

不完全情報に基づく構造型信用リスクモデル の分析

鳥谷部, 昭寛 / TORIYABE, Akihiro

(発行年 / Year)

2005-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2005-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

2004 年度修士論文

不完全情報に基づく
構造型信用リスクモデルの分析



法政大学大学院
工学研究科システム工学専攻

03R6224 とりやべ 鳥谷部 あきひろ 昭寛

指導教員 浦谷 規 教授

THE 2004 MASTER'S THESIS

ANALYSIS OF INCOMPLETE INFORMATION
CREDIT RISK MODELS



GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING
HOSEI UNIVERSITY

03R6224 AKIHIRO TORIYABE

Supervisor Prof. TADASHI URATANI

概要

従来の構造型信用リスクモデルでは、投資家は企業が公表する財務情報に関して真の情報を得る事ができ、債務超過に陥る水準を完全に把握できるという仮定の下で信用リスク評価をしている。しかし現実的には、不正会計で破綻した米国エンロンの事例にあるように、企業の財務構造には不完全な面が多く、投資家は信用リスクを過小評価をしていると言わざるを得ない。これらの問題点に関して、構造型信用リスクモデルに情報の不完全性を組み入れた企業価値誤差モデル [3] 及び確率閾値モデル [5] が提唱されている。前者のモデルでは、企業が每期公表する財務情報にノイズが含まれていると仮定し、ある条件下で突発的なリスクを表現する倒産強度を導出した。後者のモデルでは、投資家は企業が倒産に陥る閾値を完全に把握できないという仮定の下で、閾値に確率分布を組み入れたモデルを導出した。本稿では、後者の確率閾値モデル [5] の詳細を明らかにし、企業価値誤差モデル [3] と理論面での比較を行う。また、本邦企業の財務データを用いて、倒産確率、及び信用スプレッドを分析し、従来の完全情報に基づく構造型信用リスクモデルとの比較を行う。

ABSTRACT

In traditional structural models of default, it is implicitly assumed that the investors could know the complete information of the firm's financial statement and liability-dependent default barrier. But in reality, the firm's financial statement is uncertain. For example, Enron was defaulted due to the irregular accounting in Nov, 2001. For resolving this problem, there are two approaches, the incomplete asset information model[3] and the incomplete default barrier information model[5]. In this thesis, we compare the former model and the latter model in mathematical terms. Secondly, using several case studies in Japanese market, we calibrate the complete information models and incomplete information models with respect to default probabilities and credit spreads. Finally, we compare the model forecasts of the estimated default by two models.

目次

1	序論	4
1.1	研究背景	4
1.2	先行研究	4
1.3	研究目的	4
1.4	本稿の構成	5
2	完全情報構造型信用リスクモデル	6
2.1	Merton モデル	6
2.2	Black & Cox モデル	7
2.3	完全情報構造型モデルの拡張	7
3	既存の構造型モデルの問題点	9
3.1	倒産時刻の可予測性と非可予測性	9
3.2	ジャンプ拡散アプローチ	9
3.3	不完全情報アプローチ	9
4	不完全情報構造型信用リスクモデル	10
4.1	情報構造	10
4.2	倒産トレンド	11
4.3	倒産強度の存在条件	12
4.4	倒産確率	12
4.5	信用スプレッド	13
4.6	倒産閾値が不完全情報の場合 (Kay Giesecke[5])	13
4.7	企業価値が不完全情報の場合 (Duffie & Lando[3])	15
4.8	両アプローチの比較	15
5	倒産トレンドの分析	16
5.1	分析モデルの仮定	16
5.2	指数型モデル (Kay Giesecke[5])	16
5.3	ベータ分布型モデル (Kay Giesecke[6])	18
6	数値実験	19
6.1	倒産閾値が指数型分布の場合	19
6.2	倒産閾値がベータ分布に従う場合	23
7	実証分析	28
7.1	モデルの設定	28
7.2	共通パラメータの推定手法	29
7.3	ロックアウト・オプションによるキャリブレーション手法	30
7.4	分布パラメータの推定手法	32
7.5	個別企業分析	33
8	総括	41
付録 A	Proofs	43
A.1	Condition 4.1 に関する命題	43

