果は一年枝につく果実にはその一年枝から伸長した当年枝の葉で生産された光合成産物が投資されていることを示している。

実験 B2 の結果

一年枝から由来する当年枝のうち、果実に最も近いものに $^{13}\text{CO}_2$ を添加したところ、果実の ^{13}C の存在比はコントロールより有意に高かった。しかしながら、一年枝から由来する当年枝のうち果実から数えて二番目以降の当年枝に $^{13}\text{CO}_2$ を添加した場合、果実の ^{13}C の存在比はコントロールと有意な差は見られなかった。これらの結果は一年枝から伸びた当年枝のうち、主に果実に最も近い枝で生産された光合成産物が投資されていることを示している。

以上の結果から、ヤマハンノキにおいては花芽生産には、そのつく当年枝上の葉で生産された光合成産物が投資され、果実成熟には、そのつく一年枝から由来した当年枝の中で最も果実に近い枝で生産された光合成産物が投資されていることが示された。この結果はヤマハンノキにおいて繁殖器官への光合成産物の投資が近い範囲で行われていること、そしてその範囲が、樹木のモジュールの一つとしてとらえられてきた当年枝あるいは一年枝といった単位と重なることを示している。

ヤマハンノキ、あるいはその他の樹種において繁殖するモジュールサイズにしきい値がある、すなわちあるサイズよりも小さなモジュールは繁殖を行わないことがわかっている。また同様に、ヤマハンノキやその他の樹種においてモジュール当たりの繁殖量がモジュールサイズに依存している、すなわち大きなモジュールほど多くの繁殖器官を生産していることが示されている。当年枝のサイズが大きいほど多くの光合成産物を得ていると考え、これらの樹種においては繁殖器官への投資は当年枝の獲得する光合成産物量に依存することを示している。これらの結果は、今回の炭素安定同位体トレース実験によって示された当年枝、あるいは一年枝レベルの自律的な配分という結果を支持するものと考えられる。

しかしながら、単純に今回の結果のみからヤマハンノキの当年枝が繁殖において資源的に独立していると結論づけることはできない。というのは植物が利用可能な光合成産物は投資の当年に生産されたもののみではなく、過去に生産され、一度樹体の各部で蓄積されていた光合成産物も存在するからである。残念ながら今回示したような実験では、過去に蓄積された光合成産物がどのように繁殖器官に投資されているかは明らかにできない。MIYAZAKI et al. (2002) は種子生産量が年によって大きく変動する高木種のハクウンボクにおいて、豊作年には繁殖枝内に蓄積されたデンプンの量が減少するが、幹内や非繁殖枝ではデンプンの蓄積量に変化が無いことが明らかにしている。これはハクウンボクにおいて、蓄積の光合成産物であってもモジュールが資源的に比較的独立していることを示すものとして注目される。しかしながら、多くの樹種においては蓄積された光合成産物がどの程度、そしてどのような経路で繁殖への投資に使われているかは未だに分かっていない部分が多い。

第2章 既往の研究

さらに、樹木モジュールの繁殖における資源的独立性は常に成り立つものではなく、またすべての樹種において成り立つわけでもないことが示されている。TUOMI et al. (1988b) は *Betula pubescens* において繁殖器官を持つ当年枝の葉を切除して、切除率と繁殖器官重量の減少量との間に相関が無いことを示している。この結果は他のモジュールからの資源流入の存在を示唆する。MIYAZAKI et al. は、ハクウンボクにおいて¹³Cを用いたトレース実験を行い、繁殖枝同士が隣接している場合には、それぞれの枝の間で光合成産物のやりとりはおこなないが、繁殖枝と非繁殖枝が隣接する場合は繁殖器官は非繁殖枝からも光合成産物を得ていることを見出している。

これらの結果から樹木モジュールは繁殖において、ある程度自立した単位であり、モジュール内で生産された光合成産物を優先的に繁殖へ配分する。しかしながら、他のモジュールとの資源配分も無いわけではなく、環境条件や他のモジュールとの位置関係によって配分パターンは変化するものと考えられる。だが、これらの性質を一般化するにはまだまだ知見が不足しており、特に環境条件が変化することで資源配分パターンはどのように変化するのか、などといった点については残念ながら十分なデータがあるとはいえない。

樹木のモジュールが資源的に半自律的にふるまうことの意義については生態学的な観点から幾つか議論されているが、樹体内の資源移動とその生態学的な役割を繋げる研究はまだまだ数が少ない。これらの資源配分様式はモジュールのふるまいを規定し、ひいては樹木の形態に影響を及ぼすものと考えられる。

第3章

樹木について

3.1 概説

本章では、樹木の基本的な特徴・性質について説明する。

樹木が他の植物と違うのは、木質の骨格をつくっている幹と枝である。この丈夫で長持ちする幹と枝の大切な役割は、光の争奪戦で他の小さな植物よりもずっと高いところに葉を広げることである。幹と枝は支柱としての働きのほかに、二つの重要な仕事を行っている。水を根から葉へ送ることと、樹木の中で養分を移動させ、(根を含む)すべての部分を活動的にしておくことである。その構造は単なる水道管以上の、多くの働きができるようになっている。

3.2 では、樹木の成長について、樹木の高さと太さの様々な環境での樹種の具体例を示す。

3.3 では、樹木が成長に関わる内的・外的要因を示す。

3.4 では、樹木の形状の特徴について示す。

3.5 では、根系の支持力と外力との関係を示す。

3.6 では、樹木の上部構造と下部構造の関連性について示す。

3.2 樹木の成長

樹木の成長には、樹種、環境による違いが大きい。熱帯の樹種には1年で背丈が8~9m伸びるものがある。新世界産でニレ科のバスシーダー(*Trema micrantha*)は8年で30mになった(1年で3.75m)。またニューギニアではユーカリの一種カメレ(*Eucalyptus deglupta*)が15ヶ月で10.6mに達したという。最大では、マレーシアで植えられたモルッカカンソー(*Albizia falcata*)の標本で、13ヶ月で10.74m成長したとされる。温帯の樹木は明らかにもっと遅い。イギリスの場合、元気な若木でも普通は年に15~50cm程度である。1日に平均すると1~2mmである。ただし中には年に1.5m伸びるものもあるし、根を張った萌芽のシュートは最初の年に3mくらい伸びる。熱帯と同様に先駆樹種の成長は速く、既存の森林に入ってくる樹種の伸びは遅い。どのような樹種でも年齢によって成長の速さが変わる。背丈が高くなるにつれて成長率は次第に低下して年に数cm程度になり、やがて完全に成長を止める。

また樹木の幹は太りつづけなければならない。木の末端まで水を運ぶには新しい年輪を作る必要があるからである。温帯の樹木の場合、新しい年輪の幅は0.1mmから5~6mm程度。ただし若いジャイアントセコイアなどは成長が速く、毎年の直径成長は数cmにもなる。世界の各地でこれまでに発見された樹種の中で年輪幅のもっとも狭いものは、ナイアガラの断崖に生えているホワイトシーダー、カリフォルニアにあるブリッスルコーンパイン、およびイギリスのヨーロッパイチイで、0.05mmほどである。つまり幹の直径を1mm増やすのに10年かけている。こうした樹木の生育地はいずれも非常に条件の厳しい乾燥した岩石地である。

幹の太さは木の年齢を推定するのにも役に立つ。年輪を数えるのではなく、円周から推定するのである。アラン・ミッチェルが提案した有用な目安によると、温帯樹木の円周(胴回り)成長は空き地で年に2.5cm、林地内では、その半分である。一般的に言えば、若い樹木はこれよりも速く太るし、成熟した樹木ではもう少し遅くなるが、若木や高齢木を除外して平均化すると、この程度になる。もちろん例外もある。

根の伸長生長は吸水や無機塩類の吸収と直接結びついて考えられる。また、形成層による根の肥大成長は、根が地上部を支持する機械的な働きに関係する。地上部の生長は最初根系の生長につづいて起こるが、葉の働きが十分になったのちには、根の生長は地上部の働きに影響されるようになり、生長にともなって両者の生長の相互関係は一層大きくなる。

子葉・幼芽など地上部の組織の発達に先立って幼根ができる。この根ははじめ急速に生長し、地上部の生長に必要な水や養分を吸収する。この根を主根という。主根は速やかに土壌の深部に達し、吸収作用や地上部を支持する働きをする。一般に主根の生長は稚苗時代には各樹種ともにいちじるしい傾向があるが、成木になると林齢の増加とともに伸長生長はおとろえ、また主根は多数の枝根に分岐して主根の主体が不明瞭になる場合が多い。表土が極めて深くて良好な生長条件における各樹種別主根の最大深さは、各樹種とも林齢が5~6年ごろまでは主根が急速に伸長するが、10年以降ではほとんど伸長せず、30年でヒノキ2.5cm程度となる。

樹木の多くは生長にともなって主根から分岐した、側根の生長がいちじるしく、主根と側根が判然とせず、あるいは根系のほとんどが側根で形成されるようになる。側根は順次分岐し、細根は網目状になって土壌中に分布する。側根は主根から直角の角度でできることもあるが、一般には一定の角度で分岐し、その角度は30~80°と、種によってさまざまである。一般に広葉樹は大きく、針葉樹は小さい。針葉樹の中でもモミは分岐が規則的であるが、マツ類は不規則である。このような性質は地上部の枝の分岐特性に類似する。

3.3 樹木の成長に関わる要因

一つは水、もう一つは力学的な強さへの投資にかかわる。ただし両者は無関係ではない。樹木の背丈は水の利用可能性にかなり左右される。木の先端になるほど水の吸収が激しく、水不足が起りやすい。水が不足してくると、水不足が樹高の低いところで起り、頂点の成長が鈍化し、やがて止まる。1本の樹木の最終的な高さと形は、その木が育っている特定の場所の環境によって決まってくる。しかし水分要因だけが樹高の唯一の決定要因ではない。

樹高を制約する二つ目の要因は力学的な強さへの投資と関係している。木が高くなるにつれて、樹体を曲げようとする風の力が基部にきいてくる。したがって下へいくほど幹が太くなっていかないと、急に耐えられなくなる可能性が高い。背丈の高い樹木では、木材への投資が以上に大きくなっていく。これは枝にもいえる。重力による下方への曲げに対抗するには枝を不相応に太くする必要がある。たくさんの葉をつけねばならないが、利益が投資を下回る点がどこかにあるはずである。長い進化の過程を経て、それぞれの地域で育つそれぞれの樹種が最善の妥協点を見出し、遺伝的に決められた正常な最高樹高を持つことになった。これがなぜ遺伝的かといえば、高緯度・高標高の樹種から種子をとって、もっと好条件のところに植えると、その他の同じ樹種ほどには大きくならないからである。若木の肥大成長では、過酷な環境に対抗できる太さを確保するとともに、必要以上に太くする無駄も避けなければならない。そこには微妙なバランスが働いている。

樹木の根系の偏厚生長は根系の支持力と密接な関係がある。樹種によってことなるが、樹齢が高くなると根株に近い部分の太根が偏厚する傾向がある。同じ太さの根でもそれが上下に偏厚した場合には、単純な円形の場合よりも支持力・屈曲抵抗など機械的な働きが大きくなることが知られており、根株付近の太根の偏厚は地上部の支持に大きな役割をもっている。この偏厚部分の組織はいわゆるアデ材で、物理的強度がいちじるしく大きく、幹と根の組織を物理的に接合して根系の支持力を大きくする働きをする。根系の偏厚は一般的に物理的な刺激が大きい部分に発達する傾向があり、地上部の物理的・化学的・生物的刺激に対する根系の適応とも考えられる。

3.3.1 樹木の成長をコントロールするもの

20世紀初頭、ドイツの林学者ビュスゲンとミュンチは、樹木の成長は「内的な性向と外的な影響」に左右されると書いた。木が成長するには、十分な光、水、CO₂、栄養分、それに温和な気候がなければならない。しかし内的な性向も重要である。1本の樹木の内部では限られた資源の利用をめぐる争いがある。樹木の多くの部分が光合成を行い食糧(炭水化物)を生産している。樹木の各部分はこれらの資源を得ようと激しく競争しており、長期の生存を確保するには各部分がバランスよく成長しなければならない。つまり、樹木には高度に組織化された内的な制御システムが備わっている。

a) 内的要因(制御)

樹木には神経系統がなく、活動調整は樹木の中を循環しているホルモン(成長調節因子と阻害因子)が行う。成長調節因子には3つのタイプがあって、さまざまな局面の成長を促進している。すなわち①オーキシシン：主にシュートの先端と葉で生産、②ジベレリン：生産場所はオーキシシンと同じだが根の先端からも出る、③サイトカイニン：とくに根の先端と若い果実で生産される。

また根とシュートは樹木の内的なバランスをはかるうえで重要なものである。シュートは根に食糧を提供し、根はその見返りに水と無機塩類をシュートに提供している。したがってこの二つの部分のバランスが重要となる(根：シュート比と呼ばれる)。根が多すぎると、樹冠が生産する限られた糖類に過大な負担がかかるし、根が少なすぎると樹冠で水分ストレスが起こる。樹木というのは、光、水分、利用可能な養分など周辺の条件に合わせて根・シュート比を微調整する能力を持っている。これは樹木の内部に組み込まれたもので、先に触れたホルモンが使われる。

b) 外的要因

樹木が正常に成長するためには、光、水分、CO₂、養分が適切に供給されていなければならない。どれか一つが欠けても成長は阻害される。樹木は他の植物と同様に、窒素、リン、カリウム、カルシウム、マグネシウム、硫黄などの「主要栄養素」と、鉄、マンガン、ホウ素、亜鉛、銅、モリブデン、塩素などの「微量栄養素」を必要とする。このうちのどれが欠乏しても特徴的な症状を示し、成長が低下する。また植物は失われそうな養分をなんとか回収しようとする。

少なすぎる水(または多すぎる水)も成長を制限する。乾燥と過剰な水はほとんどの樹木の成長を低下させるという点では同等である。事実、水分ストレスの繰り返しは典型的な低木状の外観をつくるのである。CO₂は大気に含まれており、それ自体が成長の制限因子になることはないが、乾燥がその吸収に影響することがある。水分ストレスの植物は水分の損失を少なくする必要から、気孔の開放を制限するが、それはCO₂の吸収を制限することになる。

3.4 樹木の形状

樹形は妥協の産物である。つまり、過度の自己庇陰を避けて葉を展開すること、受粉と種子の散布に向いていること、木材構造への投資を最適にすること、周辺の環境に対処すること、などとの間の妥協である。熱帯では種の数が多いので樹形もすこぶる多様だと思われがちであるが、限られていることを示している。妥協の姿をこれだと指摘するのは容易ではないが、大まかな一般化は可能である。高緯度や高山に生育している針葉樹は典型的な鋭い円錐形で、しばしば下にたれた枝を持ち、雪を落とすのに役立っている。この形は水平線を低くめぐる太陽の光を最大限につかむのに好都合である。乾燥地にある針葉樹も同じような形をしているが、この場合は、暑い昼間の受光量（熱）を最小限にして冷却に要する水損失を少なくしているかに見える。これと対照的に、ほとんどの広葉樹とトウヒ類やもみ類に見られる幅の広い樹冠は、湿った土地、深い日陰（広い樹冠は最大限に光をとられる）、あるいは厳しい高木限界の環境（体を低くして風を避ける）と関係している。光が分散していて、実際に空のどこからでもくるような曇りがちの気候では、これが受光に適した形である。イギリスの気候は年中湿度が高く（曇りがちで）あるため、樹木の大部分は同じような球状の形になる。サバンナ気候に育つマツ類は、地中海地方のマツカサのように、先端が平らで傘のような形をしていて、乾燥した風を避けることができ（翼型の樹冠は葉がそれぞれの背後に隠れ風よけになる）、また樹冠を自由に流れるため、その対流で熱が逃げやすくなる。

樹木は環境に適応して種類ごとに特徴的な形をもつのは事実だが、同じ種でも個別的に見るとそれぞれの条件によって形を異にしている。個々の樹木の形が環境に対応して変化するのは明らかである。光、風、雪、動物による食害、火、根の健康、その他多くの因子が樹形に影響する。たとえば開放地に生育する樹木は、広がった枝をもち藪のような樹冠になるが、日陰に育ったものは、光に届こうとして樹高が高くなり、横に出る枝が少ないため幅が狭くなる。山地にいくと、気候が樹形に及ぼすさまざまな影響がよくわかる。

しかし樹木は環境によってその形を変えさせられるにしても、いつも受け身というわけではなく、自らも反応している。もし枝がなくなれば貯蔵した芽や不定芽から新しい枝を出すことができる。あるいはまた既存の枝を曲げて方向を変えたり、あるいはそれにもっと重要な役割を割り振ることで、なくした枝の隙間を埋めることができる。同じようなことは樹木が倒れた場合にも完全な形で見られ、一部でも根が残っているかぎり回復を果たす。それまで端役であった側枝が物理的にも新しい主軸となり、寿命を伸ばしていく。最初はミニチュアの樹木として生育を開始するが、やがて独立した樹木が列をなして成長しているようになる。ところで、新しい、あるいは「役割の変わった」枝は実生と同じ形で生育する傾向があり、このプログラム化された成長は同じ形を何度も繰り返すことから「反復」と呼ばれる。

3.5 根系の支持作用

根は土壌から養分水を吸収し、物質を貯蔵するとともに地上部を支持する働きをもっている。樹木は地上部重がきわめて大きく、風・雪などの外力の影響も大きいので、根系の支持作用も草本植物にくらべてきわめて大きい。図 3.1 から根系の支持力と外力との関係についてつぎのことが考えられる。

$$M=P(r/2+\angle h)=F(r/2+h)$$

M:根形の支持力。

P:根株にかかる張力。

r:根鉢の深さ。樹種土壌、木の大きさなどによってことなる。

C:根系の支持力の支点。根系によってことなるが、およそ $r/2$ と考えられる。

$\angle h$:根株にワイヤーロープをかけて水平に牽引する場合、P の力が働く作用点の高さ 10~20cm。

F:風心（風力の中心点）にかかる力。

h:地表から風心までの高さ。 $h=h'+(H-h')/3$

h':枝下高。

H:樹高。

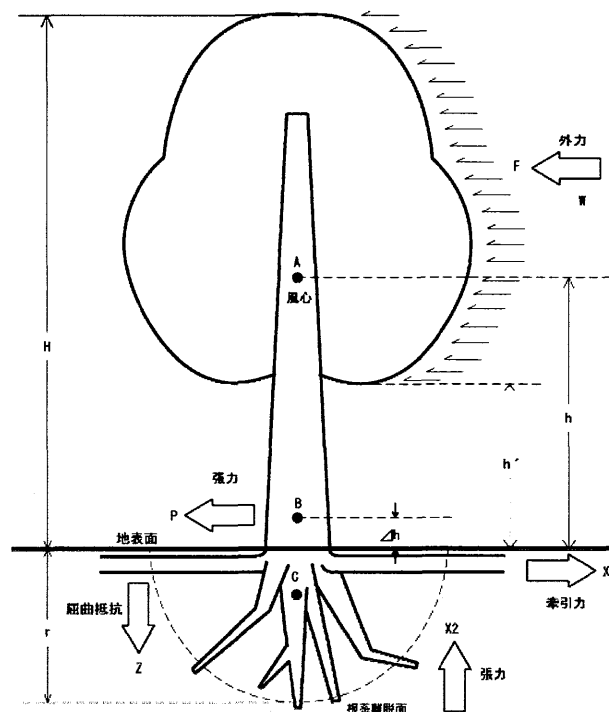


図 3.1 地上部に外力が加わったときの
地上部での抵抗を示す模式図

樹木が倒伏する場合、根系は土壌を抱いて塊状にもちあがって樹木は倒伏する。この場合、外力と支持力が釣り合う点 C（支点）は根鉢の深さの 1/2 付近にあることが推定される。

