

等高定速二脚步行のための関節軌道生成

内田, 翔 / UCHIDA, Sho

(発行年 / Year)

2007-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2007-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

法政大学大学院 工学研究科 電気工学専攻
平成 18 年度 修士論文

等高定速二脚歩行のための完成軌道生成

A generated joint trajectory for biped walking with
constant height and velocity

小林尚登研究室 05R3207 内田 翔
ウチダ ショウ

指導教員

法政大学	小林 尚登
	中村 秀男
理化学研究所	川端 邦明
東海大学	稲垣 克彦

Abstract

Biped walking robots have several superior points: ability of stepping up or down stairs, selecting appropriate landing points, passing over obstacles and so on. So, these robots could be used for people who can't walk, substitute for wheel chair. However the most popular researches are copy of human walking motion. This walking motion makes robot's body go up and down, and the velocity will change in time. This action isn't good for who is sitting on it. Thus we try to derive a joint angle trajectory set which keeps the main body moving at a constant height and velocity.

本論文の構成

本論文は、全体が6章から構成される。

1章では、本研究の背景について述べる。第2章で提案する歩行動作と前提条件、第3章では関節軌道生成の拘束条件、第4章では関節軌道生成方法について述べる。さらに、第5章では、提案動作のシミュレーション、実機実験により検証する。そして最後に、第6章で結論を述べる。

目次

第 1 章	はじめに.....	1
第 2 章	提案する歩行動作と前提条件	3
第 3 章	関節軌道生成の拘束条件.....	5
3.1	立脚の関節軌道生成条件	6
3.2	遊脚の関節軌道生成条件	8
第 4 章	関節軌道生成方法.....	11
第 5 章	関節軌道生成結果と考察.....	12
5.1	Simulink によるシミュレーション.....	13
5.2	実機による検証	16
第 6 章	おわりに.....	18
謝辞		19
参考文献		20
第 A 章	他の指標による軌道生成.....	21
A.1	他の指標	21
A.2	他の指標による結果	23

第 B 章	付録 1 : Mathematica	2 6
B.1	各関節軌道生成手順	2 6
B.2	状態方程式.....	3 4

目 次

Fig 2.1	Walking motion with main body moving at a constant height and velocity.....	4
Fig 3.1	Definition of the parameters	5
Fig 3.2	Example of smooth joint trajectory	10
Fig 5.1	Trajectory of joint angle	13
Fig 5.2	Trajectory of joint angular velocity	14
Fig 5.3	Trajectory of joint angular acceleration.....	14
Fig 5.4	Simulation	15
Fig 5.5	Experiment with real robot	17
Fig A.1	Simulation of like gliding steps	24
Fig A.2	Like gliding steps with real robot	25

第1章 はじめに

近年二脚歩行ロボットの研究が盛んに行われており、本田技研工業株式会社の「asimo」や、ソニー株式会社の「QRIO」などが有名である。また、2005 年に行われた「愛地球博」ではトヨタ自動車株式会社が、乗用の二脚歩行ロボット「i-foot」の発表を行った。

「i-foot」は、人間を乗せて階段の上り下りもできる二脚歩行ロボットである。これは、足の不自由な人間のための生活支援機器として利用が期待できる。

現在、足の不自由な人間に与えられている移動手段は、車椅子が主流である。しかし、これには以下に挙げる欠点がある。

<1>移動に制限が生じてしまう。

階段のような段差を上り下りすることはできない。また、その場から前後以外の方向への移動には時間が掛かり、咄嗟に方向転換することが困難である。

<2>他人の手を借りなくてはできない行動が出てくる。

例えば、高いところにある物を取る動作などである。これは、足が不自由になる以前まで自分でできていた人間にとっては悲しいことである。

生活支援機器として二脚歩行機械を利用すると、以上に挙げた欠点が解消すると考えられる。しかし、現在行われている二脚歩行ロボットの研究の多くは、人間の歩行を模倣したものである。これは、二脚歩行ロボットの胴体部以上が上下動する動作になる。人間は、立っている時よりも、座っている時、また、乗馬のような上下動をするものに座っている時は、腰に負担がかかる。人間を乗せて歩行する乗り物として考える場合、乗員の腰への負担を考慮すべきだと考えられる。

そこで本研究では、二脚歩行機械の胴体部に人間を乗せる場合を想定し、乗員の腰に負担を与えない安定した歩行運動にすることを目的とする。また、二脚歩行機械の各関節に必要な仕事量を最小にする歩行動作を提案する。

第2章 提案する歩行動作と前提条件

Fig 2.1 に本研究で考える歩行運動を示し，以下に前提条件を示す．

- ①胴体部を等高定速で歩行
 - ②胴体姿勢を鉛直維持
 - ③平地定常歩行・二次元での検証
 - ④足裏は十分広く，ZMPを考慮しない
 - ⑤足先の衝突を無視
 - ⑥歩行一步分の始点・終点時の各関節角度を初期指定
 - ⑦歩行一步に必要な時間 $T[\text{sec}]$ を初期指定
 - ⑧関節軌道を時間関数で生成
 - ⑨膝関節を順関節とする
 - ⑩立脚⇔遊脚入れ替わり時に各関節角度・角速度・角加速度を滑らかな軌道にする
 - ⑪全体の仕事を最小とする関節軌道を生成
 - ⑫実際のロボットでは位置制御を行う
-

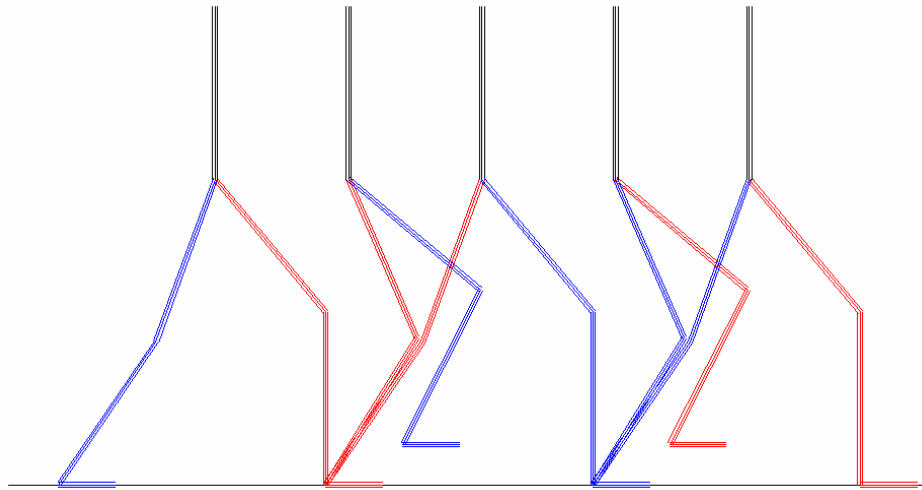


Fig 2.1 Walking motion with main body moving at a constant height and velocity

第3章 関節軌道生成の拘束条件

ここでは、前述の条件を満たす、各関節の軌道生成における拘束条件について論じる。各パラメータの設定を Fig 3.1 に示し、これを元に立脚・遊脚それぞれで行う。

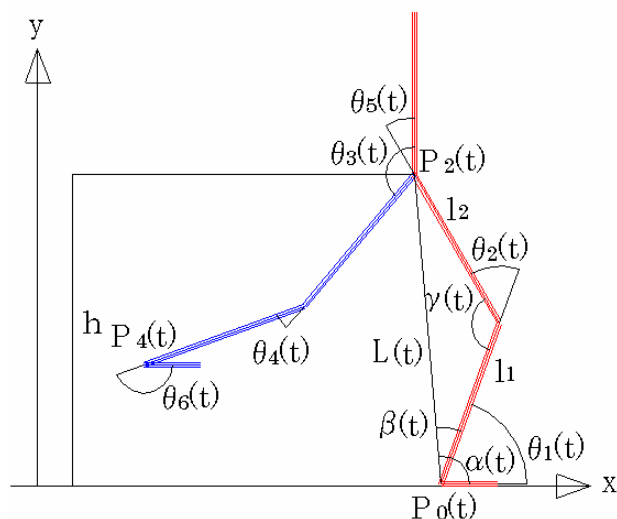


Fig 3.1 Definition of the parameters

3.1 立脚の関節軌道生成条件

立脚の関節 $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ は胴体部の高さ・速度を, $\theta_5(t)$ は胴体部の姿勢を決定付ける. よって, 前提条件①, ⑦より, 胴体部は等高定速に保ち, 一歩に必要な時間が決まっているので, (1)式を得る. ここで, s は一歩歩行した際に胴体部が移動する距離である.