第3章 樹木について

これは外力に対する根系の牽引力・張力・屈曲抵抗・根鉢外の土壌の圧縮抵抗力などによっている。図 3.1 において、 $F \times (h+r/2) > \text{根系の支持力} \times r/2$ となったとき樹木は倒伏する。ここで、根系の支持力=(根鉢の土壌重量+根鉢表面土壌の粘着力+根系のせん断力+根系の摩擦抵抗) $\times r/2$ と考えられる。根系の支持力は根系の各種の抵抗力と根鉢の重さと抵抗力の統合されたもので、根系の構造・形態・分岐性・根の材質・靱皮繊維の強さなど各種の因子がこれに関係している。

根の構造上の相違とともに根の分布様式や細・小・中径根などの分岐のちがいが、根系の機械的働きのうえで大きな効果をもっている。一般に水平根だけで根系の形態が特徴づけられる浅根性樹種よりも、土壌深部にまで垂下根・斜出根が発達する深根性樹種のもののほうが地上部に加えられた外力に対する抵抗力は大きいといえる。

一般に広葉樹類は針葉樹よりも支持力が大きいといわれる。これは針葉樹の根系分岐が疎で抜根時根系と土壌との摩擦抵抗が小さく、このため抜根時の根鉢が小さくなることと、根系のせん断力が広葉樹よりも一般に小さいことによっており、逆に広葉樹は分岐が密で、根鉢が大きく、せん断力も大きいことによっている。しかし、針葉樹の中でも主根の発達がいちじるしいものは支持力が大きく、広葉樹類でも根系分岐が疎放で、根の材質が弱いものは支持力が小さい。

根株付近を水平に引く方法と上に引く方法を比べると、垂直に上に引く方が小さい力で抜根できることがわかった。一般に樹木に直角に働く場合が多く、上に引き上げるような力は働かない。根系は水平または下方に発達しており、水平に引いた場合は側根の引っ張り抵抗や垂下根の折れ曲がり抵抗などが合成されて大きな抵抗力となるが、上方に引いたときは垂下根がそのままの形で引き抜かれるため張力は小さくなる。

3.6 樹木の上部構造と下部構造の関係

樹木の各部分が全重の中で占める割合は、幼齢木では葉や細根、小径根など働き部分の割合が大きいが、これらは樹木の生長にともなってしだいに減少する。一方、幹や特大根など蓄積部分の割合は、樹木の生長にともなってしだいに増加する。このように、地上部と地下部の「働き部分」と「蓄積部分」の各々の間で明瞭な対応がみとめられた。

生長にともなう樹木の部分重の割合の変化は「働き部分」と「蓄積部分」ではまったく逆の関係がみとめられたが、地上部重と地下部重の間には図 3.2 で見られるような一定の関係がみとめられ、樹木が生長してもこの関係は大きく変化せず、ほぼ直線的に推移した。図 3.2 からあきらかなように、地上部の割合は大径になるとやや増加するが、全重のほぼ 80%程度であった。

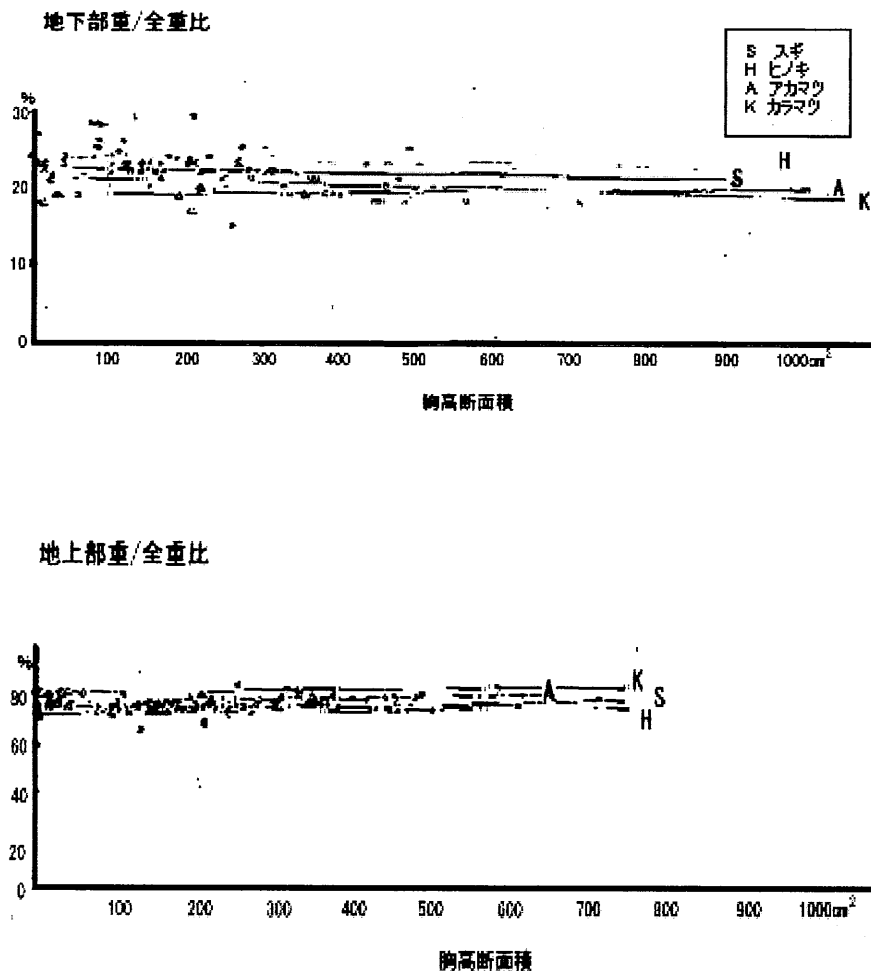


図 3.2 全重に対する地上部、地下部の割合

第4章

解析手法

4.1 概説

本章では、本研究で用いた解析手法について説明する。地震動に対する構造物の挙動を解析するための地震応答解析の終局的な目標は、その解析結果によって構造物の耐震性の判定を行うことにある。

構造物が、地震や風などの外的な力により影響を受ける場合、その構造物の揺れの状況は、外部の力と構造物自体の性状とのそれぞれの相関的なもので決まる。いいかえれば、構造物のそのときの揺れる状態は振動問題として捉えることができるが、この振動問題は外的な力（これは地震や風の振動による性質を持つ物理的な強さを持つ）の振動因子が、構造物の振動特性にからみあう複雑な相互作用の結果を論じる問題を考えることに帰着する。

振動解析には、固有振動特性を求める固有値解析と動的荷重による応答を求める時刻歴応答解析がある。固有値解析では、固有値、すなわち固有振動数と固有振動モードが求められる。これらは振動問題を検討する上で最も基本的な情報である。時刻歴応答解析では、時々刻々の応答（応力、変位など）が求められる。

4.2 では、梁の要素マトリックスの定式化を示す。

4.3 では、数値積分法の線形加速度法について示す。

4.4 では、固有値解析についての基本的な流れを示す。

4.5 では、時刻歴応答解析についての基本的な流れを示す。

4.2 梁の要素マトリクスの定式化

4.2.1 軸方向変形に対する要素剛性マトリクス

図 4.1 は要素の軸方向変形を表わす。要素の長さを l 、節点の記号を i, j 、要素内の、任意点の座標を x 、座標 x 点の材軸方向変位を $u(x)$ 、要素両端の変位を u_i, u_j で示す。

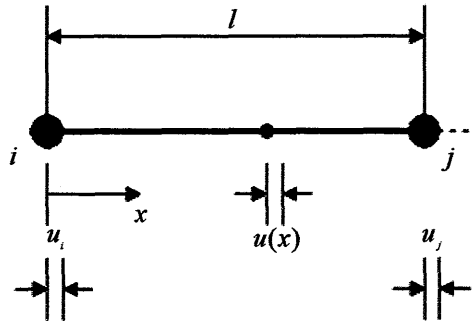


図 4.1 部材の軸方向変形に関する要素

要素剛性マトリクスを求める手順として、まず要素内の変位分布を補間関数を用いて節点変位で表す。この場合、要素内の軸方向の変位が線形に変化すると仮定すると

$$u(x) = c_0 + c_1 x \quad (4.1)$$

ここに、 c_0, c_1 は未定係数であり、節点変位との関係は次式となる。

$$\begin{aligned} u(0) &= c_0 = u_i \\ u(l) &= c_0 + c_1 l = u_j \end{aligned} \quad (4.2)$$

マトリクスで表すと

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

上式を解くと

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

上式を (4.1) 式に代入すると、

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (4.5)$$

ただし、 $\mathbf{N}$ と $\mathbf{d}$ は次のようになる。

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

以上より、要素内の変位分布 $u(x)$ が節点変位 u_i, u_j で表せる。

次に、軸方向変形に対するひずみ－変位関係式は、

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.7)$$

上式に (4.5) 式を代入すると次式となる。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{d} = \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (4.8)$$

ただし、ひずみ－変位マトリクス $\mathbf{B}$ は、

$$\mathbf{B} = \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right] \quad (4.9)$$

となり、軸方向変形に対する応力－ひずみ関係式は次式となる。

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (4.10)$$

ここに、ひずみエネルギーは次式となる。

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_x E \varepsilon_x d\Omega \quad (4.11)$$

(4.11) 式に (4.8) 式を代入すると、

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\int \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dy dz \right) dx = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

よって、軸方向変形に対する要素剛性マトリクスは次式となる。

$$[\mathbf{K}] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

4.2.2 曲げ変形に対する要素剛性マトリクス

図 4.2 は、要素の曲げ変形を表す。図では、要素内部の任意点のたわみを $v(x)$ 、要素両端節点でのたわみを v_i, v_j 、また、両端節点でのたわみの x に関する回転角（微分値）を θ_i, θ_j で表している。

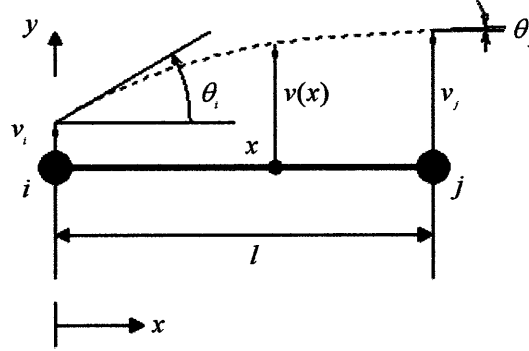


図 4.2 部材の曲げ変形に関する要素

要素内の変位分布を 3 次の多項式で近似する。

$$v(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \quad (4.14)$$

ここに、 $c_0, \dots, c_3$ は未定係数を表す。上式を x で微分すると、

$$\theta(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 \quad (4.15)$$

節点変位と未定係数の関係は、

$$\begin{aligned} v(0) &= c_0 = v_i \\ \theta(0) &= c_1 = \theta_i \\ v(l) &= c_0 + c_1 l + c_2 l^2 + c_3 l^3 = v_j \\ \theta(l) &= c_1 + 2c_2 l + 3c_3 l^2 = \theta_j \end{aligned} \quad (4.16)$$

この関係をマトリクスで表示すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

上式を解くと、次式となる。

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{1}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

上式を (4.14) 式に代入すると次式のように要素内の変位分布を節点変位で表すことができる。

$$v(x) = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (4.19)$$

ただし、 $\xi = l/x$ で表すと、 $\mathbf{N}$ と $\mathbf{d}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 & l(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 3\xi^2-2\xi^3 & l(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \\ \mathbf{d} &= [v_i \quad \theta_i \quad v_j \quad \theta_j] \end{aligned} \quad (4.20)$$

ベルヌーイ-オイラーの仮定より、 x 点の断面上の x 方向変位は次式となる。

$$u(x, y) = -y\theta(x) \quad (4.21)$$

(4.7) 式よりひずみ-変位関係式は次式となる。

$$\varepsilon_x = -y\theta'(x) \quad (4.22)$$

なお、断面剛の仮定より、 $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$ であり、また $\gamma_{xy} = 0$ となる。

(4.22) 式と、(4.19) 式を代入すると、

$$\varepsilon_x = -y\mathbf{N}'\mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (4.23)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -y\mathbf{N}' \\ \mathbf{N}' &= \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2} = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} -6+12\xi & l(-4+6\xi) & 6-12\xi & l(-2+6\xi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

ひずみエネルギー (4.11) 式に (4.23) 式を代入すると、

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \varepsilon_x E \varepsilon_x d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^l (\int_A \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dy dz) dx = \frac{1}{2} [v_i \quad \theta_i \quad v_j \quad \theta_j] \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & sym. \\ 6l & 4l^2 & & \\ -12 & -6l & 12 & \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

したがって、曲げ変形に対する要素剛性マトリクスは次式となる。

$$[\mathbf{K}] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & sym \\ 6l & 4l^2 & & \\ -12 & -6l & 12 & \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

4.2.3 全体座標系への変換

上記の式(4.13)と式(4.26)と組み合わせると、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \\ M_i \\ f_j \\ g_j \\ M_j \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

あとの処理のためには、これを3行3列ずつまとめて(言い換えれば節点番号ごとにまとめて)次のように表現しておくと便利である。

$$[K_{ii}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad [K_{ij}] = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$[K_{ji}] = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \quad [K_{jj}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$u_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad u_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad f_i = \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \\ M_i \end{bmatrix} \quad f_j = \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \\ M_j \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

これを用いれば、式(4.27)は次のように書ける。

$$\begin{cases} [K_{ii}]u_i + [K_{ij}]u_j = f_i \\ [K_{ji}]u_i + [K_{jj}]u_j = f_j \end{cases} \quad (4.31)$$

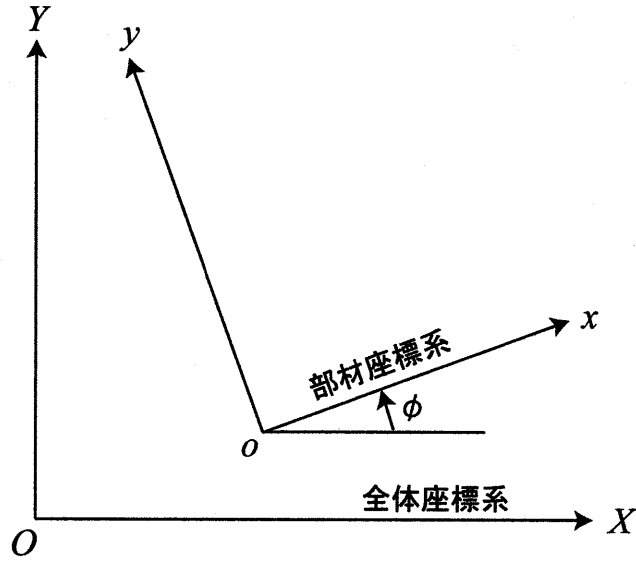


図 4.3 部材座標系と全体座標系の関連

これを全体座標系の方程式に直すには、座標変換の公式

$$\begin{cases} u = U \cos \varphi + V \sin \varphi \\ v = -U \sin \varphi + V \cos \varphi \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\begin{cases} f = F \cos \varphi + G \sin \varphi \\ g = -F \sin \varphi + G \cos \varphi \end{cases} \quad (4.33)$$

を用いればよい(角度の向きは図 4.3 参照. 回転角 θ およびモーメント M はどちらの座標系を用いても同じ値になるので変換の必要はない).

これをまとめてマトリクスの形で表すと次のようになる.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ \theta \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} f \\ g \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \\ M \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

すなわち

$$u = [T]U \quad (4.36)$$

$$f = [T]F \quad (4.37)$$

ただし $[T]$ は座標変換マトリクス

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

である。これを用いて式(4.28)~式(4.30)を置き換えると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} [K_{ii}][T]U_i + [K_{ij}][T]U_j &= [T]F_i \\ [K_{ji}][T]U_i + [K_{jj}][T]U_j &= [T]F_j \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

この両辺の両辺に左から $[T]^T$ の転置マトリクス

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

を掛けると、マトリクス $[T]$ は $[T]^T$ と掛け合わせると単位マトリクスになる。
すなわち

$$[T]^T [T] = [I] \quad (4.41)$$

という性質があるので、

$$\begin{aligned} [T]^T [K_{ii}][T]U_i + [T]^T [K_{ij}][T]U_j &= F_i \\ [T]^T [K_{ji}][T]U_i + [T]^T [K_{jj}][T]U_j &= F_j \end{aligned} \quad (4.42)$$

ここで

$$\begin{aligned} [K_{ii}] &= [T]^T [K_{ii}][T] & [K_{ij}] &= [T]^T [K_{ij}][T] \\ [K_{ji}] &= [T]^T [K_{ji}][T] & [K_{jj}] &= [T]^T [K_{jj}][T] \end{aligned} \quad (4.43)$$

とおけば、全体座標系で表わした部材方程式は結局、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} [K_{ii}]U_i + [K_{ji}]U_j &= F_i \\ [K_{ji}]U_i + [K_{jj}]U_j &= F_j \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

4.2.4 質量マトリクスの定式化

質量の要素 m_{ij} は、座標 j の単位加速度によって生じる座標 i での負の方向の慣性力として定義される。この量は、座標 i と j の質量連成とみなされる。要素 m_{ij} は次式で与えられる。(参考図 4.1)

$$m_{ij} = \int \gamma \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\mathbf{v} \quad (4.45)$$

ここで $\gamma = \gamma(x, y, z)$ は単位体積当たりの質量で、 $d\mathbf{v}$ は要素の体積である。

分布慣性力は、反力と値は等しく、符号が反対の節点力で置き換えられる。よって式 (上) から $m_{ij} = m_{ji}$ は明らかで、これは質量マトリクスが対称であることを示している。

次に、要素剛性マトリクスと同様に、要素内の変位を近似し、変位分布を節点変位で表す。

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (4.46)$$

ただし、 $\xi = l/x$ で表すと、 $\mathbf{N}$ と $\mathbf{d}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^3 & l(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 3\xi^2-2\xi^3 & l(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \\ \mathbf{d} &= \begin{bmatrix} v_i & \theta_i & v_j & \theta_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.47)$$

このときの分布質量は、

$$m_{ij} = \gamma a \int_0^l \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\xi \quad (4.48)$$

ここで、 a は梁の断面積である。

(4.47) 式を (4.48) 式に代入すると、梁に対する要素質量マトリクスが得られる。

$$[\mathbf{M}] = \frac{\gamma a l}{420} \begin{bmatrix} 156 & & & \\ 22l & 4l^2 & & \\ 54 & 13l & 156 & \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ sym \end{matrix} \quad (4.49)$$

4.2.5 減衰マトリクスの定式化

有限要素法における離散化された運動方程式は、一般的に次のように表すことができる。

$$[K]\{u\} + [C]\{\dot{u}\} + [M]\{\ddot{u}\} = \{f\} \quad (4.50)$$

ここに、 C は減衰マトリクスである。

周波数応答解析の場合には、複素減衰を用いることによって材料の内部減衰を考慮するのが一般的である。しかしながら、時刻歴応答解析においてはこのような方法は適用できないため、質量マトリクス $[M]$ と剛性マトリクス $[K]$ の関数として与えることが多い。これを比例減衰といい、以下はレイリー減衰と呼ばれ、広く用いられている。

$$\begin{aligned} C &= \alpha[M] + \beta[K] \\ \alpha &= 2\omega_1\omega_2(h_1\omega_2 - h_2\omega_1)/(\omega_2^2 - \omega_1^2) \\ \beta &= 2(h_2\omega_2 - h_1\omega_1)/(\omega_2^2 - \omega_1^2) \end{aligned} \quad (4.51)$$

ここに、 ω_i, h_i は、 i 次の固有振動数と減衰定数である。

4.3 数値積分法

地震動のような不規則な外乱を受ける構造物の動的応答を解析するためには、微小な時間間隔ごとに運動方程式を数値的に積分して解を定めてゆく数値積分法 (numerical integration) が多く用いられる。

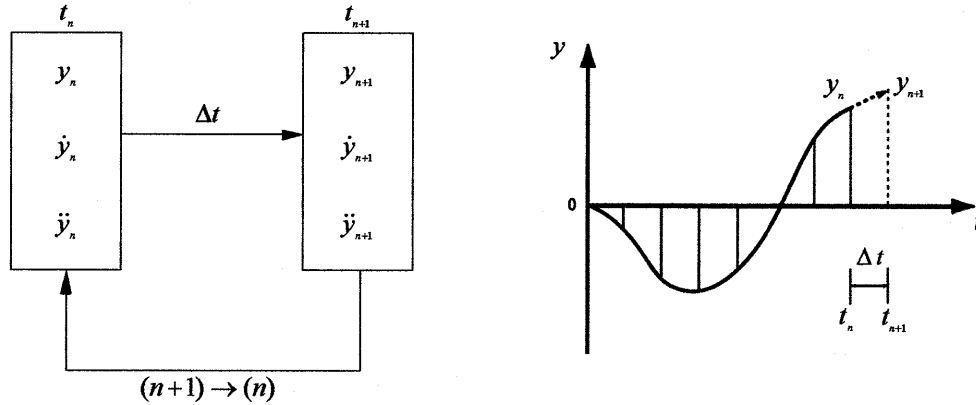


図 4.4

この方法は、図 4.4 に示すように、時刻 t_n までの応答状態 $\{y_n\}, \{\dot{y}_n\}, \{\ddot{y}_n\}$ が分かっているとき、微小な時間 Δt 後の時刻 t_{n+1} における状態 $\{y_{n+1}\}, \{\dot{y}_{n+1}\}, \{\ddot{y}_{n+1}\}$ を近似的に推定し、この操作を順次繰り返して step by step に解を求めてゆくものである。

激震をうける構造物の非線形応答のように復元力特性が応答履歴に応じて複雑に変化する場合でも、微小区間ごとに動特性の変化を考慮することにより、順次解を求めてゆくことができる。数値積分法については古くから様々な方法が考えられているが、ここでは地震応答解析にしばしば用いられる加速度法について考える。

数値積分法については様々な方法が考えられているが、ここでは本研究で使用している線形加速度法について説明する。

4.3.1 線形加速度法

微小時間内の加速度変化のしかたを仮定することにより、地震応答解析で最も広く用いられる加速度法 (acceleration method) 系の公式群が得られる。

1 自由度系の線形地震応答を考える。

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_0 \quad (4.52)$$

時刻 t_n および $t_{n+1} (=t_n + \Delta t)$ における状態を $y_n, \dot{y}_n, \ddot{y}_n$ とする。 t_n における値は、既知数、 t_{n+1} における値は未知数である。 t_n および t_{n+1} 時刻の地動加速度 $\ddot{y}_{0n}$ および $\ddot{y}_{0n+1}$ はいずれも既知である。

いま、微小区間 Δt で加速度が図 4.5 のように直線的に変化すると仮定する。このとき $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ における加速度、速度および変位は次のようになる。

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}_n + \frac{\ddot{y}_{n+1} - \ddot{y}_n}{\Delta t} (t - t_n) \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \dot{y}_n + \int_{t_n}^t \ddot{y}(t) dt \\ &= \dot{y}_n + \ddot{y}_n (t - t_n) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{y}_{n+1} - \ddot{y}_n}{\Delta t} (t - t_n)^2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_n + \int_{t_n}^t \dot{y}(t) dt \\ &= y_n + \dot{y}_n (t - t_n) + \frac{1}{2} \ddot{y}_n (t - t_n)^2 + \frac{1}{6} \frac{\ddot{y}_{n+1} - \ddot{y}_n}{\Delta t} (t - t_n)^3 \end{aligned} \quad (4.55)$$

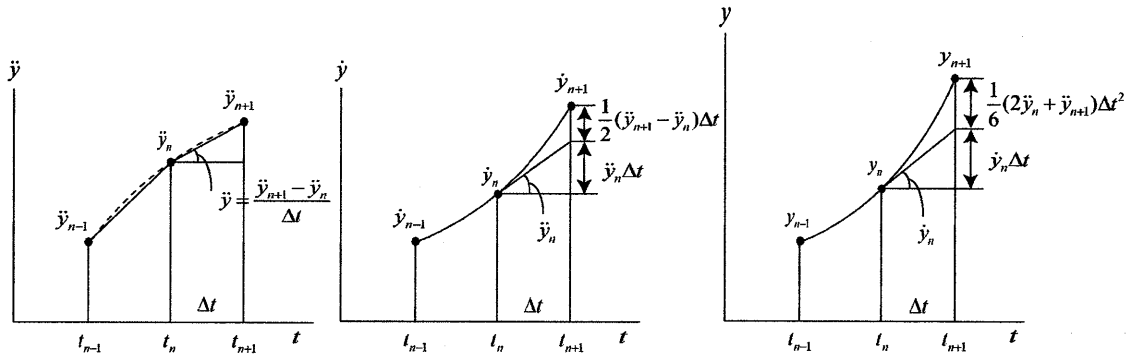


図 4.5

加速度は1次式(線形), 速度は2次式, 変位は3次式で表される。(図4.5) t_{n+1} 時刻の変位および速度 $y_{n+1}, \dot{y}_{n+1}$ は, (4.54), (4.55) 式で $t = t_n + \Delta t$ とおくことにより得られる。また, 振動方程式 (4.52) 式が t_{n+1} 時刻で成り立つ。これから, 次の3つの基本式が得られる。

$$y_{n+1} = y_n + \dot{y}_n \Delta t + \frac{1}{6} (2\ddot{y}_n + \ddot{y}_{n+1}) \Delta t^2 \quad (4.56)$$

$$\dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + \frac{1}{2} (\ddot{y}_n + \ddot{y}_{n+1}) \Delta t \quad (4.57)$$

$$\ddot{y}_{n+1} = -\frac{c}{m} \dot{y}_{n+1} - \frac{k}{m} y_{n+1} - \ddot{y}_{0n+1} \quad (4.58)$$

(4.56) ~ (4.58) 式の線形連立方程式を解くことにより, t_{n+1} 時刻の未知量 $y_{n+1}, \dot{y}_{n+1}, \ddot{y}_{n+1}$ を1ステップ前の t_n 時刻における既知量 $y_n, \dot{y}_n, \ddot{y}_n$ から定めることができる。この方法は, 加速度の変化を線形と仮定していることから, 線形加速度法 (linear acceleration method) と呼ばれる。

4.3.2 加速度による解

(4.56) , (4.57) 式を (4.58) 式に代入し, $\ddot{y}_{n+1}$ について解けば,

$$\ddot{y}_{n+1} = -\frac{\ddot{y}_{0n+1} + \frac{c}{m}\left(\dot{y}_n + \frac{1}{2}\ddot{y}_n\Delta t\right) + \frac{k}{m}\left(y_n + \dot{y}_n\Delta t + \frac{1}{3}\ddot{y}_n\Delta t^2\right)}{1 + \frac{1}{2}\frac{c}{m}\Delta t + \frac{1}{6}\frac{k}{m}\Delta t^2} \quad (4.59)$$

(4.59) 式で求めた $\ddot{y}_{n+1}$ を (4.56) , (4.57) 式に代入すれば $y_{n+1}, \dot{y}_{n+1}$ の値が t_n 時刻の値から定まる. この手順を繰り返して次々に解を求めてゆく.

地震応答計算では初期条件は通常 $y(t=0)=0, \dot{y}(t=0)=0$ とおく. しかし, 地動加速度は一般には $\ddot{y}_0(t=0) \neq 0$ であるから, 加速度 $\ddot{y}$ の初期値は $\ddot{y}(t=0) = -\ddot{y}_0(t=0)$ としなければならない.

次に非線形応答の場合を考えると, 運動方程式は次のようになる.

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + Q(y) = -m\ddot{y}_0 \quad (4.60)$$

この場合, t_{n+1} 時刻でのつり合いは (4.58) 式の代わりに次の式で表される.

$$\ddot{y}_{n+1} = -\frac{c}{m}\dot{y}_{n+1} - \frac{Q(y_{n+1})}{m} - \ddot{y}_{0n+1} \quad (4.61)$$

(4.56), (4.57) および (4.61) の3つの式は, 3元の非線形連立方程式となる. これらを満足する $y_{n+1}, \dot{y}_{n+1}, \ddot{y}_{n+1}$ は逐次近似により定めることができる.

すなわち, $\ddot{y}_{n+1}$ を仮定して (4.56) , (4.57) 式から $y_{n+1}, \dot{y}_{n+1}$ を定め, (4.60) 式に代入して新しい $\ddot{y}_{n+1}$ を求め, これが仮定値と一致するまで反復計算を行う. $\ddot{y}_{n+1}$ の出発値としては, $\ddot{y}_n$ あるいは $2\ddot{y}_n - \ddot{y}_{n-1} (= \ddot{y}_n + (\ddot{y}_n - \ddot{y}_{n-1}))$ が用いられる. $\ddot{y}_{n+1}$ が定まれば $y_{n+1}, \dot{y}_{n+1}$ は (4.56) , (4.57) 式より求められる.

4.4 固有値解析

4.4.1 非減衰自由振動

自由に振動している非減衰系の運動方程式は、

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (4.62)$$

さて、1質点系からの類推によって、多自由度系の自由振動系も、

$$\{x\} = \{x_0\} \sin(\omega t + \theta) \quad (4.63)$$

と仮定すると加速度 $\{\ddot{x}\}$ は、

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{x_0\} \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 \{x\} \quad (4.64)$$

(4.63), (4.64) 式を (4.62) 式に代入すると、以下となる。

$$([K] - \omega^2 [M])\{x_0\} = \{0\} \quad (4.65)$$

a) 固有振動数

(4.65) 式の方程式が意味をもつのは、Cramer の法則より、

$$([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (4.66)$$

が成り立つときだけである。いま、多質点系の自由度が n とすれば、行列式 (4.66) を展開すれば、振動数パラメータ ω^2 に関する n 次の代数方程式が得られる。この代数方程式の n 個の根が、この系における可能な n 個の振動モードの振動数を表すものと考えられる。

b) 固有モード

(4.66) 式より固有振動数が定まると運動方程式 (4.65) は、

$$([K] - \omega_n^2 [M])\{x_0\}_n = \{0\} \quad (4.67)$$

と表される。すなわち (4.67) 式は、固有振動数の個数分 n 個求まる。ただし、 ω_n の値は (4.66) 式より求められるから、(4.67) 式で求まる n 元の連立方程式は恒等的に成り立ち、このままでは $\{x_0\}$ の値を決めることはできない。しかし、 $\{x_0\}$ の1つの値を単位変位として形状を決定すれば、他の $n-1$ 個の値は求まる。そのようにして求めたものが、固有モードである。固有モードは1次数あたり n 個の素数を持ち、 n 次分求まることになるから、一般に $n \times n$ の正方行列で表現され、 $[\Phi]$ と表される。

4.4.2 一般固有値問題

N 自由度系で考える前に，2 自由度非減衰系で，外から何の作用も受けない自由状態であるときの力の釣り合いを例に考える．力の釣り合いは，自由度と同数だけ成立する．外力が作用しないから，系に作用するのは内力だけであり，減衰がないので内力は慣性力と復元力だけである．

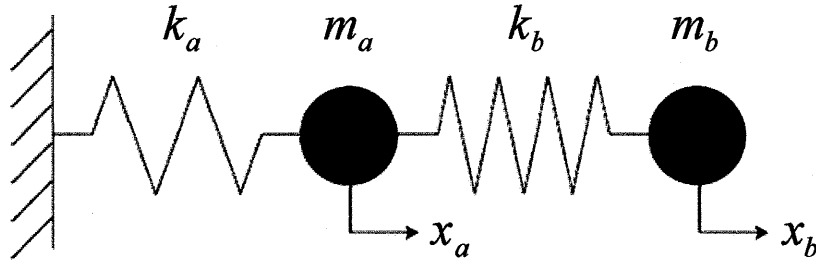


図 4.6

慣性力は質量の加速度に比例し，復元力はばねの相対変位に比例する．各々の作用点で力は釣り合っているので，

$$\left. \begin{aligned} m_a \ddot{x}_a + (k_a + k_b)x_a - k_b x_b &= 0 \\ m_b \ddot{x}_b - k_b x_a + k_b x_b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.68)$$

これが図 4.6 の系の力の釣り合い式であり運動方程式である．これをマトリクスで表せば，

$$\begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_a \\ \ddot{x}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_a + k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_a \\ x_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

となる．次に式(4.68)を解くことを考える．系の振動は系全体が協調して起こる一体現象であるから，全体の振動数は同一になると考えられる．そこで，式(4.68)の解を，振動を表す複素指数関数で仮定して，

$$\begin{cases} x_a = u_a e^{j\Omega t} \\ x_b = u_b e^{j\Omega t} \end{cases}, \quad \begin{cases} \ddot{x}_a = -\omega^2 u_a e^{j\Omega t} \\ \ddot{x}_b = -\omega^2 u_b e^{j\Omega t} \end{cases} \quad (4.70)$$

式(4.68)に式(4.69)を代入すれば

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_a + k_a + k_b & -k_b \\ -k_b & -\omega^2 m_b + k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

式(4.71)が成立するためには

$$\begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad \text{行列} \begin{bmatrix} -\omega^2 m_a + k_a + k_b & -k_b \\ -k_b & -\omega^2 m_b + k_b \end{bmatrix} \text{の行列式が}$$

零のときである．

前者は系が静止状態のときを表すので，動力学上意味がない．そこで，後者の「行列式が零」の式を適用すると

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 m_a + k_a + k_b & -k_b \\ -k_b & -\omega^2 m_b + k_b \end{vmatrix} = 0 \quad (4.72)$$

式(4.72)は ω^2 に関する2次多項式である。式(4.72)を展開すると

$$(-\omega^2 m_a + k_a + k_b)(-\omega^2 m_b + k_b) - k_b^2 = 0 \quad (4.73)$$

$\omega^2 = \lambda$ において

$$m_a m_b \lambda^2 - (m_a k_b + m_b k_a + m_b k_b) \lambda + k_a k_b = 0 \quad (4.74)$$

λ に関する方程式を解く,

$$\lambda = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4.75)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} c &= k_a k_b, a = m_a m_b \\ b &= m_a k_b + m_b k_a + m_b k_b \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

$\omega^2 = \lambda$ より λ は必ず正になるので,

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda}, \omega_2 = \sqrt{\lambda} \quad (\omega_1 < \omega_2) \quad (4.77)$$

式(4.74)が成立するときには, 式(4.71)の2式は同一の式になるので, u_a と u_b の両方を決めることはできず, それらの比

$$\frac{u_b}{u_a} = \alpha \quad (4.78)$$

が次のように決まる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{(k_a + k_b - g\omega_1^2 m_a)}{k_b} = \frac{k_b}{(k_b - \omega_1^2 m_b)} \\ \alpha_2 &= \frac{(k_a + k_b - \omega_2^2 m_a)}{k_b} = \frac{k_b}{(k_b - \omega_2^2 m_b)} \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

ここで, 2通りの ω_1 と ω_2 があるので, 2通りの u_a と u_b を添字1, 2によって区別しベクトルで書けば,

$$\left\{ \begin{aligned} \{u_1\} &= \begin{Bmatrix} u_{a1} \\ u_{b1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_1}} \\ \alpha_1 \\ \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_1}} \end{Bmatrix} \\ \{u_2\} &= \begin{Bmatrix} u_{a2} \\ u_{b2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \frac{1}{\alpha_2} \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_2}} \\ \alpha_2 \\ \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_2}} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.80)$$

式(4.75)～(4.79)に示すように、式(4.79)は系固有の性質 m と k だけから決まり、振幅の比すなわち振動の形（モード）を表すので、固有モード（natural mode）という。また式(4.77)の ω_1 と ω_2 は、それぞれの固有モードの振動の速度を角速度で表すので、固有角振動数（natural angular frequency）、これを 2π で割ったものを固有振動数（natural frequency）、その逆数は固有周期（natural period）という。

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (4.81)$$

これまでの2自由度系の理論を一般の多自由度系に拡張すれば

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (4.82)$$

ここで、 $[M]$ は質量マトリクス、 $[K]$ を剛性マトリクス、 $\{\ddot{x}\}$ を加速度ベクトル、 $\{x\}$ を変位ベクトルと呼ぶ。 $[M]$ と $[K]$ はN行の正方対称行列になる。