$$\begin{cases} P_{0x}(t) = 0 \\ P_{0y}(t) = 0 \\ P_{2x}(t) = st / T \\ P_{2y}(t) = h \end{cases} \quad (1)$$

前提条件⑥より, 各関節の一歩分の始点・終点時の角度が決まっているので, $P_0(t)$, $P_2(t)$ の一歩分の始点・終点時の関係も決まる. また前提条件⑨より, (2)式の逆キネマティクスを解くことで, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ が(3)式でそれぞれ一意に導出される. また, $\theta_5(t)$ については, 前提条件②より, (4)式で表すことができる.

$$\begin{cases} L(t) = \sqrt{(P_{2x}(t) - P_{0x}(t))^2 + (P_{2y}(t) - P_{0y}(t))^2} \\ \alpha(t) = \cos^{-1} \left(\frac{P_{2x}(t) - P_{0x}(t)}{L(t)} \right) \\ \beta(t) = \cos^{-1} \left(\frac{l_1^2 + L^2(t) - l_2^2}{2l_1 L(t)} \right) \\ \gamma(t) = \cos^{-1} \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - L^2(t)}{2l_1 l_2} \right) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \alpha(t) - \beta(t) \\ \theta_2(t) = \pi - \gamma(t) \end{cases} \quad (3)$$

$$\theta_5(t) = \pi/2 - (\theta_1(t) + \theta_2(t)) \quad (4)$$

3.2 遊脚の関節軌道生成条件

遊脚の関節 $\theta_3(t)$, $\theta_4(t)$, $\theta_6(t)$ の軌道については、胴体への影響がなく、ZMP を考慮しないことから、どのような関節軌道を描いても良い。しかし、前提条件⑩に記述した通り、立脚と遊脚入れ替わる際に、各関節角度、角速度、角加速度が滑らかな軌道にする。こうすることで、各関節に急激なトルク変化などで負担を与えることなく歩行運動が可能となる。これは、本研究の目的とする、乗員の腰に負担を与えない安定した歩行にもつながる。この条件を考慮したものを式で表すと(5), (6)式となる。(5), (6)式はそれぞれ $\theta_3(t)$, $\theta_4(t)$ に対する条件である。これらは共に、一行目の式が一步の始点時の角度、二行目が一步の終点時の角度である。さらに、三、四行目が、各関節の立脚側終点時の速度と、遊脚側始点時の速度、またその逆が等しくなる条件である。このような条件とすることで、Fig 3.2 に示すように、関節角度軌道が滑らかになり、前提条件⑩を満たすものとなる。同様に、五、六行目が加速度、七、八行目がジャークに対する条件である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_3(0) = \theta_3(0) \\ \theta_3(T) = \theta_3(T) \\ \theta'_3(0) = -\theta'_5(T) \\ \theta'_3(T) = -\theta'_5(0) \\ \theta''_3(0) = -\theta''_5(T) \\ \theta''_3(T) = -\theta''_5(0) \\ \theta'''_3(0) = -\theta'''_5(T) \\ \theta'''_3(T) = -\theta'''_5(0) \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\begin{cases} \theta_4(0) = -\theta_2(T) \\ \theta_4(T) = -\theta_2(0) \\ \theta'_4(0) = -\theta'_2(T) \\ \theta'_4(T) = -\theta'_2(0) \\ \theta''_4(0) = -\theta''_2(T) \\ \theta''_4(T) = -\theta''_2(0) \\ \theta'''_4(0) = -\theta'''_2(T) \\ \theta'''_4(T) = -\theta'''_2(0) \end{cases} \quad (6)$$

足首関節については，地面と水平を保つ起動とする（(7)式）．前提条件⑥により，一步の始点・終点時の各関節角度が決まっているので，膝・股関節の関係が(8)式で表すことができる．(7)，(8)式と，前述した(4)式より(9)式が求まり，足首関節の軌道が前提条件⑥を満たすこととなる．

$$\theta_6(t) = 3\pi/2 - (\theta_3(t) + \theta_4(t)) \quad (7)$$

$$\begin{cases} \theta_2(0) = -\theta_4(T) \\ \theta_5(0) = \pi - \theta_3(T) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \theta_6(0) &= 3\pi/2 - (\theta_3(0) + \theta_4(0)) \\ &= 3\pi/2 - (\pi - \theta_5(T) - \theta_2(T)) \\ &= \pi/2 + (\pi/2 - (\theta_1(T) + \theta_2(T))) + \theta_2(T) \\ &= \pi - \theta_1(T) \end{aligned} \quad (9)$$

遊脚に対する，以上の条件から各関節軌道を導出する際に， $\theta_3(t)$ ， $\theta_4(t)$ ， $\theta_6(t)$ の関節駆動範囲と遊脚先端y座標が条件式(10)を満たすものとする．

$$\begin{cases} \pi/2 < \theta_3(t) < 3\pi/2 \\ -\pi/2 < \theta_4(t) \leq 0 \\ 0 \leq \theta_6(t) \leq \pi \\ P_{4y}(t) \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

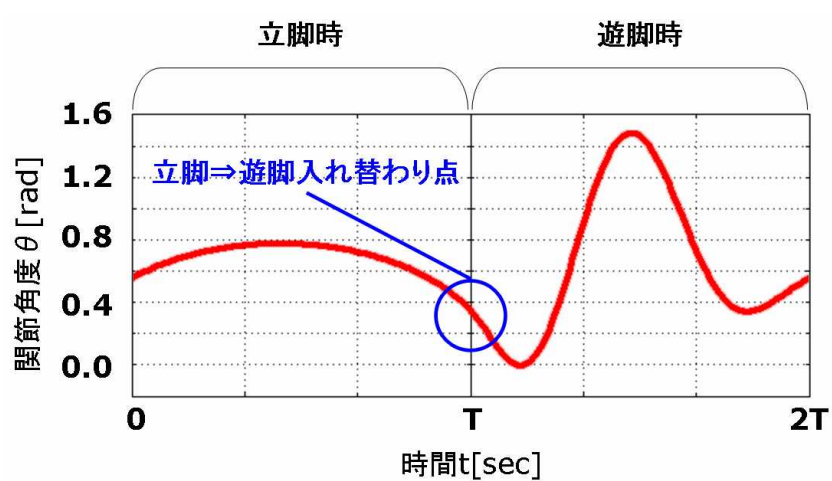


Fig 3.2 Example of smooth joint trajectory

第4章 関節軌道生成方法

第3章で挙げた各関節軌道生成条件より，各関節の軌道を時間関数で生成する．しかし $\theta_1(t)$ ， $\theta_2(t)$ ， $\theta_5(t)$ については，それぞれ一意に決定しており， $\theta_6(t)$ については， $\theta_3(t)$ ， $\theta_4(t)$ に依存することから， $\theta_3(t)$ と $\theta_4(t)$ の時間関数を導出することになる．

$\theta_3(t)$ ， $\theta_4(t)$ の関節軌道生成条件は前述したとおり，(5)，(6)式を満たすものとする．この条件を満たすには，7次式で足りるが，前提条件⑩に記したとおり，全体の仕事を最小になる関節軌道を求めたい．そこで，本研究では冗長度をそれぞれに2個持たせた(11)式に示す9次式で $\theta_3(t)$ ， $\theta_4(t)$ の関節軌道生成を試みる．