よって、

$$(-\omega^2[M] + [K])\{u\} = \{0\} \quad (4.83)$$

$\{u\} \neq 0$ より、

$$|-\omega^2[M] + [K]| = 0 \quad (4.84)$$

式(4.84)は、角振動数 ω を求めるための式であるから、振動数方程式（frequency equation）といい、また系の力学的特性

$[M]$ と $[K]$ だけによって構成されるから、特性方程式（characteristic equation）ともいう。式(4.84)は、数学における標

準的な固有値問題（eigenvalue problem） $[A]\{x\} = \lambda\{x\}$ と少し形が違うので、一般固有値問題（generalized

eigenvalue problem）として扱われる。

固有値解析（eigenvalue analysis）を行うことによって固有モードと固有振動数の組が系の自由度と同じ数だけ決まる。これらのうちで、もっとも小さい固有振動数を基本振動数（fundamental frequency）、それに対応する固有モードを基本モード（fundamental mode）という。振動数が小さいほうから r 番目のものを r 次固有振動数、 r 次固有モードという。固有振動数と固有モードの意味について考えると、外作用がない自由な状態で、すべての自由度において常に内力が釣り合いながら振動できる速さと形というのが力の釣り合いから見た物理的意味である。

以上の方法で計算すれば、原理的にはどんな問題でも解けるはずであるが、実際には、この方法では、

- ・ 必要演算回数が多い（特に次数 n が大きい場合に不利）
- ・ 丸め誤差の影響を受けやすい（特に次数 n が大きい場合に深刻）

という欠点があるため小規模の問題にしか適用できない。そこで固有値問題の数学的性質をうまく利用して、効率よく

第4章 解析手法

かつ精度よく計算する方法がいろいろ考案されている。

代表的なものに Jacobi 法，一般化 Jacobi 法，Householder 法，べき乗法，サブスペース法などがある。今回は一般固有値問題に対応していて使用しやすい一般化 Jacobi 法を用いることにする。

4.4.3 一般化 Jacobi 法

$[M]$ と $[K]$ が実対称行列の場合に適用できる．すべての固有値と固有ベクトルを同時に求める方法である．

計算手順を以下に示す．

- 1) 2次元配列 $[T]$ (n 行 n 列)を用意し，そこに単位行列を入れておく．
- 2) 行列 $[M]$ と $[K]$ の非対角成分 m_{ij} , k_{ij} ($i \neq j$)のうちで，絶対値が最大のもの(最大のものが複数個あればそのうちのどれかひとつ)を捜し，両者のうち

$$\frac{|m_{ij}|}{\sqrt{m_{ii}^2 + m_{jj}^2}}, \frac{|k_{ij}|}{\sqrt{k_{ii}^2 + k_{jj}^2}} \quad (4.85)$$

の大きいほうをピボットとし，その行番号を p ，列番号を q とする．

- 3) a, b, c を以下のように定義する．

$$a = \begin{vmatrix} k_{pp} & k_{pq} \\ m_{pp} & m_{pq} \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} k_{pp} & k_{qq} \\ m_{pp} & m_{qq} \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} k_{pq} & k_{qq} \\ m_{pq} & m_{qq} \end{vmatrix} \quad (4.86)$$

2次方程式

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \quad (4.87)$$

を解いてその一つの根を α とし，つぎのように γ を定める．

$$\gamma = \frac{a}{c}\alpha \quad (4.88)$$

- 4) $j = 1, 2, \dots, n$ に対して下記の行間計算をする．

$$\begin{aligned} k_{pj} &\leftarrow k_{pj} + \gamma k_{qj} \\ k_{qj} &\leftarrow k_{qj} + \alpha k_{pj} \\ m_{pj} &\leftarrow m_{pj} + \gamma m_{qj} \\ m_{qj} &\leftarrow m_{qj} + \alpha m_{pj} \end{aligned} \quad (4.89)$$

- 5) $i = 1, 2, \dots, n$ に対して下記の行間計算をする．

$$\begin{aligned}
 k_{ip} &\leftarrow k_{ip} + \gamma k_{iq} \\
 k_{iq} &\leftarrow k_{iq} + \alpha k_{ip} \\
 m_{ip} &\leftarrow m_{ip} + \gamma m_{iq} \\
 m_{iq} &\leftarrow m_{iq} + \alpha m_{ip} \\
 x_{ip} &\leftarrow x_{ip} + \gamma x_{iq} \\
 x_{iq} &\leftarrow x_{iq} + \alpha x_{ip}
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

6) 収束判定

$[M]$ と $[K]$ の非対称成分にまだ絶対値の大きいものがあれば手順2)に戻る.

7) 固有値および固有ベクトル

固有値は以下のようになる.

$$\lambda_1 = \frac{k_{11}}{m_{11}}, \lambda_2 = \frac{k_{22}}{m_{22}}, \dots, \lambda_n = \frac{k_{nn}}{m_{nn}} \tag{4.91}$$

それに対応する固有ベクトルは

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \dots, x_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.92}$$

となる.

4.5 時刻歴応答解析

振動応答解析は、構造骨組を質量とばね、減衰要素からなる多質点系モデルに、地震動の加速度値の変動を表した時刻歴波形を入力して、1/100 秒程度の間隔で運動方程式を解く。この解析から求まる質点の変位、速度や加速度と、ばねや減衰要素に生じる力により建物の挙動を推定するものである。

振動応答解析により求めたい応答量としては、質点の加速度、速度、変位、質点間の層せん断力、層間変位、部材の軸力、せん断力、曲げモーメントなどである。

以下に、線形加速度法による応答値の計算を示す。

(線形加速度法についての詳細は、本章の 4.3.1 参照)

地動加速度 $\ddot{z}$ が与えられたときの運動方程式は、以下となる。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\{\ddot{z}\} \quad (4.93)$$

このとき、時刻 $n+1$ における変位、速度、加速度を以下より求めることができる。

$$\{x\}_{n+1} = \{x\}_n + \frac{1}{6}\{\ddot{x}\}_{n+1}\Delta t^2 \quad (4.94)$$

$$\{\dot{x}\}_{n+1} = \{\dot{x}\}_n + \frac{1}{2}\{\ddot{x}\}_{n+1}\Delta t \quad (4.95)$$

$$\{\ddot{x}\}_{n+1} = [L]^{-1}(-[C]\{\dot{x}\}_n - [K]\{x\}_n - [M]\{\ddot{z}\}_{n+1}) \quad (4.96)$$

ただし、

$$[L] = [M] + \frac{1}{2}[C]\Delta t + \frac{1}{6}[K]\Delta t^2 \quad (4.97)$$

すなわち、(4.94) ～ (4.97) 式を順に、逐次計算を繰り返し、線形加速度法による数値積分計算より多質点の応答値を求められる。

第5章

モデル化の手法

5.1 概説

本章では、本研究に用いたモデル化の手法について述べる。3章で述べた樹木の性質や特徴の中から、力学的に樹木の形状に関わると思われる機能・性質に着目し、それを本研究でモデル化する際の重要な要因の一つとして用いた。

自然界に生育する樹木は、末端の葉における光合成を行うために、多数の分岐により空間的領域に枝をはりめぐらせて、十分な太陽エネルギーを得られるような形態をなしている。形態上樹木全体のシステム構成に関与している枝は、管による水分、養分などの物質輸送機能と、同時に枝の自重、風などによる枝自身の力学的強度（折れにくさ）機能を備えている。

5.2 では、樹木の枝の機能と力学的構造理論の考えより力学的理論式の導く。さらに樹木の枝についての機能からみた最適化構造を理論的に検討し、枝の周径と曲げモーメント、周径と自重、分岐枝長と周径、分岐角度などの関係式を導く。（文献 [1] , [2] の論考より、内容を一部要約する。）

5.3 では、樹木の成長過程を考慮したモデル作成方法を示す。

5.4 では、本研究で検討したモデルの具体的な作成手順を示す。

5.2 樹木の枝の機能と力学的構造理論

樹木の枝の機能は、葉における光合成を効率よくかつ安定した状態で行うために必要な物質輸送機能と枝の力学的強度機能の二点であるといえる。この二点のうち、枝の力学的強度も物質の輸送も枝の太さを必要とすると考えられるが、どちらの機能が重要かと考えると（枝の自重を支える必要の少ないぶどう、藤などの幹は、枝の自重を支えている一般の樹木よりも非常に細いことから）一般の樹木では、力学的強度の要求によって太さが決定されていると考えられる。すなわち枝の重量を支えられるだけの太さがある限り、物質の輸送には十分であると考えられる。このように考えると、枝の構造上において重要な機能は、どの部分でも折れにくさが一様であること、すなわち枝の曲げ応力がどの部分でも一定であることが重要と考えられる。枝は分岐点で応力が最大となり、最も折れやすい構造であり（曲げ応力 $\geq$ せん断応力）、各分岐点での曲げ応力が一定であるといえる。以上のように考えると、樹木の枝の構造は、比較的単純な片持梁の構造理論を適用できる。

ここで、枝を全長 L [cm]、荷重 W [kg]、枝の周径 C [cm] としたとき支持点における最大曲げ応力 σ [kg/cm²] は、

$$\sigma = \frac{1}{2} \times \frac{WL}{Z} = \frac{16\pi^2 WL}{C^3} \quad Z = \frac{C^3}{32\pi^2} [\text{cm}^3] \quad (5.1)$$

枝の比重を ρ [kg/cm³] とすると、

$$W = \frac{\rho}{4\pi} C^2 L \quad (5.2)$$

この2式より曲げ応力 $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ の条件下で W と C の関係、および L と C の関係を求めると、

$$W = \sqrt{\frac{\rho \sigma_0}{64\pi^3}} C^{2.5} \quad L = \frac{\sigma_0}{4\pi\rho} C \quad (5.3)$$

となる。すなわち、支持点で最大曲げ応力が一定という拘束条件を与えると、 $W \propto C^{2.5}$ ならびに $L \propto C$ という構造力学上の制約を受けることとなる。

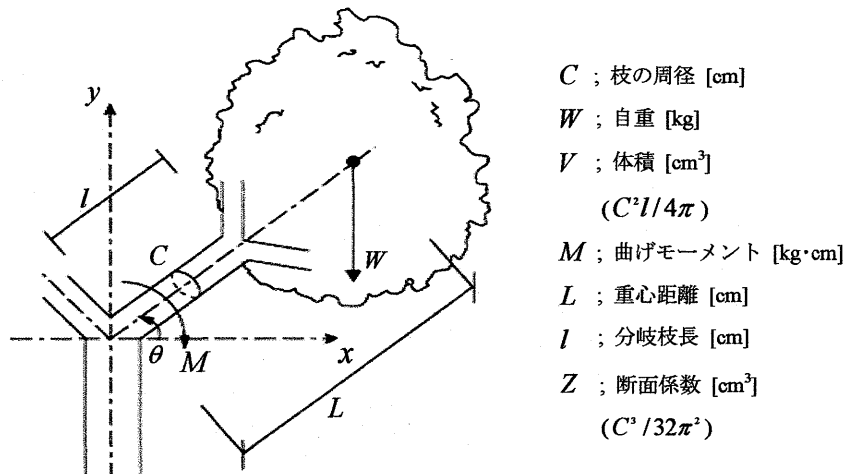


図 5.1 樹木の枝の力学的構造モデル

5.2.1 分岐形状の型の決定

樹木は種類によって様々な形状をしているが、ひとつの分岐点から幾つの子枝が伸びるかということや、それら子枝同士に太さやその後その枝から発生する枝数の多さなどの観点からの主従関係の有無などから大きく幾つかの型に分けることができる（図 5.2）。この中でも、軸有二分岐型は針葉樹に、軸無二分岐型は広葉樹に多く見られる形であり、“木”と聞けばこのどちらかの形を思い浮かべる人がほとんどではないだろうか。

本研究では、角度の規制が無くバリエーションが作りやすいことや、上記の関係式等の検討のための実験の対象に近いという理由により、軸無二分岐型のモデルを使用する。

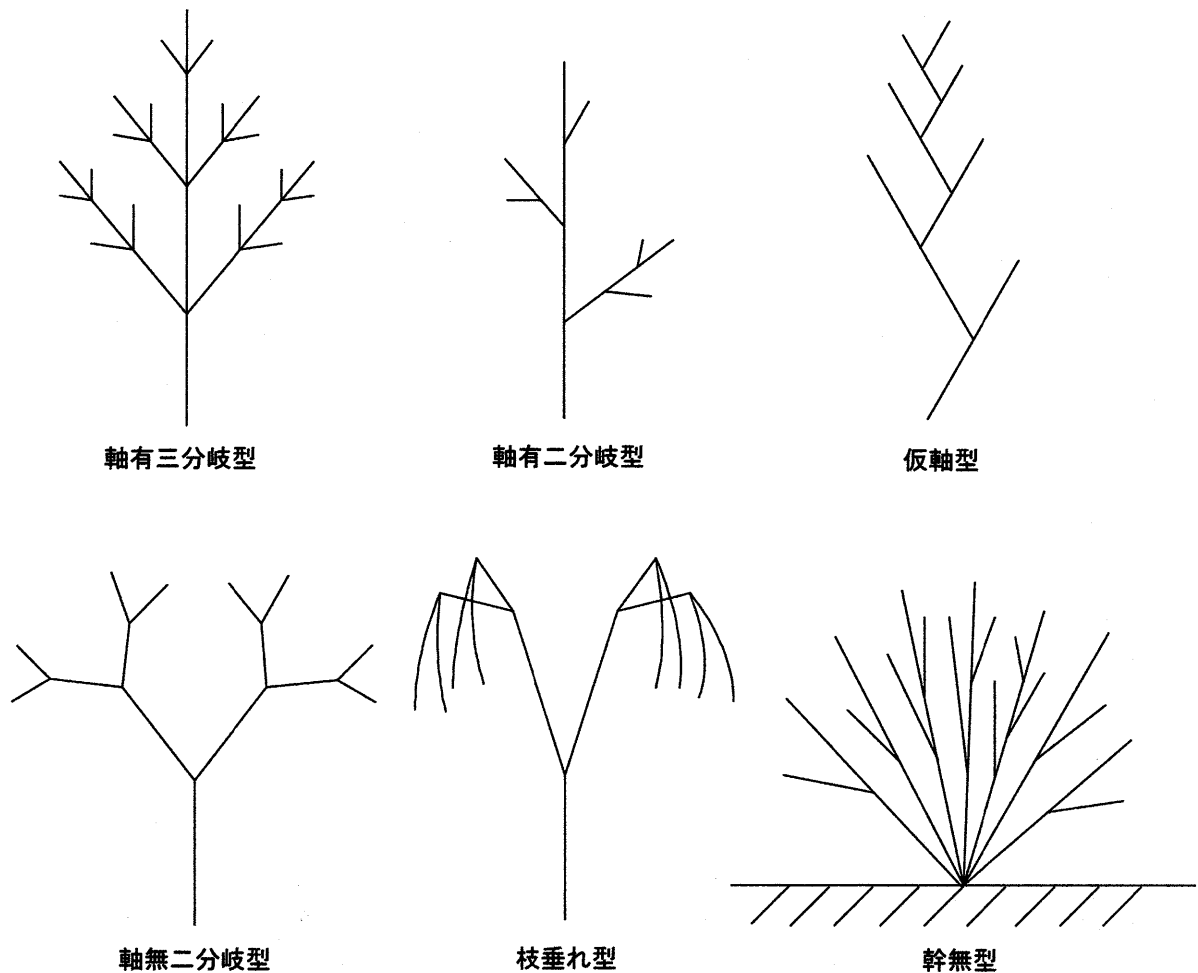


図 5.2 植物の分岐形状の例

5.2.2 力学的最適構造理論

樹木の枝の構造上の性質は、1本の片持梁の理論から、最大曲げ応力度一定の条件は、最適構造理論より得られる。末端の葉での光合成は、樹木の枝の機能と独立である（枝の構築に要する物質量は力学的強度の要求のみ）としていたが、構築物質に量的制約があると考えれば、力学的強度の要求のためにむやみに枝を太くすることはできなくなる。すなわち枝の細胞は光合成に関与していないので、もしも構築物質の量的制約があれば、枝よりも葉を多くする方が有利であると考えられる。しかし、枝の太さは力学的制約であまり細くすることができないので、適当な太さ、つまり最適条件があると考えられる。以下に単純化した仮定を示す。

仮定 1) 枝の構築に要する物質量は元枝の体積に比例するものとする。

仮定 2) 枝は一様・規則分岐しているものとし、枝全体の重心距離は元枝の長さに比例するものとする。

このとき枝の評価関数（cost function）として、枝の構築のためのエネルギーと、力学的強度に要するエネルギーの和を考え、この評価関数を最小にする条件が、枝の最適条件とする。枝を弾性体と考え、弾性係数 E [kg/cm²] とすると、評価関数 CF は、

$$CF = K \frac{l}{4\pi} C^2 + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_x^2}{EI} dx \quad (5.4)$$

K : 単位体積あたりの構築エネルギー（定数）[kgcm/cm³]、 l : 分岐点間の分岐枝長 [cm]、 C : 枝の周径 [cm]、 L : 重心距離 [cm]、 x : 枝の長軸方向に沿った長さ [cm]、 M : 曲げモーメント [kgcm]、 I : 枝の断面二次モーメント [cm⁴] ($C^4/64\pi^3$)

また、仮定 1、2 から次の 2 式が得られる。

$$L = \alpha_l l \quad W = \alpha_w C^2 l = \frac{\alpha_w}{\alpha_l} C^2 L \quad (\alpha_l, \alpha_w : \text{定数}) \quad (5.5)$$

CF を、 C について偏微分し、

$$M = K_1 C^3 \quad (K_1 = \sqrt{3EK/\alpha_l}/16\pi^2) \quad (5.6)$$

この式は、 $M/C^3 = \text{const}$ を意味する。すなわち、枝の分岐点において曲げ応力が一定であることと等しいといえる。以上より、

$$W = K_2 C^{2.5} \quad (K_2 = \sqrt{\alpha_w} \sqrt{3EK/\alpha_l^3}/4\pi) \quad (5.7)$$

$$L = K_3 C \quad (K_3 = \sqrt{3EK/\alpha_l^3}/16\pi^2 \alpha_w) \quad (5.8)$$

この 2 式は、 $W \propto C^{2.5}$ ならびに $L \propto C$ に相当した式であり、樹木の枝の構造力学的性質を表わすものである。特に (5.8) 式は樹木の構築に際して量的制約がある場合、太陽光エネルギー吸収のために空間的領域にむやみに長い枝を張り巡らせることはできないという、ひとつの力学的制約を意味している。

5.2.3 周径と枝長さの関係

今回は、枝の分岐様式を一様 2 分岐形態とし、末端の葉は、等価的に枝に置き換えるものとする。また枝は非対称に分岐するものと考え、分岐角度は各分岐点に元枝に対して θ_1 、 θ_2 に分岐すると考える。すなわち θ_1 および θ_2 側の枝に対して、枝の長さ、周径の公比をそれぞれ (k_{11}, k_{12}) および (k_{c1}, k_{c2}) とすると、

$$l_{i,2j-1} = k_{11} l_{i-1,j}, \quad l_{i,2j} = k_{12} l_{i-1,j}, \quad C_{i,2j-1} = k_{c1} C_{i-1,j}, \quad C_{i,2j} = k_{c2} C_{i-1,j} \quad (5.9)$$

$$(i=1,2,3,\dots,n, \quad j=1,2,3,\dots,2^{i-1})$$

とおける。ここで、第 i 分岐、 j 番目以降の枝の全体積を V_y とすると、

$$V_y = \left(\frac{l_y C_y^2}{4\pi} \right) \sum_{m=0}^{n-1} (k_{11} k_{c1}^2 + k_{12} k_{c2}^2)^m = \left(\frac{l_y C_y^2}{4\pi} \right) K_n \quad (5.10)$$

となる。よって第 i 分岐点以降における θ_1 と θ_2 側の枝の全体積はそれぞれ

$$V_{i,2k-1}' = \left(\frac{l_{i,2k-1} C_{i,2k-1}^2}{4\pi} \right) K_n, \quad V_{i,2k}'' = \left(\frac{l_{i,2k} C_{i,2k}^2}{4\pi} \right) K_n \quad (5.11)$$

$$(k=1,2,\dots,p; p \leq 2^{i-1})$$

となり、これより第 i 分岐点に作用する曲げモーメントは、重心距離を $L_y = \alpha l_y$ 、枝の比重を ρ とし、

$$M_{i,2k-1}' = \rho L_{i,2k-1} V_{i,2k-1}', \quad M_{i,2k}'' = \rho L_{i,2k} V_{i,2k}'' \quad (5.12)$$

となる。(5.10)、(5.11) 式から、分岐点における曲げモーメント比を求めると

$$\frac{M_{i,2k-1}'}{M_{i,2k}''} = \frac{l_{i,2k-1}^2 C_{i,2k-1}^2}{l_{i,2k}^2 C_{i,2k}^2} \quad (5.13)$$

となり、ここで各分岐点での最大曲げ応力一定の条件から、 (i, j) 番目の分岐枝の断面係数を Z_y とし、

$$\frac{M_{i,2k-1}'}{M_{i,2k}''} = \frac{Z_{i,2k-1}}{Z_{i,2k}} = \frac{C_{i,2k-1}^3}{C_{i,2k}^3} \quad (5.14)$$

となる。(5.13)、(5.14) 式から、

$$\frac{C_{i,2k-1}}{l_{i,2k-1}^2} = \frac{C_{i,2k}}{l_{i,2k}^2}, \quad \frac{C_{i,j}}{l_{i,j}^2} = \text{const} \quad (5.15)$$

となり、2 分岐モデルの場合の一般式が得られる。上式を周径と枝の長さの公比で表すと、

$$\frac{k_{c1}}{k_{11}^2} = \frac{k_{c2}}{k_{12}^2} \quad (5.16)$$

となり、各分岐点で曲げ応力一定の性質があれば、枝の分岐が自動的に構築される。

なお、このような 2 分岐構造では、元枝が支える重量 W_0 は、元枝の部分の重量が W_0 に比べて十分小さければ、 $W_0 = W_1 + W_2$ とおくことができ、これと (5.7) 式を用いると

$$C_0^{2.5} = C_1^{2.5} + C_2^{2.5} \quad (5.17)$$

が得られ、これより 2 分岐する枝の長さの公比で表すと、

$$k_{11}^3 + k_{12}^3 = 1 \quad (5.18)$$

となる。

5.2.4 分岐角度の関係

枝の分岐角度に多様性を持たせるため、枝元には曲げ応力一定（力学的安全率）の要因のほかにも、以下に挙げる様々な要因が複合的に作用しているものとする。

内的要因：水分、栄養分の輸送負荷（分岐角小が有利）、最適な群生状態（最適樹間距離に対応した分岐角）、総重量の最小化、消費エネルギーの最小化（分岐角大が有利）

外的要因：風、地震などに対する抵抗性能（分岐角の関与は未解明、研究中）重力抵抗性能（分岐角大が有利）、光合成の効率性（分岐角小が有利か）

これらの影響により、力学的安全率の生存確率が一律でないものとする。例えば、力学的安全率が高い＝生存確率が高いとは言えない。力学的安全率の発生確率に関するある種の最適化が進行したと推定した場合、種の保存により力学的安全率に関する一律でない生存確率（非一様生存確率の経験）が生じ、各種固有（分岐角）の発生確率が定まるとする。これが世代を重ねて種内の遺伝情報として記憶され、最終的に現在各種に見られる固有で生得的な発生確率として定着して行ったものとする。力学的安全率に関するこのような進展をまとめると次のようになる。

発生確率一様 → 非一様生存確率の経験 → 非一様発生確率の定着

また分岐角の効果は力学的安全率の生存確率に影響するので、力学的安全率の発生確率が確定していく重要な要因となる。しかも、分岐角は曲げモーメント応力を通じて力学的安全率に直接関与する。従って、力学的安全率の発生確率は分岐角の発生確率と密接な対応関係を有すると考えられる。

以上の考えより、新たに仮定（3）を考慮し、これを分岐角決定式として定式化すると次式となる。

仮定 3) 分岐角の発生確率は枝分岐点の（曲げ応力に関する）力学的安全率の発生確率と比例的である。

$$\frac{1}{\nu} = \mu \cos \phi \quad (5.19)$$

ここに、 ϕ ：分岐角、 $\mu = WL/\sigma_i Z (\leq 1.0)$ 、 ν ：枝分岐点の引張安全率（ $1 \leq \nu$ ）

W ：枝の負担鉛直荷重、 L ：枝の長さ、 σ_i ：枝の引張強度、 Z ：円断面枝の断面係数とする。

(5.19) 式によれば、分岐角 ϕ の大小と力学的安全率 ν の大小は比例的である。力学的安全率の発生確率と分岐角の発生確率の大小が直接対応するとすれば、自然界の実態に即して、これらの諸量はおおよそ下図のように想定することが出来る。

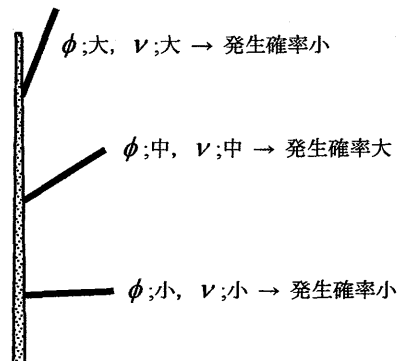


図 5.3 分岐角 ϕ の大小と力学的安全率 ν の大小

ここに、力学的安全率の定め方の一例を示す。

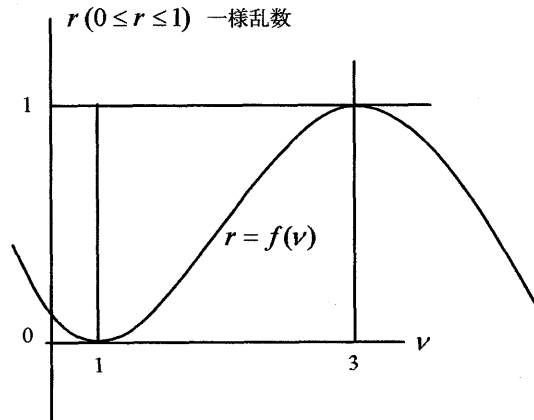


図 5.4 安全率の定め方

一様乱数 $r(0 \leq r \leq 1)$ を力学的安全率 $v(1 \leq v \leq 3)$ に変換する関数を

$$f(v) = a(v-1)^n(v+b)^n \quad n \geq 2 \quad (5.20)$$

と仮定する。条件 $f(3)=1$, $\frac{df(3)}{dv}=0$ から a, b を決定すると、次式を得る。

$$r = f(v) = \left(\frac{v-1}{2}\right)^n \left(\frac{5-v}{2}\right)^n \quad (5.21)$$

上式を v について解くと、ランダム変数としての力学的安全率を得る。

$$v = 3 - 2\sqrt{1-\sqrt[n]{r}} \quad (5.22)$$

以上から、仮に $\mu=1$ などとして力学的安全率を乱数から (5.22) 式により求めれば、(5.19) 式から分岐角を決定することが出来る。分岐角は $n=2$ の場合、 35° を中心値として 0° から 70° 程度に分布する。なお、 $f(v)$ は確率分布関数と呼ばれ、これを微分すると確率密度関数 $p(v)$ が得られる。べき数 n を上げれば、中心値が増加し、その近傍値の発生頻度が上昇することは上図および下図から判断できる。

$$p(v) = \frac{n}{2} \left(\frac{v-1}{2}\right)^{n-1} (3-v) \left(\frac{5-v}{2}\right)^{n-1}, \quad n \geq 2 \quad (5.23)$$

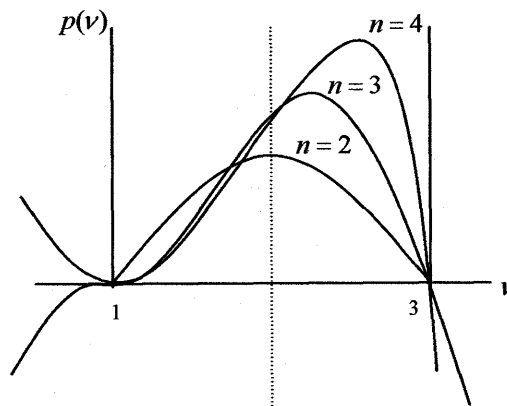


図 5.5 確率密度関数の発生頻度

5.3 成長プロセスによる最適条件

樹木は、成長するに従い成長率が次第に低下し、やがて完全に成長を止める。樹木は「反復」と呼ばれる、同じ形を何度も繰り返すプログラム化された成長のしかたをするので、先端付近の小枝を幹やそれに近い場所の枝から生えた苗木と考えられる。これにより、仮定（4）が成り立つとする。

仮定 4) 成長段階のどの時期においても末端の枝の周径は一定である。

ここで仮定（4）を考慮し、樹木モデルにおける枝の末端での周径がある値に達したら成長を止めるようにする。また一般に樹木の成長は、若木や高齢木を除外し、平均すると胴回り（周径）と樹齢、胴回りと樹高には、以下の関係がある。（文献 [13] より）

$$Age = \frac{C_0}{1.3 \sim 2.5} = \frac{H}{15.0 \sim 50.0} \quad [\text{cm}] \quad (5.24)$$

ここで、 Age : 樹齢、 C_0 : 基幹の周径、 H : 樹高とする。

以上により、実際の樹木の成長過程を考慮したモデルを作成することができる。ここで、ある 1 つの樹木モデルの成長過程を本研究では、1 つの成長プロセスと考える。

5.4 作成手順

本項では、これまでの理論式および関係式を用い、実際の樹木の成長過程を考慮したモデルを樹齢 (*Age*) を元に、10*age*、20*age*、30*age* までの成長過程のモデルを作成する。

以下に、今回の研究モデルの作成手順を示す。

- ① まず (5.24) 式の関係式より、各作成モデルの幹の周径を決める。
(今回は、樹齢 1 年で周径が 2.0 [cm]、高さが 30.0 [cm] 成長するものとしている.)
 - ② 各モデルの樹高に適するように、(5.8) 式周径と枝の長さの関係の係数 K_b の値をそれぞれ設定する。
(今回は、10*age* : 500、20*age* : 650、30*age* : 800、分岐後の枝は (共通)、200 としている.)
 - ③ 次に、分岐の形態に多様性を持たせるため、 k_n に乱数を用いて (5.16)、(5.18) 式より、乱数の範囲を求め、他の k_{n2} , k_{c1} , k_{c2} を決定する。尚、 k_n の乱数の範囲は $(0.87 \leq k_n \leq 1.0)$ とする。
 - ④ 分岐角度は、(5.22) 式より力学的安全率を求め、(5.19) 式より求めることができる。
 - ⑤ 最後に分岐層数を決め、樹木モデルにおける枝の末端での周径がある値に達したら成長を止めるようにする。(今回は、分岐層数を 6、末端の周径が 15.0 [cm] 未満になったら成長を止めるようにした.)
- ※ 枝の長さで周径の減少率 (公比 (k_n, k_{n2}) および (k_{c1}, k_{c2})) は、10*age* ~ 30*age* の成長過程で同じ値を用いている。これにより、枝の分岐角度は、同じ分岐点から発生する子枝同士の周径の比により決定するので、成長前後で同じ部位に当たる枝が同じ角度になる。

以上の手順により作成したある成長プロセスの一例を以下に示す。

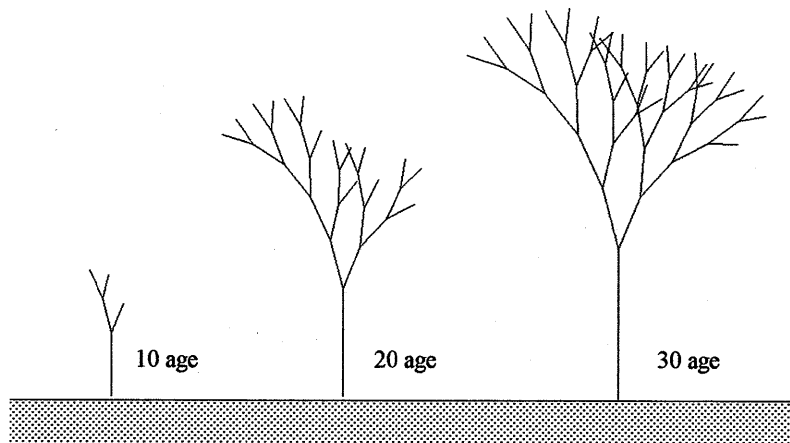


図 5.6 成長プロセスを考慮したモデル

第 6 章

解析結果

6.1 概説

本章では、これまでの理論式によるモデルについて振動応答解析を行い、その結果を示す。

6.2 では、本研究での振動応答解析を行う解析手順を示す。

6.3 では、樹木モデルを作成する際の解析緒元について示す。

6.4 では、固有値解析を行う際、求められる固有モードをもとにモデルの理論的な振動形を描写しモデルの変形の可視化を試みた。

6.5 では、時刻歴応答解析より応答値を求め、モデルについての各応答を比較・検討する。また、作成した樹木モデルを柱に応用して、剛な梁の挙動を比較・検討した。

6.2 解析手順

はじめに、解析する際の解析フローを簡単に説明する。

Step1) 成長プロセスの作成

樹齢ごとにモデルを作成

Step2) 固有値解析

固有値・固有周期を求め、モデルの挙動を調査。

また、固有振動数を求め、減衰マトリクスを作成する。

Step3) 時刻歴応答解析

地震動に対するモデルの応答の検討

以上の過程に沿って、本研究では動的解析を行い、樹木モデルの構造特性について調査する。

6.3 樹木モデルの作成

ここでは、解析の対象となる樹木モデルの作成について説明する。

本研究では、実際の樹木の材料特性を参考に解析緒元を設定した。実際の樹木の弾性係数は枝の密度に比例せず、樹齢のべき乗関数として表現できるものとする。 $(E = 7.21 \times 10^{10} \text{ Age}^{-1.78})$ 幼木ほど弾性係数は大きくなる傾向にある（図 6.1）。つまり、幼木ほど材質が堅いといえる。

これより、弾性係数を $_{10}E = 120,000$, $_{20}E = 35000$, $_{30}E = 17000 \text{ N/cm}^2$ （左下添字は樹齢）密度（比重） 0.6 g/cm^3 ，最大層数 6 層，および幹の周径は $_{10}C_0 = 20 \text{ cm}$, $_{20}C_0 = 40 \text{ cm}$, $_{30}C_0 = 60 \text{ cm}$ （左下添字は樹齢）と設定し、樹齢ごとにモデルを作成する。（参考 5 章）枝の形状は、一様均質円断面で構築される。ここで、10・20・30 年と樹木が成長する一連の過程をひとつの成長プロセスとし、3 つの異なる成長プロセス（Process1～Process3）を作成した。