軌道生成の手順としては， $\theta_3(t)$ ， $\theta_4(t)$ それぞれの9次式の0~7次の係数($a_{n0} \sim a_{n7}$)を，条件式(5)，(6)より連立方程式を解くことで8，9次の係数(a_{n8} ， a_{n9})で表す(第B章B.1)．この冗長係数4つの値を変えることで，(12)式より，前提条件⑩に見合う冗長係数の組み合わせをC言語にて探索する．また，(12)式にあるトルク $\tau_n(t)$ を導出する式については，第B章B.2に記す．

$$\begin{aligned} \theta_n(t) = & a_{n0} + a_{n1}t + a_{n2}t^2 + a_{n3}t^3 + a_{n4}t^4 \\ & + a_{n5}t^5 + a_{n6}t^6 + a_{n7}t^7 + a_{n8}t^8 + a_{n9}t^9 \end{aligned} \quad (11)$$

$(n = 3, 4)$

$$\sum_{n=1}^6 \sum_{t=0}^T (\tau_n(t)(\theta_n(t-1) - \theta_n(t)))^2 \Big|_{\min} \quad (12)$$

第5章 関節軌道生成結果と考察

前述した全ての条件を満たす歩行運動のための、冗長係数の値を求めることができた。この値を使用して、Simulink および実機による検証を行った。

5.1 Simulink によるシミュレーション

導出された冗長係数の値から，Simulink を使用して各関節の軌道を計算させながら動作シミュレーションを行った．立脚と遊脚の入れ替わる際の歩行開始 1.5[sec]後の，角度・角速度・各加速度が，前提条件⑩のとおり滑らかな変化となったことが，Fig 5.1, Fig 5.2, Fig 5.3 より見て取れる．Fig 5.4 は，0[sec]から 0.1[sec]ごとの連続写真である．この図から，前提条件①，②のとおり，胴体部が等高定速・鉛直維持をしていることがわかる．

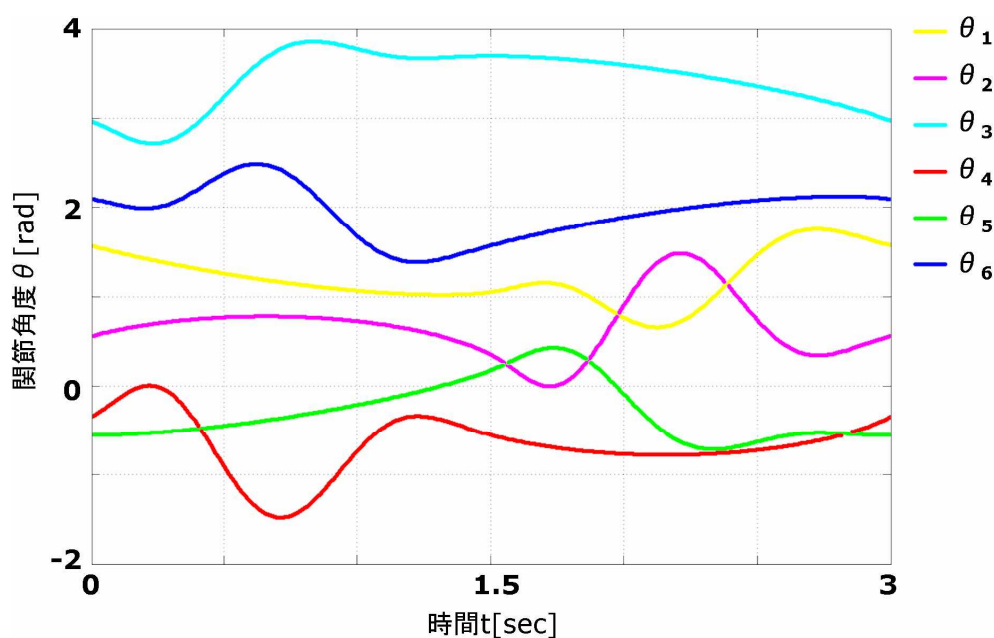


Fig 5.1 Trajectory of joint angle

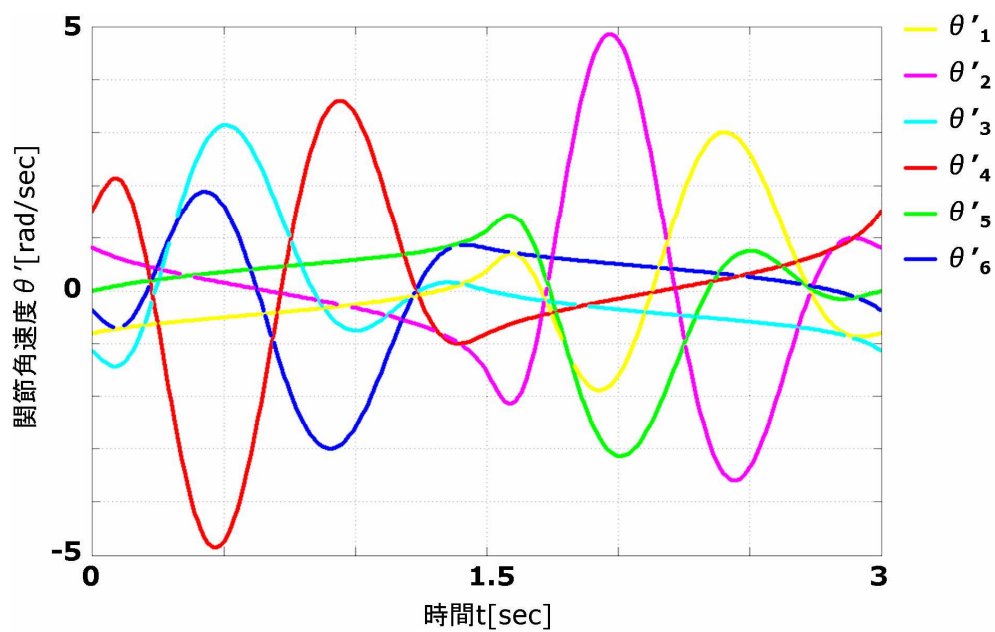


Fig 5.2 Trajectory of joint angular velocity

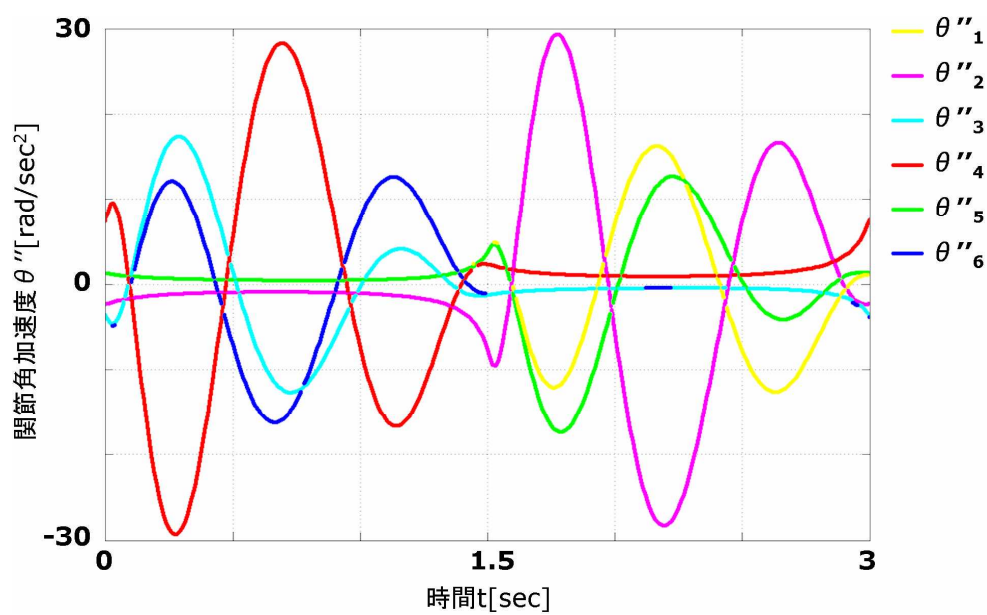


Fig 5.3 Trajectory of joint angular acceleration

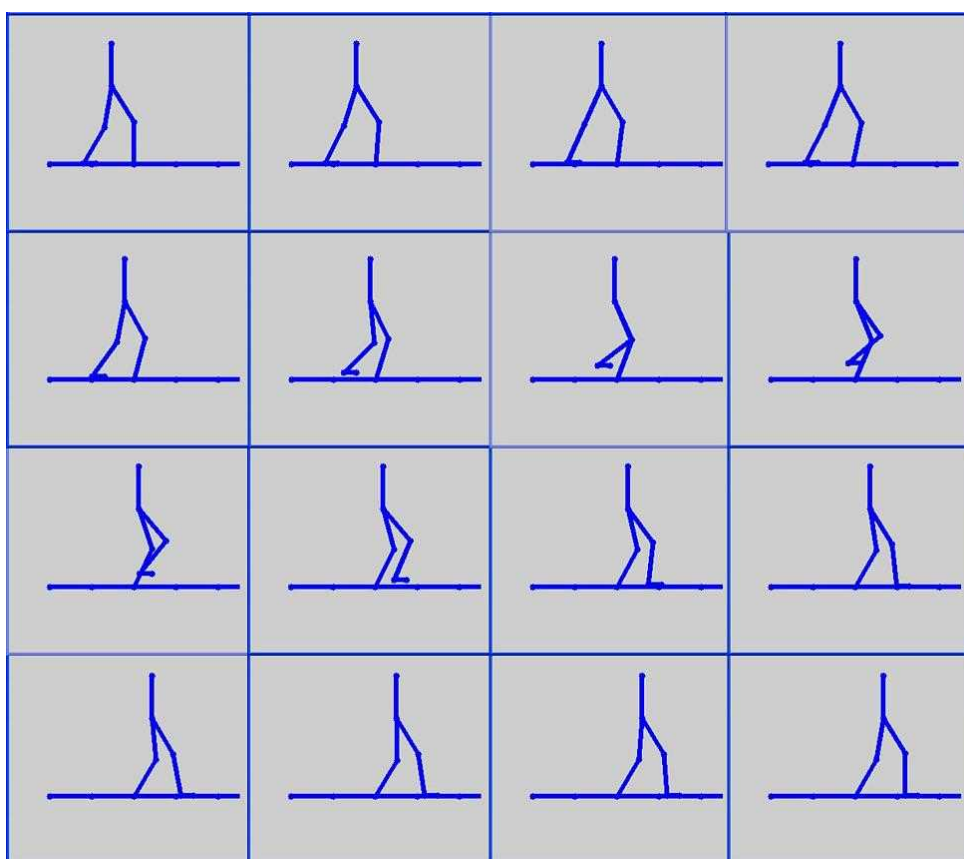


Fig 5.4 Simulation

5.2 実機による検証

近藤科学株式会社の二脚歩行ロボット「KHR-2HV」に同じ関節軌道を与えたところ、遊脚側への重心移動が生じてしまうため、立脚側に重心を移動させる必要があった。そのため、微小ではあるが、胴体部に上下左右への動きが生じた。これは、遊脚が地面から離れる際に、立脚の足先から遊脚側へ棒状のものが突出することで、遊脚側への重心移動を妨げることができると考えられる。前後方向の速度については、今回は位置制御を行っており、一步に対し、15 分割の位置指令しか行っていない。そのため、シミュレーションどおりに胴体部を定速に保つ歩行運動とはならなかった。この改善策としては、より細かい位置指令を出すほか、速度制御も加えることが考えられる。

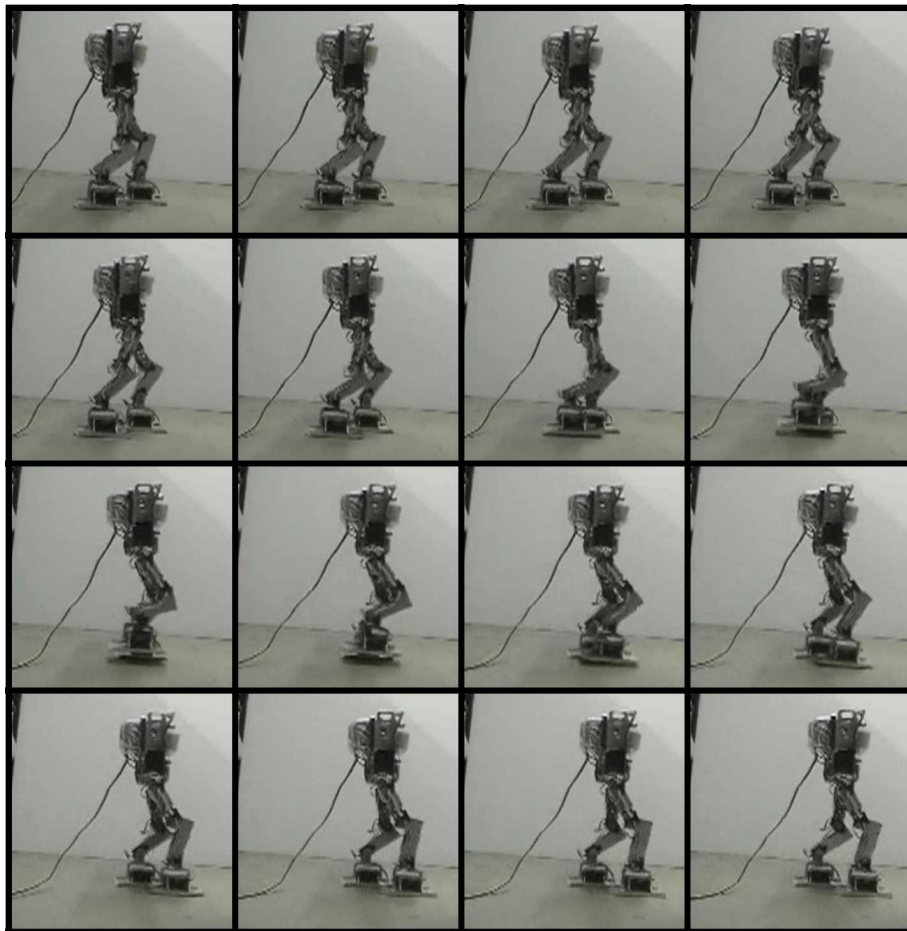


Fig 5.5 Experiment with real robot

第6章 おわりに

本稿では、人間を胴体部に乗せる二脚歩行機械を想定し、胴体部を安定させる歩行運動を提案した。これを実現するに当たり、いくつかの条件化の元、全体の仕事量が最小となる関節軌道を導出し、シミュレーションおよび実機による実験を行った。

今後の課題として、前提条件で初期指定した、一歩分の始点・終点時の各関節角度、一歩に必要な時間を変更した場合に、どのような歩行動作となるか。さらに、今回は平地定常歩行時での二脚歩行運動を考えたが、坂道や階段の上り下りでの歩行を考える必要がある。

謝辞

まず、小林尚登教授に感謝の意を申し上げます。教授には、研究の知識とアイデアを提供して頂いただけでなく、様々な面でご指導いただきました。

中村秀男先生には、予算の面において多大な労力を費やしていただき大変感謝しております。

3年間川端先生、稲垣先生には大変お世話になりました。それぞれ正規の勤務地における活動がお忙しいにもかかわらず、わざわざ法政大学まで足を運んでいただき、われわれの研究について親身になって相談に乗っていただきありがとうございます。特に、川端先生には様々なアイデアの提供、論文の構成、発表の練習等、言葉には表せないほどのご迷惑をおかけしました。稲垣先生は、豊富な知識と経験でご指導アドバイスをいただきました。