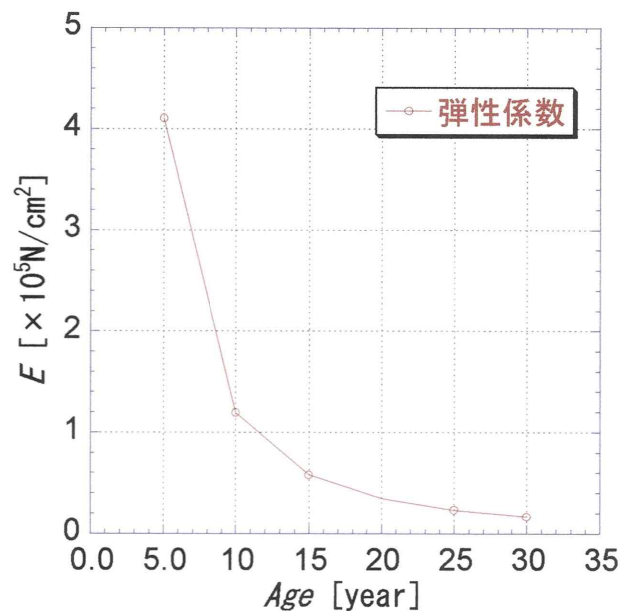


図 6.1 樹木の弾性係数と樹齢の関係

以下に、Process.1～3 の成長プロセスを示す。

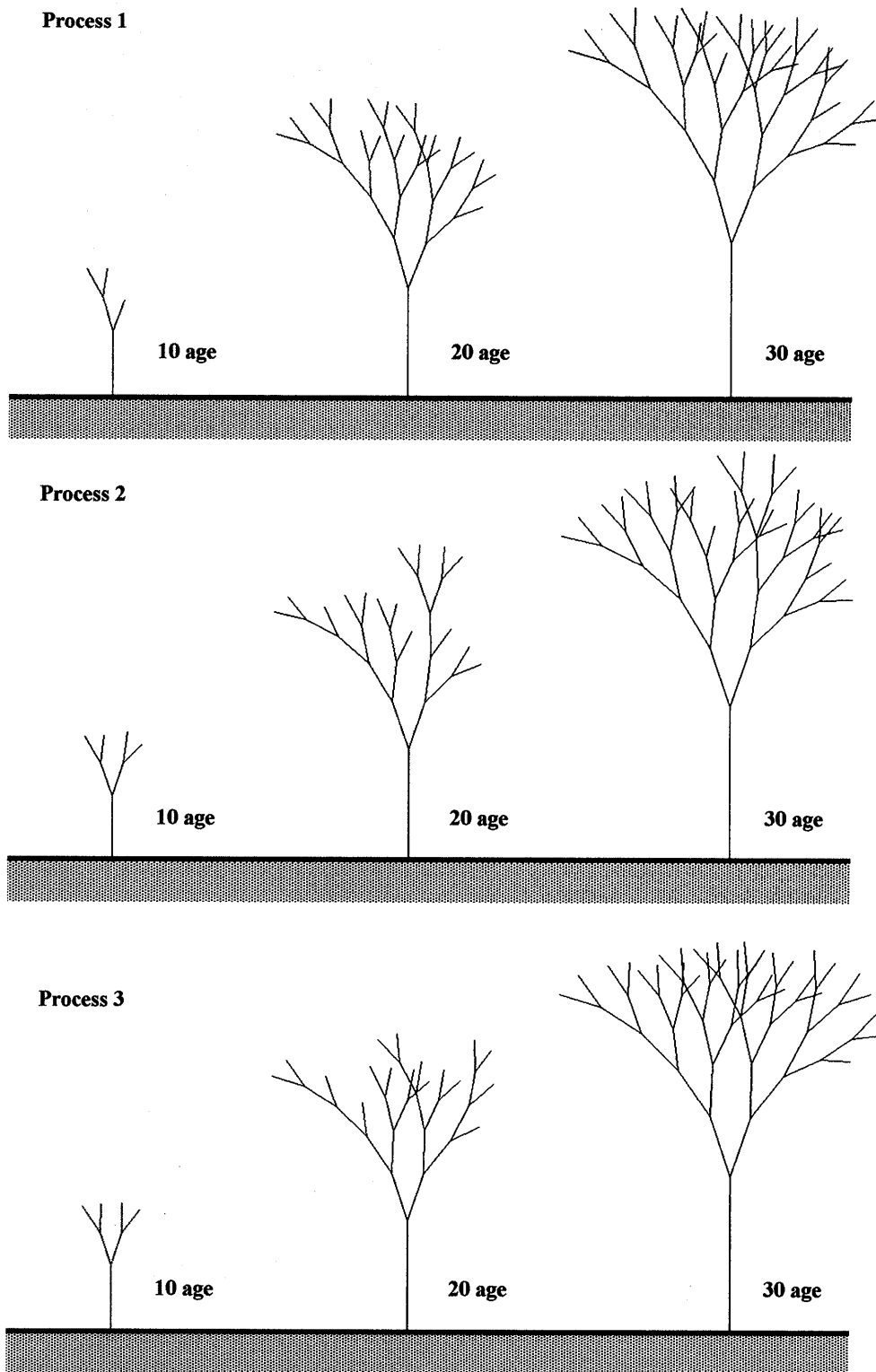


図 6.2 Process 1～3 の成長プロセス

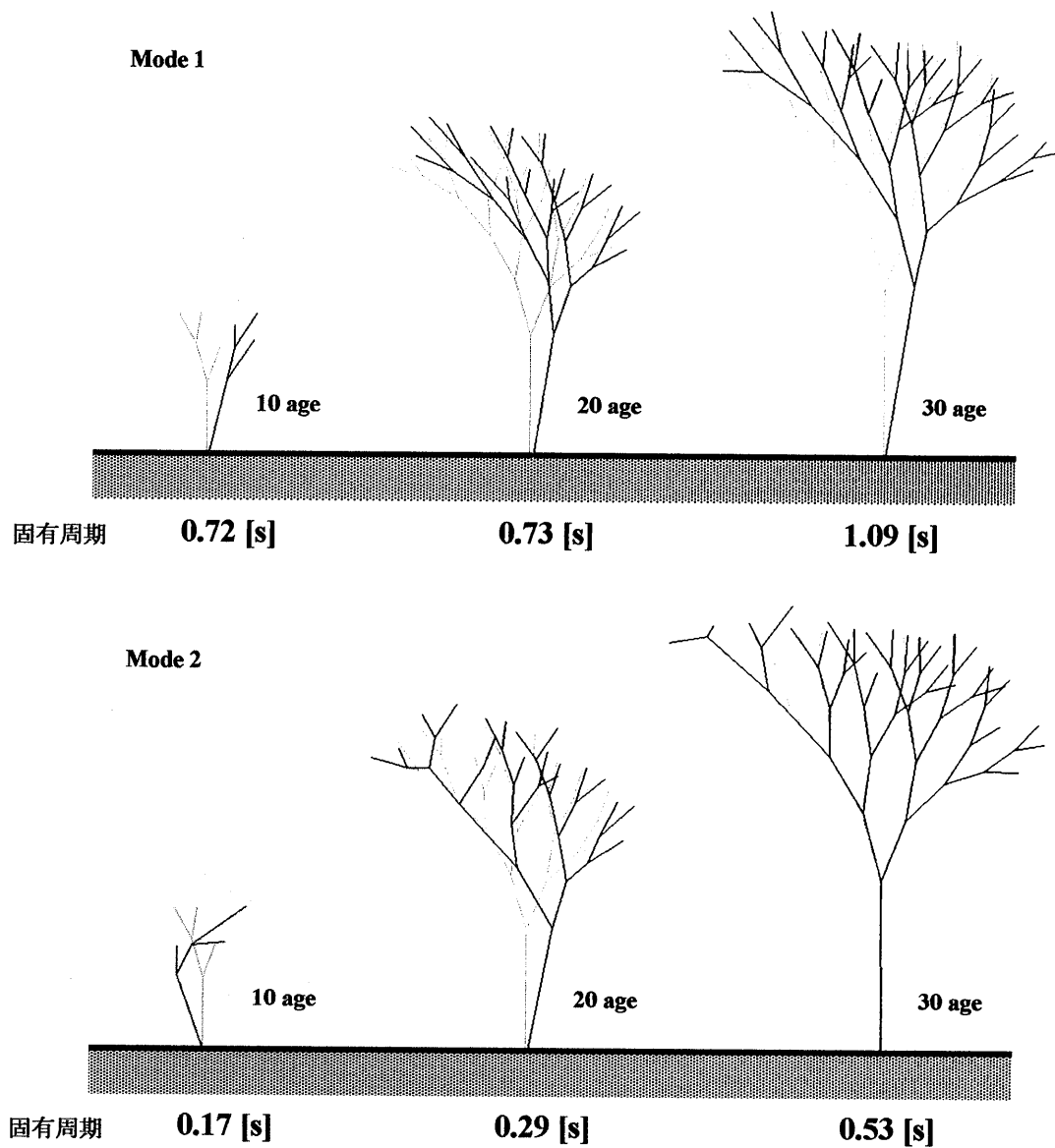
6.4 固有値解析

作成したモデルの枝一本一本をひとつのはり要素と考え、それらの材料特性、各節点の座標などのデータを用いて、固有値解析を行う。本研究では、固有値解析の数値解析法として、一般化ヤコビ法を用いて解析をした。

Step2 の解析を通して、個々のモデルの固有角振動数 ω ，固有振動数 f ，固有周期 T ，および固有モードが求められる。ここで、固有モードをもとにモデルの理論的な振動形がわかるので、描写を施しモデルの変形の可視化を試みた。

(※ モード図で、薄い実線は静止時、濃い実線は振動モード時を表す。)

以下に、Process1 の1次，2次モードの図を示す。



6.5 時刻歴応答解析

次に、作成したモデルに地震波を入力し、それに対するモデルの地震応答解析を線形加速度法により応答値を求める。今回、モデルの減衰には固有値解析より求めた固有振動数を用いて、レイリー減衰 (4.33) 式を適用している。地震波には、EL CENTRO NS (最大加速度 341.7 [cm/s²], 計測時間 50 [s]) を用いた。時刻歴応答解析により、全節点の加速度、速度、変位、部材の軸力、せん断力、曲げモーメントの応答値を求め、樹齢ごと、成長プロセスごとに比較・検討する。

加速度・速度・変位に関しては、枝末端の最大変位値、ベースシア係数、応答スペクトル、フーリエスペクトルを示し、応力(軸力・せん断力・曲げモーメント)に関しては、根元の値を以下に示す。(図 6.4~6.12)

尚、解析結果をまとめるにあたり、各モデルの末端の節点に大規模な応答値が集中するが、最大変位を示す節点にばらつきがある(モデル自体にばらつきがあるため)ので、全節点の応答値を求め、最大値となる値を示す。

<解析結果> Process 1 (枝末端の最大応答値)

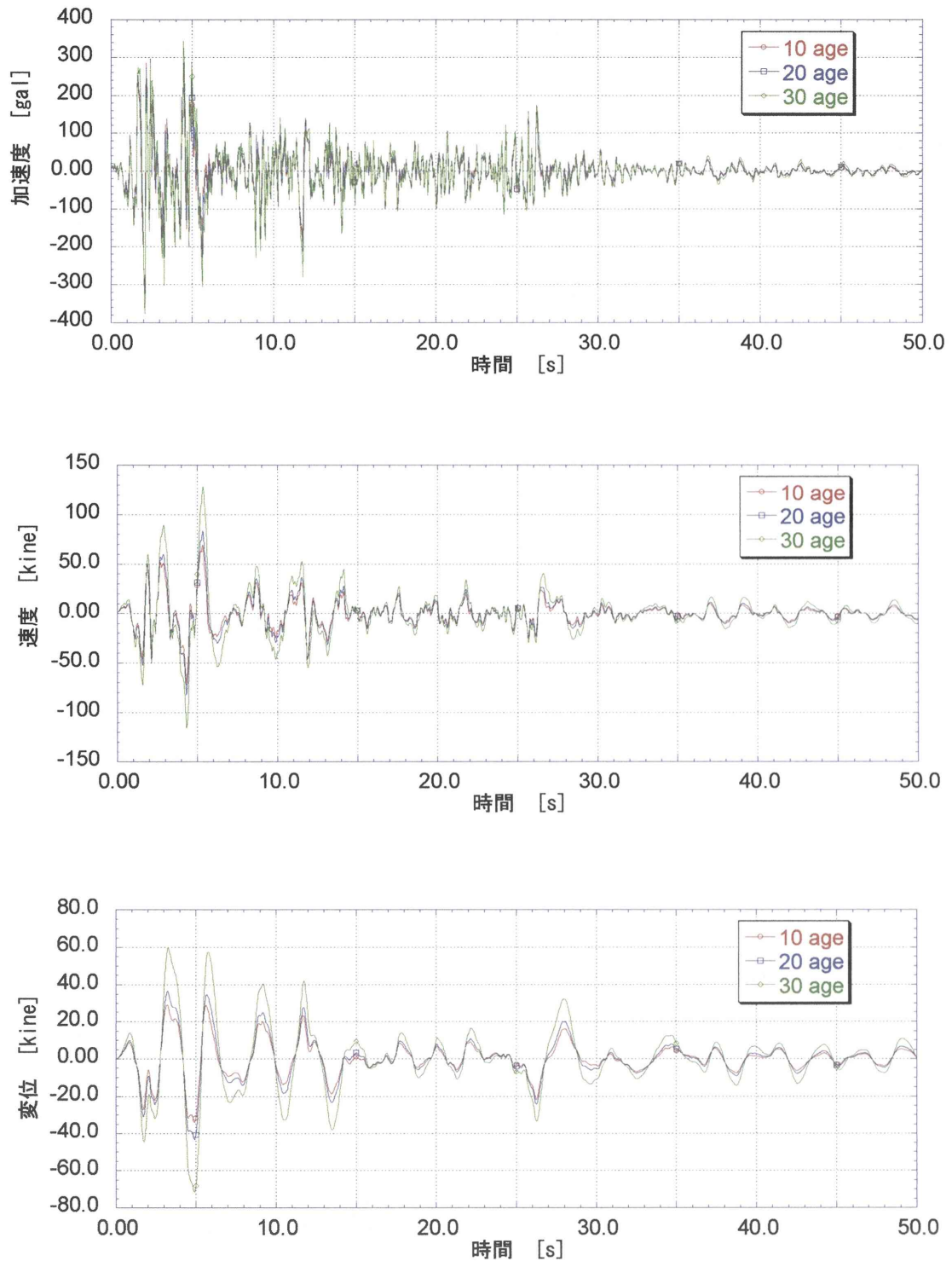


図 6.4 時刻歴応答図 (加速度・速度・変位)

＜解析結果＞ Process 1 （根元の応力）

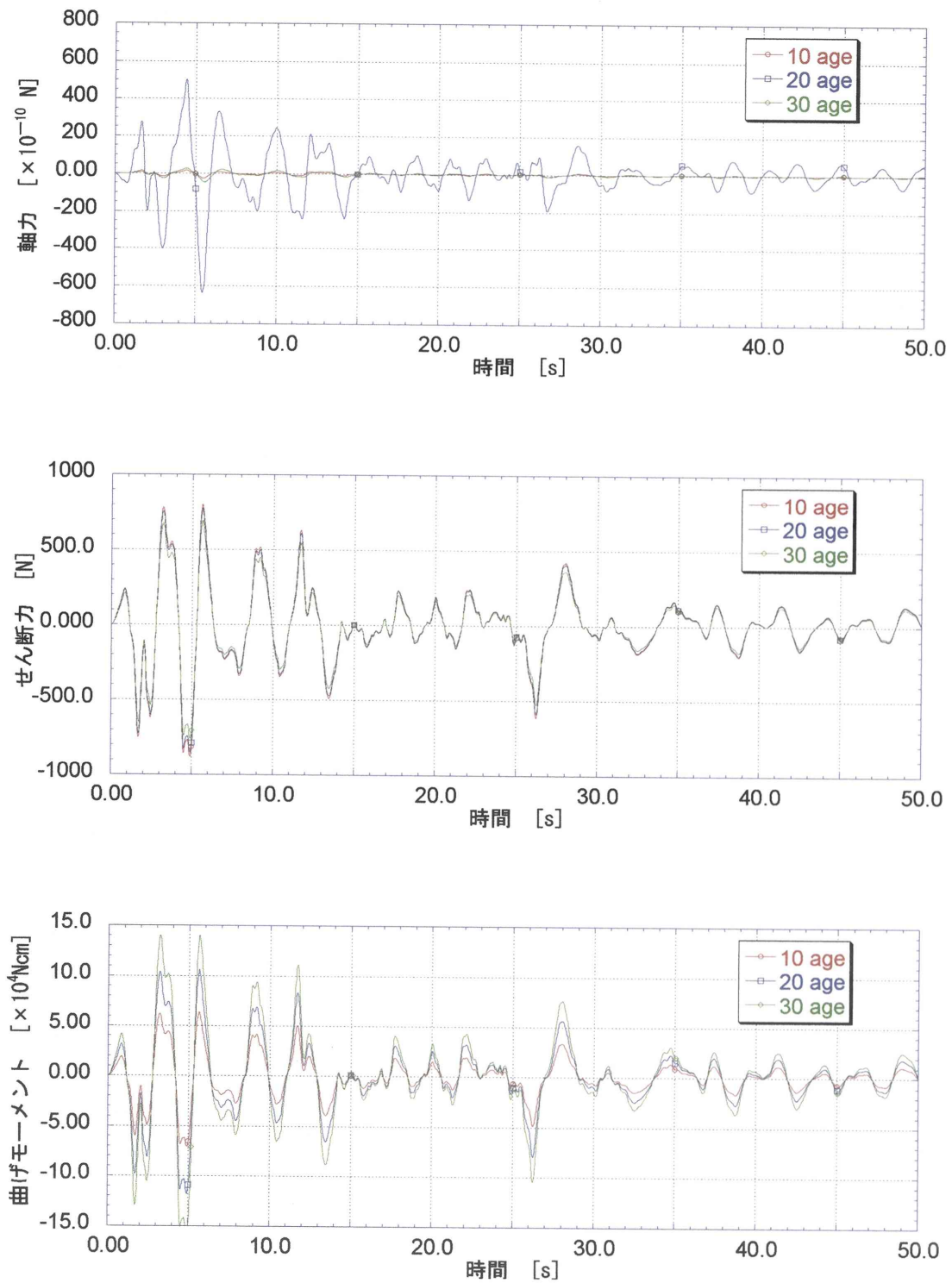


図 6.5 時刻歴応答図（軸力・せん断力・曲げモーメント）

<解析結果> Process 2 (枝末端の最大応答値)

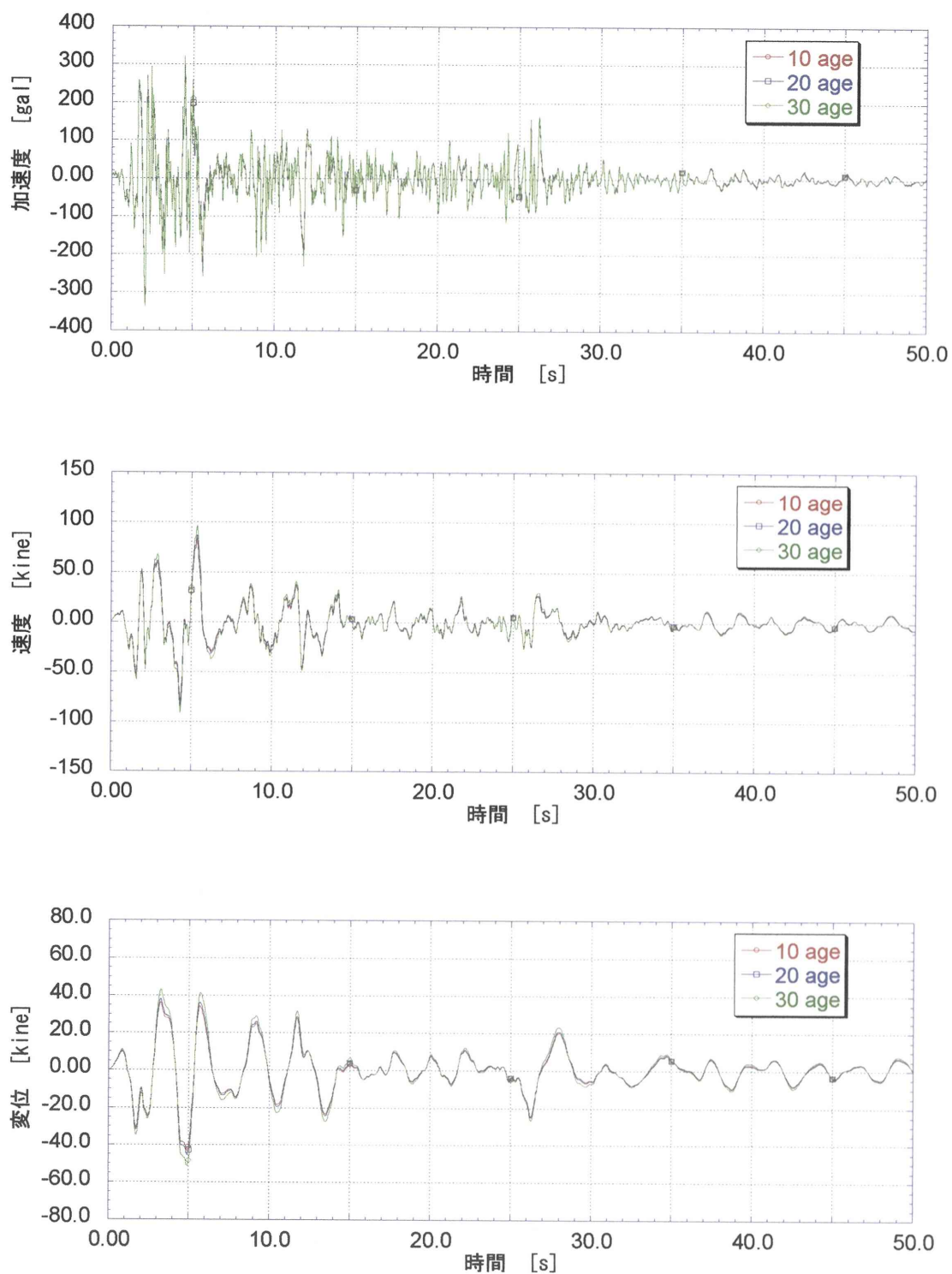


図 6.6 時刻歴応答図（加速度・速度・変位）

<解析結果> Process 2 (根元の応力)