最後に、本研究を共に励んできた同期の鎌形君、ならびに先輩後輩の皆様に対して、感謝の意を申し上げて本論文の結びとさせていただきます。

参考文献

- [1] 島亮一, 拝司雅彦, 柴田昌明 : “ 冗長脚二足歩行ロボットにおける腰の等高定速移動の歩行制御 ”, 電気学会論文誌 D, 125 巻 6 号, 2005 年
 - [2] 菅原雄介, 円戸辰郎, 細畠拓也, 御厨裕, LIM H-O, 高西淳夫 : “ ヒトの運搬を目指した 2 足移動モジュールの開発 ”, 日本機械学会福祉工学シンポジウム講演論文集, Vol.3rd Page.153-156, 2003.11.07
 - [3] 長谷岳誠, 小野京右, HUANG Qingjiu : “ 最小エネルギー 2 足歩行機構の研究 ”, 日本機械学会機械力学・計測制御部門講演会論文集, Vol.2004 Page.715, 2004
 - [4] Kawatani Laboratory Homepage, “ SIMULINK 入門編 ”, <<http://feedback.mech.fukui-u.ac.jp/simulink/simu1.htm>>
 - [5] 望月好二, “ MATLAB ”, Welcome to Motizuki's Lab.(Electronic Circuit), <<http://www-ec.denki.numazu-ct.ac.jp/matlab/>>
 - [6] J.W.Grizzle, Gabriel Abba, Franck Pestan : “ Asymptotically Stable Walking for Biped Robots : Analysis via Systems with Impulse Effects ”, Automatic Control, IEEE Transactions on, Vol.46, Page.51-64, 2001
 - [7] 内田翔, 川端邦明, 小林尚登 : “ 等高定速二脚歩行のための関節軌道生成手法 ”, 計測自動制御学会 システムインテグレーション部門, 2006
-

第A章 他の指標による軌道生成

A.1 他の指標

本編では，関節軌道生成を行う際の指標として，仕事量が最小となるものとした．しかし，以下に挙げる他の指標でも効率が良いと考え，関節軌道を導出し，シミュレーションを行った．

角度の二乗和が最小

$$\sum_{n=1}^6 \sum_{t=0}^T \theta_n^2(t) \Big|_{\min} \quad (13)$$

角速度の二乗和が最小

$$\sum_{n=1}^6 \sum_{t=0}^T \dot{\theta}_n^2(t) \Big|_{\min} \quad (14)$$

角加速度の二乗和が最小

$$\sum_{n=1}^6 \sum_{t=0}^T \ddot{\theta}_n^2(t) \Big|_{\min} \quad (15)$$

ジャークの二乗和が最小

$$\sum_{n=1}^6 \sum_{t=0}^T \theta_n''^2(t) \Big|_{\min} \quad (16)$$

ハミルトンの原理

$$\int_0^T L(t) dt \Big|_{\min} \quad (17)$$

トルクの二乗和が最小

$$\sum_{n=1}^6 \sum_{t=0}^T \tau^2(t) \Big|_{\min} \quad (18)$$

A.2 他の指標による結果

前述した，(13)～(18)式の指標によって得られた歩行動作は，大きく分けて二通りに大別された．一つは，本編で得られた足を上げる歩行動作であり，シミュレーションした結果は見分けが付かないほど差であった．もう一つは，「能」の歩行方法である「すり足」に類似した歩行動作となった．それぞれ，どの指標がどちらの歩行動作となったのかを Table A-1 に示す．

Table A-1 Two types of biped walking

足を持ち上げる歩行動作	すり足に類似した歩行動作
ハミルトンの原理	角度の二乗和が最小
トルクの二乗和が最小	角速度の二乗和が最小
仕事量が最小	角加速度の二乗和が最小
	ジャークの二乗和が最小

さらに，すり足に類似した歩行動作のシミュレーションを Fig A.1 に，実機による歩行動作の結果を Fig A.2 に示す．

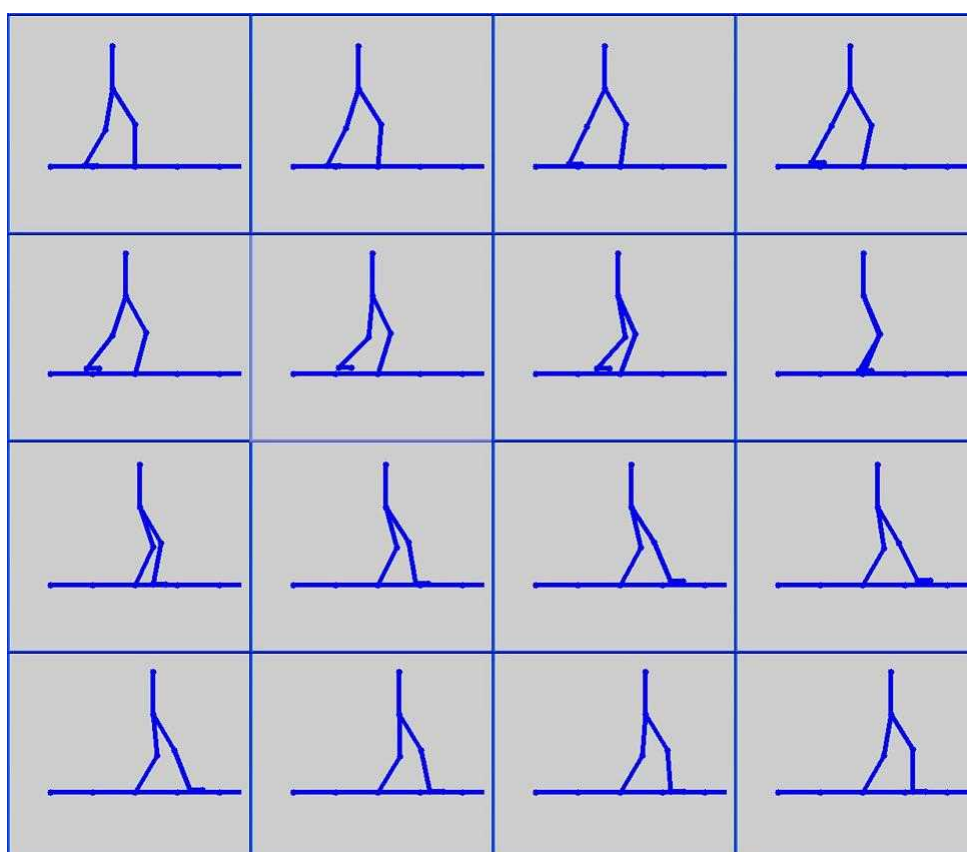


Fig A.1 Simulation of like gliding steps



Fig A.2 Like gliding steps with real robot

第B章 付録 1：Mathmatica

B.1 各関節軌道生成手順

θ_1 & θ_2 の方程式

設定

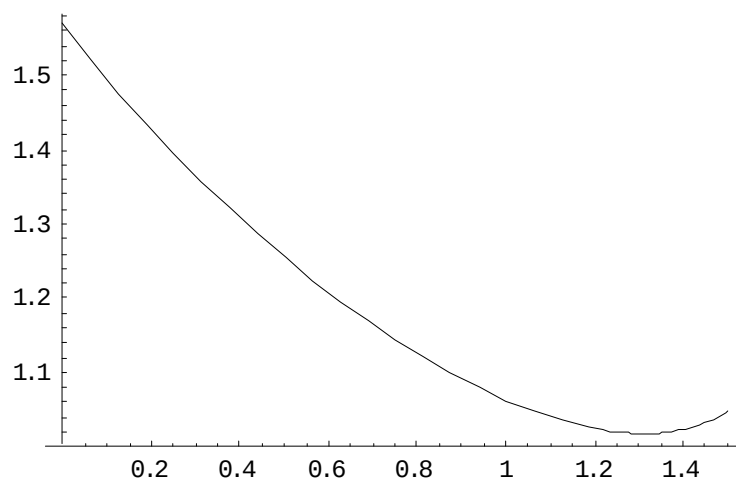
```
a=ArcCos((h-l)/l);  
h=l Sin(X)+l Sin(X+Y);  
AC=l Cos(X)+l Cos(X+Y)+l Sin(ArcCos((h-l)/l));  
R=l Cos(X)+l Cos(X+Y);  
x1=AC t/T-(AC-R);  
L1=Sqrt((x1-x0)^2+(y1-y0)^2);  
A1=ArcCos((x1-x0)/L1);  
B1=ArcCos((l^2+L1^2-l^2)/(2 L1 l));  
R1=ArcCos((l^2-L1^2+l^2)/(2 l l));  
T=1.5;  
X=60* $\pi$ /180;  
Y=20* $\pi$ /180;  
x0=0;  
y0=0;  
y1=h;  
l=1;
```