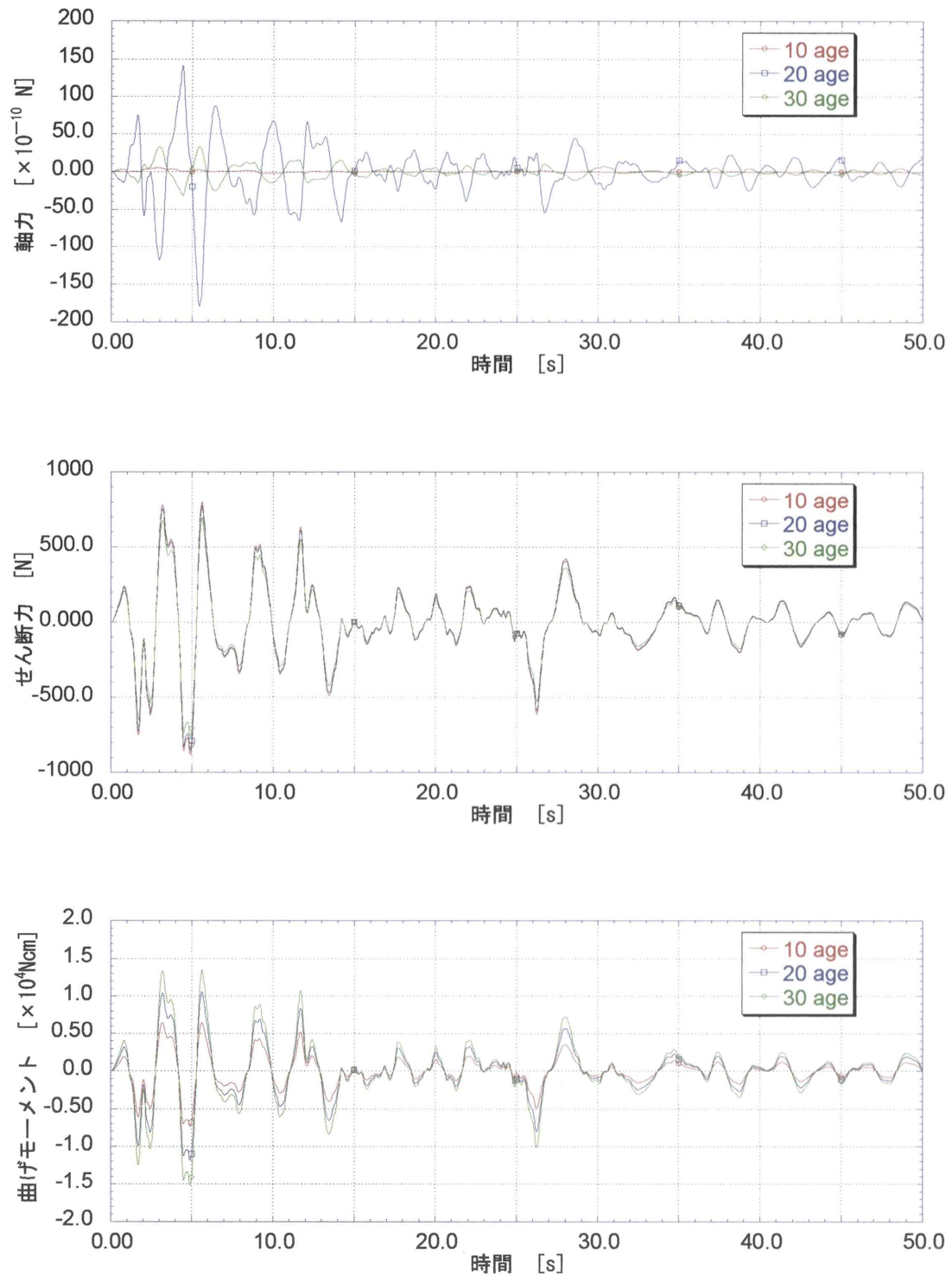


図 6.7 時刻歴応答図 (軸力・せん断力・曲げモーメント)

<解析結果> Process 3 (枝末端の最大応答値)

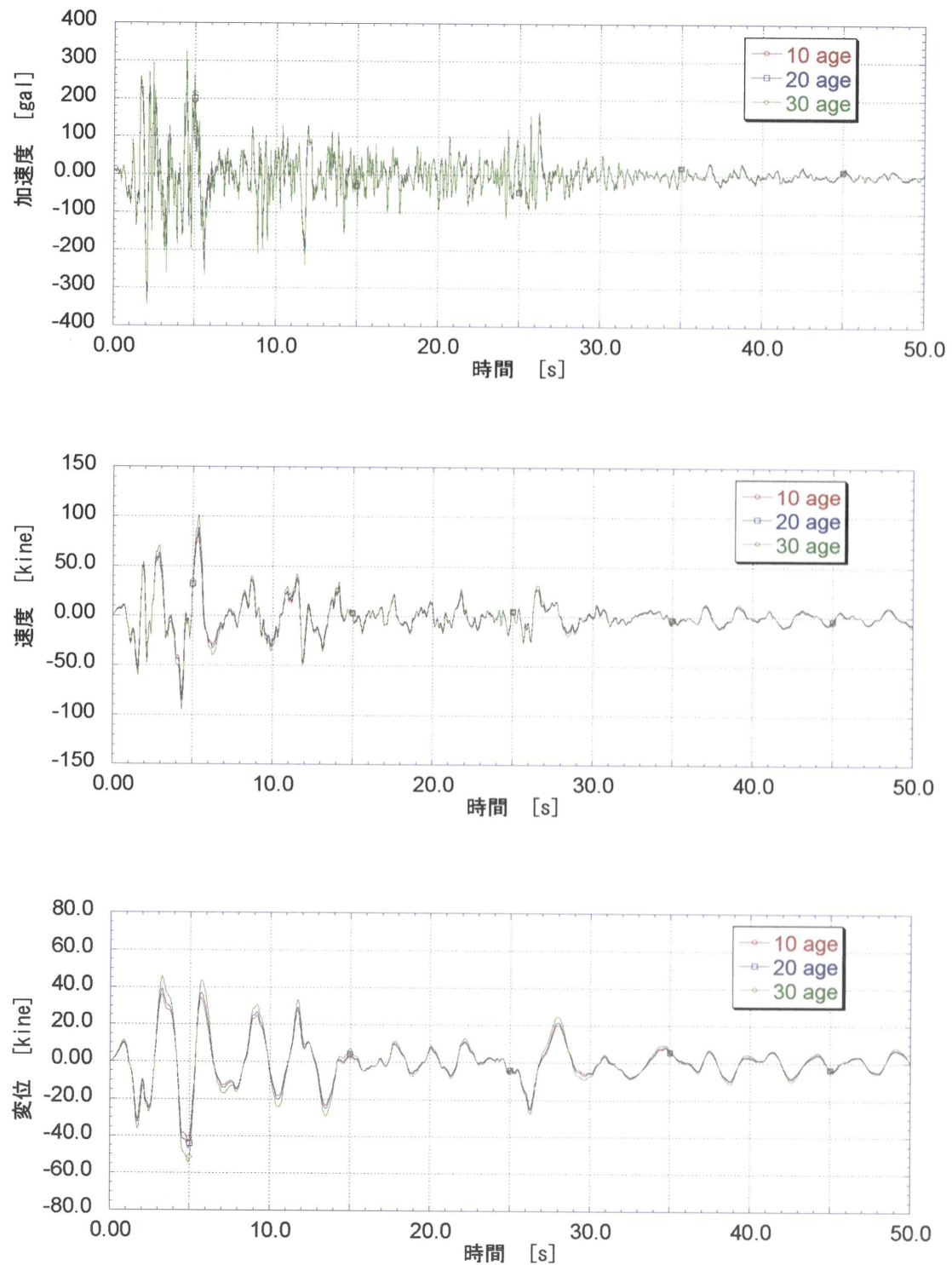


図 6.8 時刻歴応答図 (加速度・速度・変位)

＜解析結果＞ Process 3 （根元の応力）

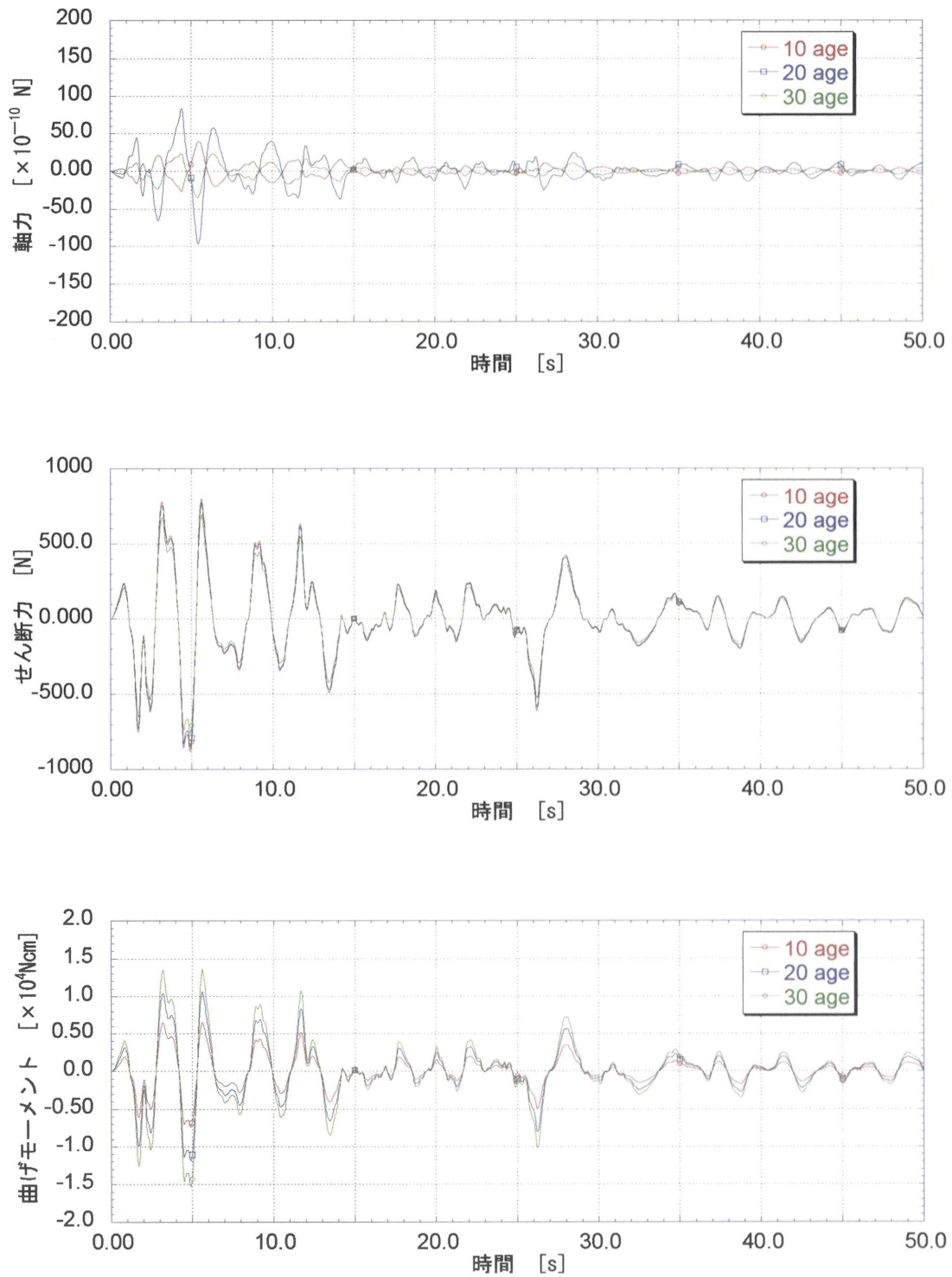


図 6.9 時刻歴応答図（軸力・せん断力・曲げモーメント）

＜解析結果＞ ベースシア係数（3つの Process における平均値）

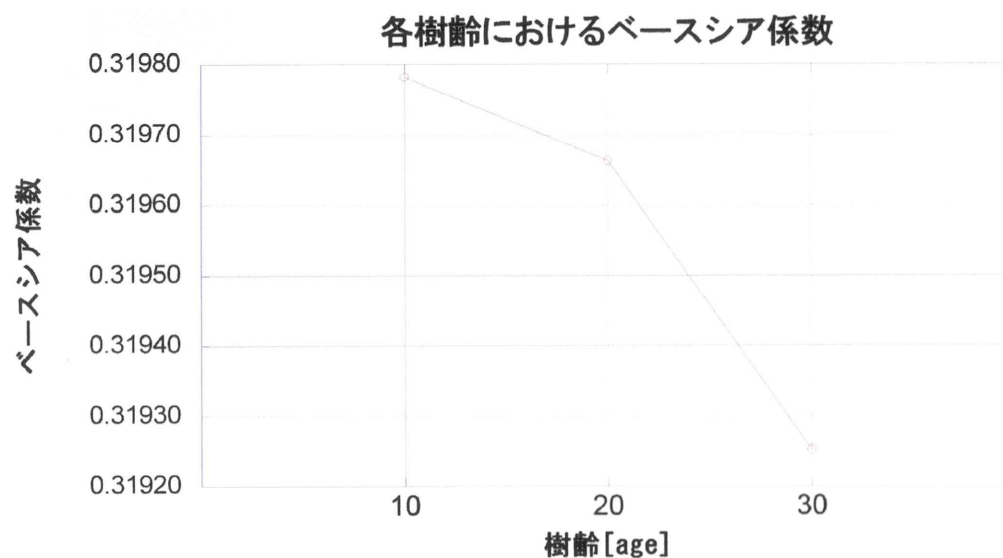


図 6.10 各樹齢におけるベースシア係数（3つの Process における平均値）

＜解析結果＞ フーリエスペクトル

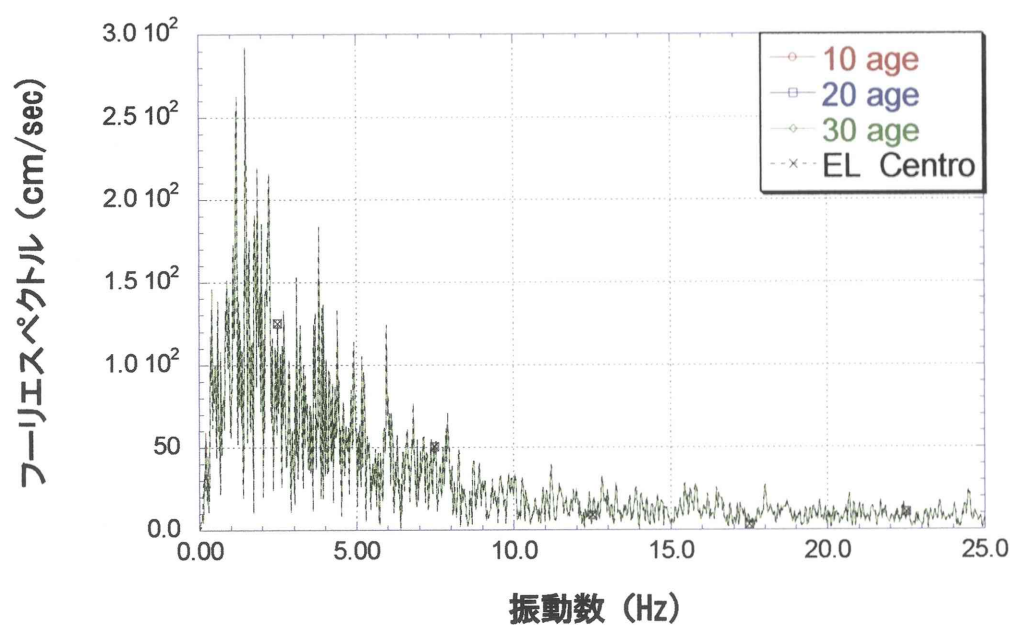
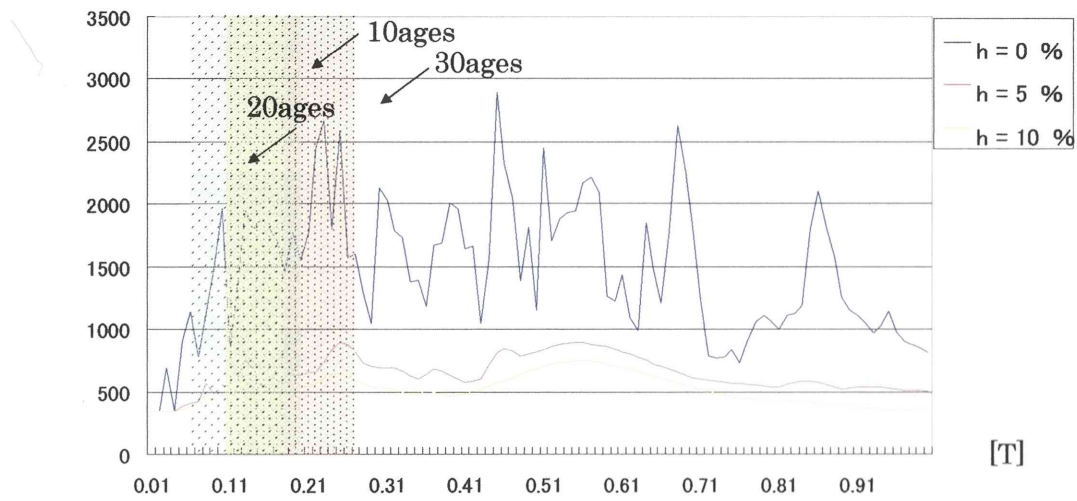
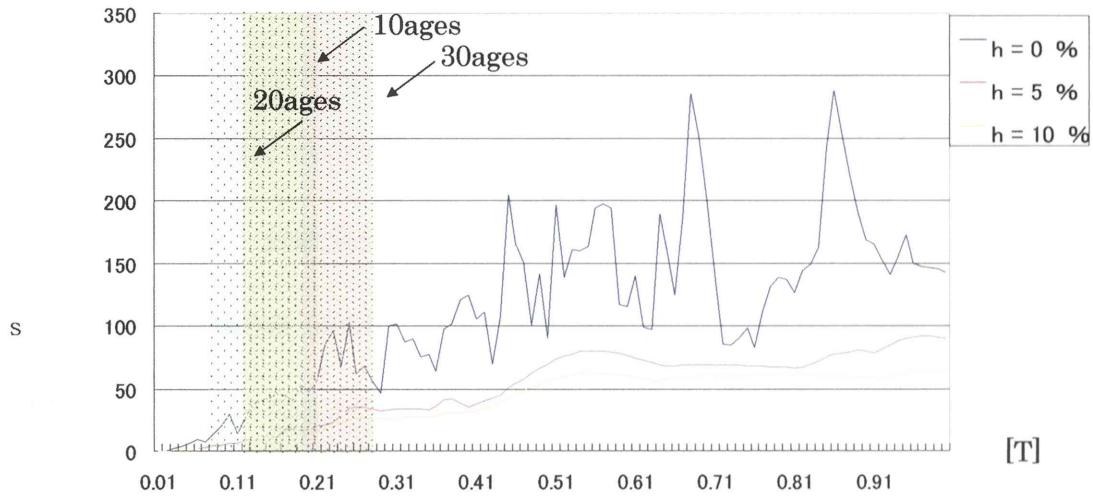