$\theta 1, \theta 2, \theta 5$

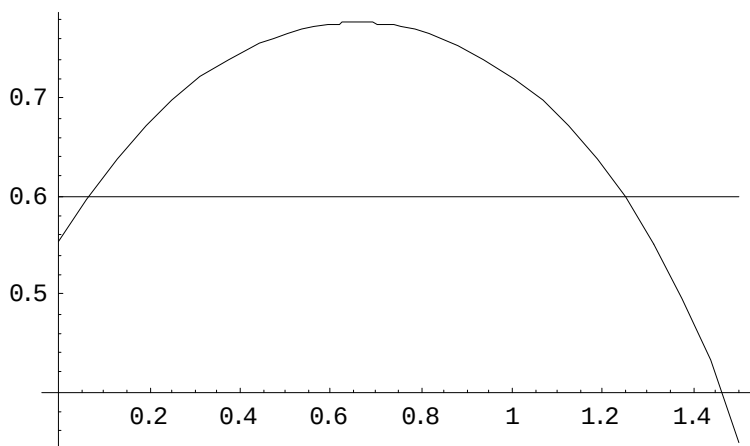
```
O1=A1-B1;  
O2= $\pi$ -R1;  
O5=FullSimplify[ $\pi/2$ -(O1+O2)];  
dO1=D[O1, t];  
dO2=Simplify[D[O2, t]];  
dO5=FullSimplify[D[O5, t]];  
ddO1=D[dO1, t];  
ddO2=Simplify[D[dO2, t]];  
ddO5=Simplify[D[dO5, t]];  
dddO1=D[ddO1, t];  
dddO2=Simplify[D[ddO2, t]];  
dddO5=D[ddO5, t];
```

 $\theta 1, \theta 2, \theta 5$ の波形

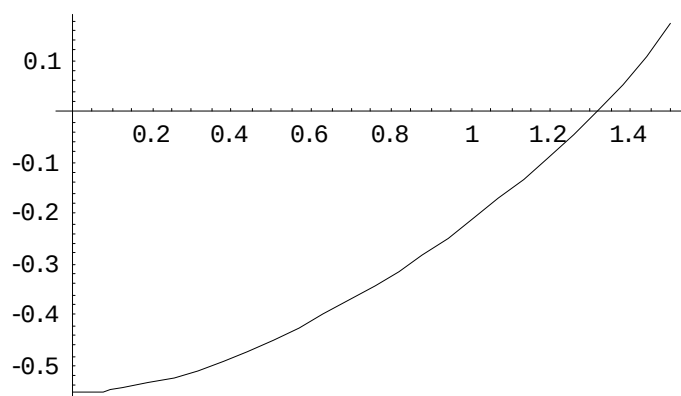
```
Plot[O1, {t, 0, T}];
```



```
Plot[{02, 0.6}, {t, 0, T}];
```



```
Plot[{05}, {t, 0, T}];
```



θ_3 & θ_4 の方程式

θ_3

多項式

$$\theta_3(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3 + a_5 t^4 + a_6 t^5 + a_7 t^6 + a_8 t^7 + a_9 t^8 + a_{10} t^9$$

条件式

$$\theta_3(0)=\pi/2+X+Y$$

$$\theta_3(T)=\pi+a$$

$$\theta_3'(0)=-\theta_5'(T)$$

$$\theta_3'(T)=-\theta_5'(0)$$

$$\theta_3''(0)=-\theta_5''(T)$$

$$\theta_3''(T)=-\theta_5''(0)$$

$$\theta_3'''(0)=-\theta_5'''(T)$$

$$\theta_3'''(T)=-\theta_5'''(0)$$

未知数 10

式 8

dO50=ReplaceAll[D[O5, t], t→0];

dO5T=ReplaceAll[D[O5, t], t→T];

ddO50=ReplaceAll[D[D[O5, t], t], t→0];

ddO5T=ReplaceAll[D[D[O5, t], t], t→T];

dddO50=ReplaceAll[D[D[D[O5, t], t], t], t→0];

dddO5T=ReplaceAll[D[D[D[O5, t], t], t], t→T];

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 & T^4 & T^5 & T^6 & T^7 & T^8 & T^9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 & 4T^3 & 5T^4 & 6T^5 & 7T^6 & 8T^7 & 9T^8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6T & 12T^2 & 20T^3 & 30T^4 & 42T^5 & 56T^6 & 72T^7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24T & 60T^2 & 120T^3 & 210T^4 & 336T^5 & 504T^6 \end{pmatrix};$$

$$AA = \begin{pmatrix} aa1 \\ aa2 \\ aa3 \\ aa4 \\ aa5 \\ aa6 \\ aa7 \\ aa8 \\ aa9 \\ aa10 \end{pmatrix};$$

$$HH = \begin{pmatrix} \pi / 2 + X + Y \\ \pi + a \\ -d05T \\ -d050 \\ -dd05T \\ -dd050 \\ -ddd05T \\ -ddd050 \end{pmatrix};$$

$$TT.AA==HH;$$

$$\begin{pmatrix} TT1 & TT2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AA1 \\ AA2 \end{pmatrix} = HH$$

$$AA1 = \text{Inverse}[TT1] \left(HH - TT2 \begin{pmatrix} aa \\ bb \end{pmatrix} \right)$$

$$TT1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 & T^4 & T^5 & T^6 & T^7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 & 4T^3 & 5T^4 & 6T^5 & 7T^6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6T & 12T^2 & 20T^3 & 30T^4 & 42T^5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24T & 60T^2 & 120T^3 & 210T^4 \end{pmatrix};$$

$$TT2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T^8 & T^9 \\ 0 & 0 \\ 8T^7 & 9T^8 \\ 0 & 0 \\ 56T^6 & 72T^7 \\ 0 & 0 \\ 336T^5 & 504T^6 \end{pmatrix};$$

$$AA1 = \begin{pmatrix} aa1 \\ aa2 \\ aa3 \\ aa4 \\ aa5 \\ aa6 \\ aa7 \\ aa8 \end{pmatrix};$$

$$AA2 = \begin{pmatrix} aa9 \\ aa10 \end{pmatrix};$$

aa9=bb;

aa10=cc;

AA3=Simplify[Inverse[TT1].(HH-TT2.AA2)]

$$\begin{pmatrix} 0. bb + 0. cc + 2.96706 \\ 0. bb + 0. cc - 1.16863 \\ 0. bb + 0. cc - 2.11692 \\ 0. bb + 0. cc - 9.70065 \\ 5.0625 bb + 30.375 cc + 45.3575 \\ -13.5 bb - 75.9375 cc - 53.2792 \\ 13.5 bb + 67.5 cc + 25.5208 \\ -6. bb - 22.5 cc - 4.43331 \end{pmatrix}$$

$\theta 4$

条件式

$$\theta 4(0)=-\theta 2(T)$$

$$\theta 4(T)=-\theta 2(0)$$

$$\theta 4'(0)=-\theta 2'(T)$$

$$\theta 4'(T)=-\theta 2'(0)$$

$$\theta 4''(0)=-\theta 2''(T)$$

$$\theta 4''(T)=-\theta 2''(0)$$

$$\theta 4'''(0)=-\theta 2'''(T)$$

$$\theta 4'''(T)=-\theta 2'''(0)$$

$$O20=\text{ReplaceAll}[O2, \ t\rightarrow 0];$$

$$O2T=\text{ReplaceAll}[O2, \ t\rightarrow T];$$

$$dO20=\text{ReplaceAll}[D[O2, \ t], \ t\rightarrow 0];$$

$$dO2T=\text{ReplaceAll}[D[O2, \ t], \ t\rightarrow T];$$

$$ddO20=\text{ReplaceAll}[D[D[O2, \ t], \ t], \ t\rightarrow 0];$$

$$ddO2T=\text{ReplaceAll}[D[D[O2, \ t], \ t], \ t\rightarrow T];$$

$$dddO20=\text{ReplaceAll}[D[D[D[O2, \ t], \ t], \ t], \ t\rightarrow 0];$$

$$dddO2T=\text{ReplaceAll}[D[D[D[O2, \ t], \ t], \ t], \ t\rightarrow T];$$

$$TTT=TT;$$

$$AAA = \begin{pmatrix} aaa1 \\ aaa2 \\ aaa3 \\ aaa4 \\ aaa5 \\ aaa6 \\ aaa7 \\ aaa8 \\ aaa9 \\ aaa10 \end{pmatrix};$$

$$HHH = \begin{pmatrix} -O2T \\ -O20 \\ -dO2T \\ -dO20 \\ -ddO2T \\ -ddO20 \\ -dddO2T \\ -dddO20 \end{pmatrix};$$

$$TTT.AAA==HHH;$$

$$\begin{pmatrix} TTT1 & TTT2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AAA1 \\ AAA2 \end{pmatrix} = HHH$$

$$AAA1 = \text{Inverse}[TTT1] \left(HHH - TTT2 \begin{pmatrix} aaa \\ bbb \end{pmatrix} \right)$$

TTT1 = TT1;

TTT2 = TT2;

$$\mathbf{AAA1} = \begin{pmatrix} \mathbf{aaa1} \\ \mathbf{aaa2} \\ \mathbf{aaa3} \\ \mathbf{aaa4} \\ \mathbf{aaa5} \\ \mathbf{aaa6} \\ \mathbf{aaa7} \\ \mathbf{aaa8} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{AAA2} = \begin{pmatrix} \mathbf{aaa9} \\ \mathbf{aaa10} \end{pmatrix};$$

aaa9=bbb;

aaa10=ccc;

AAA3=Simplify[Inverse[TTT1].(HHH-TTT2.AAA2)]

$$\begin{pmatrix} 0. \text{bbb} + 0. \text{ccc} - 0.349066 \\ 0. \text{bbb} + 0. \text{ccc} + 1.57449 \\ 0. \text{bbb} + 0. \text{ccc} + 4.33971 \\ 0. \text{bbb} + 0. \text{ccc} + 19.4236 \\ 5.0625 \text{bbb} + 30.375 \text{ccc} - 74.7438 \\ -13.5 \text{bbb} - 75.9375 \text{ccc} + 80.884 \\ 13.5 \text{bbb} + 67.5 \text{ccc} - 36.7579 \\ -6. \text{bbb} - 22.5 \text{ccc} + 6.14472 \end{pmatrix}$$

B.2 状態方程式

設定

$$\begin{aligned}
 O1 &= \theta 1[t]; \\
 O2 &= \theta 2[t]; \\
 O3 &= \theta 3[t]; \\
 O4 &= \theta 4[t]; \\
 O5 &= \theta 5[t]; \\
 O6 &= \theta 6[t]; \\
 O1' &= \partial_t \theta 1[t]; \\
 O2' &= \partial_t \theta 2[t]; \\
 O3' &= \partial_t \theta 3[t]; \\
 O4' &= \partial_t \theta 4[t]; \\
 O5' &= \partial_t \theta 5[t]; \\
 O6' &= \partial_t \theta 6[t]; \\
 O1'' &= \partial_t \theta 1'[t]; \\
 O2'' &= \partial_t \theta 2'[t]; \\
 O3'' &= \partial_t \theta 3'[t]; \\
 O4'' &= \partial_t \theta 4'[t]; \\
 O5'' &= \partial_t \theta 5'[t]; \\
 O6'' &= \partial_t \theta 6'[t];
 \end{aligned}$$

位置

$$\begin{aligned}
 P0x &= 0; \\
 P0y &= 0; \\
 P1x &= P0x + l1 \cos(O1); \\
 P1y &= P0y + l1 \sin(O1); \\
 P2x &= 2 P1x + l2 \cos(O1+O2); \\
 P2y &= 2 P1y + l2 \sin(O1+O2); \\
 P3x &= 2 P1x + 2 l2 \cos(O1+O2) + l3 \cos(O1+O2+O3+O5); \\
 P3y &= 2 P1y + 2 l2 \sin(O1+O2) + l3 \sin(O1+O2+O3+O5); \\
 P4x &= 2 P1x + 2 l2 \cos(O1+O2) + 2 l3 \cos(O1+O2+O3+O5) + l4 \\
 &\quad \cos(O1+O2+O3+O4+O5);
 \end{aligned}$$

$$P_{4y} = 2 P_{1y} + 2 l_2 \sin(O_1 + O_2) + 2 l_3 \sin(O_1 + O_2 + O_3 + O_5) + l_4 \sin(O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + O_5);$$

$$P_{5x} = 2 P_{1x} + 2 l_2 \cos(O_1 + O_2) + l_5 \cos(O_1 + O_2 + O_5);$$

$$P_{5y} = 2 P_{1y} + 2 l_2 \sin(O_1 + O_2) + l_5 \sin(O_1 + O_2 + O_5);$$

$$P_{6x} = 2 P_{1x} + 2 l_2 \cos(O_1 + O_2) + 2 l_3 \cos(O_1 + O_2 + O_3 + O_5) + 2 l_4 \cos(O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + O_5);$$

$$P_{6y} = 2 P_{1y} + 2 l_2 \sin(O_1 + O_2) + 2 l_3 \sin(O_1 + O_2 + O_3 + O_5) + 2 l_4 \sin(O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + O_5);$$