図 6.11 フーリエスペクトル

・ 加速度応答スペクトル[gal]



・ 速度応答スペクトル[kine]



・ 変位応答スペクトル[cm]

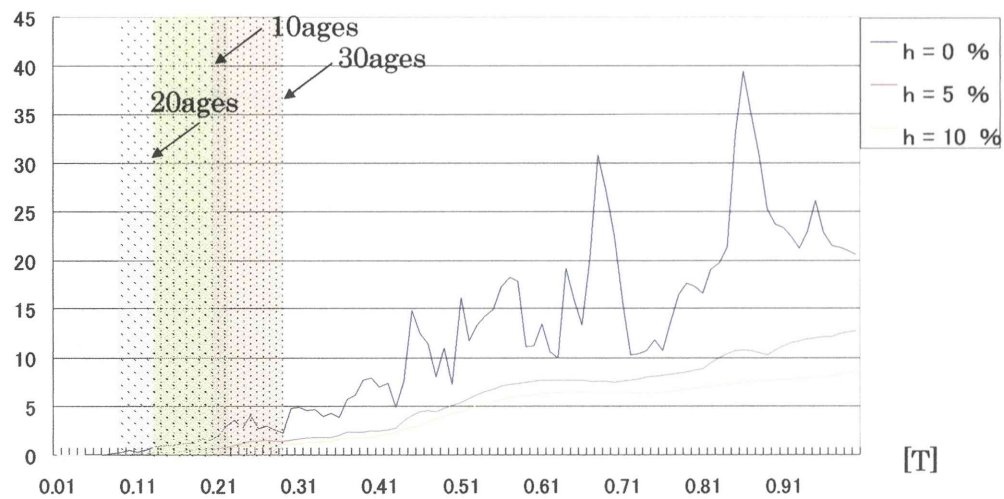


図 6.12 応答スペクトル (加速度・速度・変位)

6.5.1 樹木モデルの柱への応用

ここでは、樹木モデルを柱に応用し、分岐した場合と分岐しない場合との比較、また分岐角度の違いによって、剛な梁がどのような挙動を示すのかをベースシア係数から検討する。

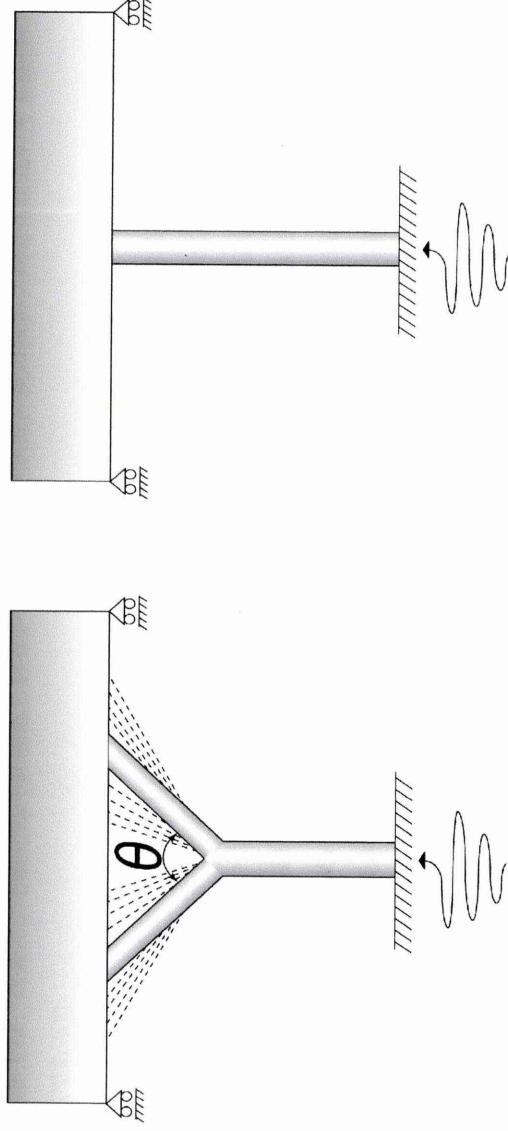


図 6.13 分岐している場合

図 6.14 分岐していない場合

<解析結果> 分岐角度別のベースシア係数比

その際、モデルの総体積（総重量）が等しい場合の分岐した場合（図 6.13）と分岐しない場合（図 6.14）のベースシア係数を

$$\text{ベースシア係数比} = \frac{\text{分岐した場合のベースシア係数}}{\text{分岐しない場合のベースシア係数}}$$

として表し、分岐角度 θ は $40^\circ \sim 90^\circ$ の範囲とする。

分岐角度別のベースシア係数比

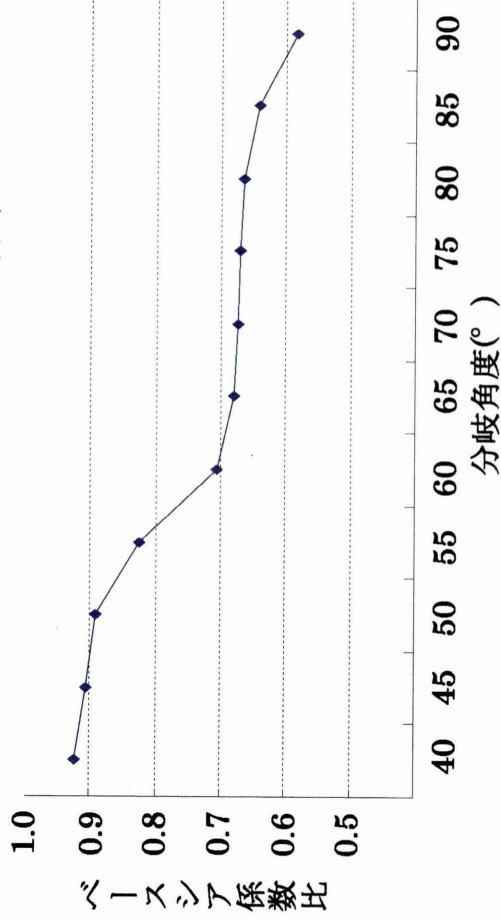


図 6.15 分岐角度別のベースシア係数比

6.5.1 考察

時刻歴応答解析の結果、

末端の最大変位の加速度、変位応答は、概ね樹木の成長に従い変化量が増加する傾向が見られる。また速度では、成長による変化はそれ程見られなかった。この結果は、他の成長プロセスにおいても同様の結果であった。

幹の根元による軸力については、作成した3タイプの成長プロセス毎に、異なる傾向が見られる。また軸力に関しては、通常、分岐なしの柱（片持ち梁）に対して垂直方向に外力を加えたとき、柱（部材）の根元に軸力は生じない。しかし本研究での樹木モデルにおいては、軸力（地面に対して垂直方向の力）が生じている。これは、枝が分岐した状態では、曲げによる引き抜き力が増幅するため、軸力方向の力が作用したと考えられる。せん断力は、樹木の成長による変化は見られなかったが、曲げモーメントは、成長に従い変化量が増加する傾向が見られる。これは、他の成長プロセスにおいても同様の結果であった。

次に、各樹齢におけるベースシア係数については、3タイプの成長プロセス共に、樹木が成長するにつれて、減少する傾向が見られた。この要因として、樹木は成長するに従い、ヤング係数を低下させるという性質（本研究では、この性質を考慮してモデルを作成している）が挙げられる。この性質は、水平外力による大変形に対して、ヤング係数を下げることで樹木自身の枝の剛性を減少させ、靱性能力を高めているのではないかと考えられる。また、応答スペクトルから、3タイプの成長プロセス共に、各樹齢の固有周期、揺れの大小関係は $20age < 10age < 30age$ となることがわかった。

最後に、樹木モデルを柱に応用し、そこに地震波を入力した場合、ベースシア係数比より、分岐した場合の方が分岐しない場合に比べて、最下層におけるせん断力を軽減できることがわかった。また、その際、分岐角度が大きくなるにつれて、その効果がさらに大きくなることがわかった。

しかし、この分岐角度においては、 60° までは著しい効果が見られたが、それ以上の角度においては、あまり軽減効果が見られなかったもので、耐震的な観点から見ると、 60° が分岐角度としては最適であることがわかった。

また、実際の樹木であるケヤキに、この結果を当てはめて考えてみると、ケヤキ本来の分岐角度は $40^\circ \sim 60^\circ$ とされていることから、これよりケヤキの構造自体も耐震的に有効であることがわかった。

第7章

結論

7.1 本研究による成果

人工的に造られた形は全て何等かの意味で目的・機能を持ち、最も効率的に目的・機能を達成するような合目的的構造となっている。このような観点より、自然界などに存在する分岐する形状を、本研究では開放分岐型構造と定義し、振動応答解析による構造特性（耐震性）の検討を行った。

まず研究対象をモデル化するにあたり、樹木の枝の機能・目的を力学的側面から捉え、研究報告（文献 [1] , [2]）による理論式、新たに分岐角決定法の定式化、さらに樹木の成長過程の関係（文献 [13]）により、実際の樹木に近いモデルを作成することができた。

以上の手法により作成したモデルを用いて、有限要素法による振動応答解析を行った結果、以下のような知見を得た。

- ・ 樹木は成長に従い、枝末端の変位量は増加する傾向にあるが、ベースシア係数は減少する傾向がある。
- ・ 開放分岐型構造（樹木）では、枝の上下慣性力が幹の軸力変動を引き起こす。
- ・ 樹木の固有周期、揺れの大小関係は $20\text{ages} < 10\text{ages} < 30\text{ages}$ となる。
- ・ 樹木を柱として応用した場合、分岐構造の方が非分岐構造に比べて、最下層におけるせん断力が軽減できる。
- ・ また、その分岐角度が大きくなるほど、最下層におけるせん断力をより軽減することができる（その中で 60° が最も有効）。

7.2 今後の研究課題

今後の研究課題として、

- ・ 上部構造のみだけでなく下部構造も考慮した樹木モデルの作成
 - ・ 実際の構造物への応用
- などが挙げられる。

参考文献

- [1] 山越憲一著：“樹木の枝の形態と力学的最適構造”，医用電子と生体工学，1976
- [2] 山越憲一著：“樹木の枝の形態と適応”，システム/制御/情報 VOL36, No4, pp.254～262, 1992
- [3] 山越憲一著：“血管および樹木の形態と機能”，バイオメカニズム学会誌 VOL1, 1977
- [4] 山越憲一 牧野秀之著：“樹木の枝の形態と力学的応変化”，日本機会学会第 3 回バイオメカニクスカンファレンス講演論文集(1993-1-20, 21, 22)
- [5] 山越憲一著：“血管および樹木にみられる形態と機能の関係”，バイオメカニズム動作の原点の探求，1975
- [6] 山越憲一 神谷瞭著：“血管最適分岐現象”，循環シミュレーション解析，1985
- [7] 山越憲一著：“樹木の枝の適応性”，北海道大学電子科学研究所 A02 班
- [8] 田中基八郎著：“植物のデザイン 形と力学”，共立科学ブックス
- [9] Peter S. Stevens 著：“自然のパターン—形の生成原理”，白揚社，1994
- [10] 関村利朗，森田利仁，野地澄晴著：“生物の形の多様性と進化—遺伝子から生態系まで”，裳華房
- [11] 柴岡弘郎著：“植物は形を変える”，共立出版
- [12] 尾田十八著：“形と強さのひみつ”，オーム社
- [13] ピーター・トーマス著：“樹木学”，築地書館
- [14] フライ=オットー他著：“自然な構造体”，鹿島出版会
- [15] 宮崎興二著：“建築のかたち百科”，彰国社
- [16] 沼田真著：“植物生態の観察と研究”，東海大学出版会
- [17] 藤井大地著：“パソコンで解く構造デザイン”，丸善
- [18] 藤谷義信，藤井大地，野中哲也著：“パソコンで解く骨組の静的・動的・弾塑性解析”，丸善
- [19] A. Ghali, 川上洵, A.M. Neville 著：“構造解析の基礎と応用”，技報堂出版
- [20] 西川孝夫他共著：“性能型構造設計入門”，培風館
- [21] 谷資信著：“構造の動的解析”，技報堂出版
- [22] 北村春幸著：“性能設計のための建築振動解析入門”，彰国社
- [23] 岸正彦著：“構造解析のための有限要素法実践ハンドブック”，森北出版
- [24] 田中享二，横山裕，三上貴正著：“新・建築材料〈1〉構造材料編”，数理工学社
- [25] 日本機械学会：“生物と機械”，共立出版
- [26] 山越憲一著：“自律適応する素材—生体組織”，オーム社
- [27] 戸川隼人著：“有限要素法による振動解析”，サイエンス社
- [28] 戸川隼人著：“有限要素法概論”，培風館
- [29] 柴田明徳著：“最新 耐震構造解析”，森北出版株式会社
- [30] 大崎順彦著：“建築振動理論”，彰国社
- [31] 大崎順彦著：“新・地震動のスペクトル解析入門”，鹿島出版会
- [32] 日本建築学会：“入門・建物と地盤との動的相互作用”，技報堂
- [33] 日本建築学会：“建物と地盤の動的相互作用を考慮した応答解析と耐震設計”，技報堂

参考文献

- [34] 福森栄次著：“よくわかる有限要素法”，オーム社
- [35] 小田政明著：“実用 有限要素法の計算”，日刊工業新聞社
- [36] 小林繁夫著：“振動学”，丸善株式会社
- [37] 鹿島建設土木設計本部：“耐震設計法／性能設計”，鹿島出版会
- [38] モード解析ハンドブック編集委員会：“モード解析ハンドブック”，コロナ社
- [39] 倉部誠 市原千治著：“わかりやすい振動モード解析入門”，日刊工業新聞社
- [40] 日本機械学会：“モード解析の基礎と応用”，丸善株式会社
- [41] 長松昭男編著：“音・振動のモード解析と制御”，コロナ社
- [42] 邑田仁監修：“原色 樹木大図鑑”，北隆館
- [43] 林弥栄編・解説：“日本の樹木”，山と溪谷社
- [44] 田治見宏：“建築振動学”，コロナ社
- [45] Rosen R：“Optimality Principles in Biology”，Butterworths, London, 1967
- [46] Thompson D W：“On Growth and Form”，MacMillan, New York, 1945
- [47] Hertel H：“Biologie und Technik : Struktur/Form/Bewegung”，Krausskopf-Verlag, Mainz, 1963
- [48] Kamiya A, Togawa T: “Adaptive regulation of wall shear stress to flow change in the canine carotid artery Am J Physiol 239 H14-H21, 1980”, ,
- [49] Cecil D. Murray：“The Physiological Principle of Minimum Work I .The Vascular System and the cost of blood volume”，1926
- [50] Cecil D. Murray：“The Physiological Principle of Minimum Work II .Oxygen Exchange in capillaries”，1926

謝辞

はじめに、本論文を作成するにあたり、多くの方より御指導、御協力を賜りましたので、ここに感謝の意を述べさせていただきます。

私が、あの「開かずの扉（吉田研への入り口）」を開いてから、早くも3年が経とうとしています。吉田研に入るまでは、私は大学にあまり来ていませんでしたが、当時の吉田研の先輩である「加藤さん」「青野さん」という2人の偉大な先輩と出会ったことで、私の人生が大きく変わりました。お二人とも、とても後輩思いで、大変努力家な方達でした。いつしか、私もそのような先輩達に少しでも近づきたいと思うようになり、大学4年の頃からゼミに通うようになりました。そのゼミの中で最も苦勞したことと言えば、私が初めてFORTRANを使い、作成することになった「Runge Kutta 法」という手法のプログラムです。大学4年の夏を、このプログラムに全て捧げた学生は、日本では私が初めてだと今でも自負しております。無論、その際の二人の先輩から受けたご指導やアドバイスが、今の私の源になっていることは言うまでもありません。この場をお借りして、深く感謝の意を申し上げます。

また、この論文を作成するにあたり、修士1年の「渡辺君」には、公私共に大変お世話になりました。有難う。貴方の将来の活躍を誰よりも心待ちにしております。さらに、この研究の創設者である「清井さん」「佐藤君」、6年間の中で共に過ごした時間が最も長く今回の論文にも多いに貢献してくれた「畠山君」、多彩な知恵で私を救ってくれた「伊野君」、ミス法政の呼び声も高く建築学科始まって以来の美女2人組「下山さん」「宮崎さん」、何でも気が利く「三浦君」、公私共にメンタル面において私を支えてくれた「古谷君」、Javaを教えてくれた「安川君」、共にスポーツで汗を流した佐々木研究室の「榎本君」「高瀬君」、これから共に建設業界を盛り上げていく佐々木研究室の「高橋君」…みんな、本当に有難う。

そして、枯れ果てたケヤキのような私に、これまで長い間、温かく水を撒き続けて下さった指導教官である「吉田長行 教授」には、学問だけでなく、人としての在り方までも、ご指導して頂いたことに、深く感謝の意を申し上げます。吉田教授の様な「人生における師」との出会いは、私にとって大きな財産です。また、「佐々木 睦朗教授」、「坪井 善隆教授」、「阿部 優専任講師」においても、学部時代から丁寧なご指導をして頂いた事に深く感謝の意を申し上げます。

繰り返しになりますが、学生生活において御指導、御協力して下さった多くの方々に、改めて深く感謝の意を申し上げます。これでもう、学生生活に忘れ物はありません。これからは社会人として、また法政大学・吉田研のOBとして、恥じる事のないように日々精進していきます。

最後に、これまで私を支えてくれた家族に深く、深く感謝の意を申し上げます。本当に有難う。

2008年2月吉日

西川 元徳 (Yoshida Lab)