速度

$$v_{0x} = \partial_t P_{0x};$$

$$v_{0y} = \partial_t P_{0y};$$

$$v_{1x} = \partial_t P_{1x};$$

$$v_{1y} = \partial_t P_{1y};$$

$$v_{2x} = \partial_t P_{2x};$$

$$v_{2y} = \partial_t P_{2y};$$

$$v_{3x} = \partial_t P_{3x};$$

$$v_{3y} = \partial_t P_{3y};$$

$$v_{4x} = \partial_t P_{4x};$$

$$v_{4y} = \partial_t P_{4y};$$

$$v_{5x} = \partial_t P_{5x};$$

$$v_{5y} = \partial_t P_{5y};$$

$$v_{6x} = \partial_t P_{6x};$$

$$v_{6y} = \partial_t P_{6y};$$

エネルギー

並進エネルギー

$$Hei_0 = 1/2 m_0 (v_{0x}^2 + v_{0y}^2);$$

$$Hei_1 = 1/2 m_1 (v_{1x}^2 + v_{1y}^2);$$

$$Hei_2 = 1/2 m_2 (v_{2x}^2 + v_{2y}^2);$$

$$Hei_3 = 1/2 m_3 (v_{3x}^2 + v_{3y}^2);$$

$$Hei_4 = 1/2 m_4 (v_{4x}^2 + v_{4y}^2);$$

$$\text{Hei5} = 1/2 m5 (v5x^2 + v5y^2);$$

$$\text{Hei6} = 1/2 m6 (v6x^2 + v6y^2);$$

回転エネルギー-

$$\text{Kai0} = 0;$$

$$\text{Kai1} = 1/2 J1 O1'^2;$$

$$\text{Kai2} = 1/2 J2 (O1' + O2')^2;$$

$$\text{Kai3} = 1/2 J3 (O1' + O2' + O3')^2;$$

$$\text{Kai4} = 1/2 J4 (O1' + O2' + O3' + O4')^2;$$

$$\text{Kai5} = 1/2 J5 (O1' + O2' + O5')^2;$$

$$\text{Kai6} = 1/2 J6 (O1' + O2' + O3' + O4' + O6')^2;$$

位置エネルギー-

$$\text{Iti0} = m0 g P0y;$$

$$\text{Iti1} = m1 g P1y;$$

$$\text{Iti2} = m2 g P2y;$$

$$\text{Iti3} = m3 g P3y;$$

$$\text{Iti4} = m4 g P4y;$$

$$\text{Iti5} = m5 g P5y;$$

$$\text{Iti6} = m6 g P6y;$$

ラグランジュの運動方程式

ラグランジアン

$$\begin{aligned} L = & \text{Hei0} + \text{Hei1} + \text{Hei2} + \text{Hei3} + \text{Hei4} + \text{Hei5} + \text{Hei6} + \\ & \text{Kai0} + \text{Kai1} + \text{Kai2} + \text{Kai3} + \text{Kai4} + \text{Kai5} + \text{Kai6} - \\ & (\text{Iti0} + \text{Iti1} + \text{Iti2} + \text{Iti3} + \text{Iti4} + \text{Iti5} + \text{Iti6}); \end{aligned}$$

ラグランジュの運動方程式

$$T1 = \partial_t \partial_{01} L - \partial_{01} L;$$

$$T2 = \partial_t \partial_{02} L - \partial_{02} L;$$

$$T3 = \partial_t \partial_{03} L - \partial_{03} L;$$

$$T4 = \partial_t \partial_{04} L - \partial_{04} L;$$

$$T5 = \partial_t \partial_{05} L - \partial_{05} L;$$

$$T6 = \partial_t \partial_{06} L - \partial_{06} L;$$

慣性行列項

$$M11 = \partial_{01} T1;$$

$$M12 = \partial_{02} T1;$$

$$M13 = \partial_{03} T1;$$

$$M14 = \partial_{04} T1;$$

$$M15 = \partial_{05} T1;$$

$$M16 = \partial_{06} T1;$$

$$M21 = \partial_{01} T2;$$

$$M22 = \partial_{02} T2;$$

$$M23 = \partial_{03} T2;$$

$$M24 = \partial_{04} T2;$$

$$M25 = \partial_{05} T2;$$

$$M26 = \partial_{06} T2;$$

$$M31 = \partial_{01} T3;$$

$$M32 = \partial_{02} T3;$$

$$M33 = \partial_{03} T3;$$

$$M34 = \partial_{04} T3;$$

$$M35 = \partial_{05} T3;$$

$$M36 = \partial_{06} T3;$$

$$M41 = \partial_{01} T4;$$

$$M42 = \partial_{02} T4;$$

$$M43 = \partial_{03} T4;$$

$$M44 = \partial_{04} T4;$$

$$M45 = \partial_{05} T4;$$

$$M46 = \partial_{06} T4;$$

$$M51 = \partial_{01}{}' T5;$$

$$M52 = \partial_{02}{}' T5;$$

$$M53 = \partial_{03}{}' T5;$$

$$M54 = \partial_{04}{}' T5;$$

$$M55 = \partial_{05}{}' T5;$$

$$M56 = \partial_{06}{}' T5;$$

$$M61 = \partial_{01}{}' T6;$$

$$M62 = \partial_{02}{}' T6;$$

$$M63 = \partial_{03}{}' T6;$$

$$M64 = \partial_{04}{}' T6;$$

$$M65 = \partial_{05}{}' T6;$$

$$M66 = \partial_{06}{}' T6;$$

コリオリカ項

$$h11 = \partial_{01}{}' T1;$$

$$h12 = \partial_{02}{}' T1;$$

$$h13 = \partial_{03}{}' T1;$$

$$h14 = \partial_{04}{}' T1;$$

$$h15 = \partial_{05}{}' T1;$$

$$h16 = \partial_{06}{}' T1;$$

$$h21 = \partial_{01}{}' T2;$$

$$h22 = \partial_{02}{}' T2;$$

$$h23 = \partial_{03}{}' T2;$$

$$h24 = \partial_{04}{}' T2;$$

$$h25 = \partial_{05}{}' T2;$$

$$h26 = \partial_{06}{}' T2;$$

$$h31 = \partial_{01}{}' T3;$$

$$h32 = \partial_{02}{}' T3;$$

$$h33 = \partial_{03}{}' T3;$$

$$h34 = \partial_{04}{}' T3;$$

$$h35 = \partial_{05}{}' T3;$$

$$h36 = \partial_{06}{}' T3;$$

$$h41 = \partial_{01}{}' T4;$$

$$h42 = \partial_{02}{}' T4;$$

$$h43 = \partial_{03}{}' T4;$$

$$h44 = \partial_{04}{}' T4;$$

$$h45 = \partial_{05}{}' T4;$$

$$h46 = \partial_{06}{}' T4;$$

```

h51 = ∂01' T5;
h52 = ∂02' T5;
h53 = ∂03' T5;
h54 = ∂04' T5;
h55 = ∂05' T5;
h56 = ∂06' T5;
h61 = ∂01' T6;
h62 = ∂02' T6;
h63 = ∂03' T6;
h64 = ∂04' T6;
h65 = ∂05' T6;
h66 = ∂06' T6;

```

重力負荷項

```

g1 = g ∂g T1;
g2 = g ∂g T2;
g3 = g ∂g T3;
g4 = g ∂g T4;
g5 = g ∂g T5;
g6 = g ∂g T6;

```

まとめ

$M(\theta(t))\Theta''(t) + H(\theta(t), \theta'(t))\Theta'(t) + G(\theta(t)) = \text{Tau}$

慣性行列

```

M = FullSimplify[Expand[TrigExpand[

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{pmatrix}]]];$$


```

コリオリ力

$$H = \text{FullSimplify}\left[\text{Expand}\left[\text{TrigExpand}\left[\begin{pmatrix} 1/2 h_{11} & 1/2 h_{12} & 1/2 h_{13} & 1/2 h_{14} & 1/2 h_{15} & 1/2 h_{16} \\ 1/2 h_{21} & 1/2 h_{22} & 1/2 h_{23} & 1/2 h_{24} & 1/2 h_{25} & 1/2 h_{26} \\ 1/2 h_{31} & 1/2 h_{32} & 1/2 h_{33} & 1/2 h_{34} & 1/2 h_{35} & 1/2 h_{36} \\ 1/2 h_{41} & 1/2 h_{42} & 1/2 h_{43} & 1/2 h_{44} & 1/2 h_{45} & 1/2 h_{46} \\ 1/2 h_{51} & 1/2 h_{52} & 1/2 h_{53} & 1/2 h_{54} & 1/2 h_{55} & 1/2 h_{56} \\ 1/2 h_{61} & 1/2 h_{62} & 1/2 h_{63} & 1/2 h_{64} & 1/2 h_{65} & 1/2 h_{66} \end{pmatrix}\right]\right]\right];$$

重力負荷

$$G = \text{FullSimplify}\left[\text{Expand}\left[\text{TrigExpand}\left[\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{pmatrix}\right]\right]\right];$$

角度行列

$$Q = \begin{pmatrix} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \\ O_4 \\ O_5 \\ O_6 \end{pmatrix};$$

角速度行列

$$Q' = \begin{pmatrix} O_1' \\ O_2' \\ O_3' \\ O_4' \\ O_5' \\ O_6' \end{pmatrix};$$

角加速度行列

$$Q'' = \begin{pmatrix} 01'' \\ 02'' \\ 03'' \\ 04'' \\ 05'' \\ 06'' \end{pmatrix};$$

トルク

$$TAUTAU = M \cdot Q'' + H \cdot Q' + G;$$