A.2	Theorem 4.2 の証明	43
付録 B	条件付期待値と倒産確率	43
B.1	条件付期待値	43
B.2	倒産確率	43
付録 C	初到達時刻の分布	44
C.1	ドリフトのないブラウン運動と吸収壁	44
C.2	ドリフトのあるブラウン運動と吸収壁	45
付録 D	(5.11) 式の導出	45
付録 E	高さパラメータ κ でスケールしたベータ分布	46
付録 F	分析データ	48
F.1	財務データ (佐藤工業)	48
F.2	財務データ (西松建設)	48

表目次

1	個別分析の対象企業	33
2	完全情報型と不完全情報型の倒産確率の平均誤差 (佐藤工業)	34
3	完全情報型と不完全情報型の倒産確率の平均誤差 (西松建設)	34
4	予測値 (倒産確率) の統計値 (佐藤工業)	34
5	予測値 (倒産確率) の統計値 (西松建設)	34
6	佐藤工業の財務データ (1998/03 ~ 2001/09 の 8 期分)	48
7	西松建設の財務データ (1998/03 ~ 2001/09 の 8 期分)	48

図目次

1	企業価値過程と倒産閾値の距離 ($Z_t - M_t = 0, 0.05, 0.1$) を変化させた場合の、満期までの期間 ($T - t$) における信用スプレッド	20
2	企業価値過程のボラティリティ ($\sigma = 0.15, 0.20, 0.25$) を変化させた場合の、満期までの期間 ($T - t$) における信用スプレッド ($Z_t - M_t = 0.05$ の場合)	20
3	企業価値過程のボラティリティ σ , 及び企業価値と倒産閾値との距離 ($Z_t - M_t > 0$) を変化させた場合の、短期間における信用スプレッド $S(t, t + 0.01)$	22
4	企業価値過程と倒産閾値との距離 ($Z_t - M_t = 0, 0.05, 0.1$) を変化させた場合の、満期までの期間 ($T - t$) における倒産確率 $p(T - t, Z_t - M_t)$	22
5	ベータ分布のパラメーター $(a, b) \in [2, 10]$ を変化させた場合の倒産確率	24
6	ベータ分布のパラメーター $(a, b) \in [2, 10]$ を変化させた場合の信用スプレッド	24
7	企業価値・倒産閾値の距離 $Z_t - M_t = 0, 0.05, 0.1$ の場合の倒産確率	26
8	企業価値・倒産閾値の距離 $Z_t - M_t = 0, 0.05, 0.1$ の場合の信用スプレッド	26
9	高さパラメータ $\kappa = 0.25, 0.5, 0.75, V_0$ の場合の倒産確率	27
10	高さパラメータ $\kappa = 0.25, 0.5, 0.75, V_0$ の場合の信用スプレッド	27
11	$Z_t - M_t$ の時系列 (佐藤工業)	35
12	$Z_t - M_t$ の時系列 (西松建設)	35
13	Z_t のボラティリティ σ (佐藤工業)	35
14	Z_t のボラティリティ σ (西松建設)	35

15	レバレッジレシオの推移（佐藤工業）	35
16	レバレッジレシオの推移（西松建設）	35
17	完全情報型：Black & Cox モデルと不完全情報型：指数型モデルの倒産確率の比較（佐藤工業）	36
18	完全情報型：Black & Cox モデルと不完全情報型：指数型モデルの倒産確率の比較（西松建設）	36
19	$V_0 - \kappa$ の推移（佐藤工業）	37
20	$V_0 - \kappa$ の推移（西松建設）	37
21	完全情報型：Black & Cox モデルと不完全情報型：ベータ分布型モデルの倒産確率の比較（佐藤工業）	38
22	完全情報型：Black & Cox モデルと不完全情報型：ベータ分布型モデルの倒産確率の比較（西松建設）	38
23	不完全情報型：指数型モデルと不完全情報型：ベータ分布型モデルの倒産確率の比較（佐藤工業）	39
24	不完全情報型：指数型モデルと不完全情報型：ベータ分布型モデルの倒産確率の比較（西松建設）	39
25	2002/2/1 時点における満期まで 3 年間の信用スプレッド（佐藤工業）	40
26	2002/2/1 時点における満期まで 3 年間の信用スプレッド（西松建設）	40

1 序論

1.1 研究背景

近年日本や米国において、不正会計による企業の大型倒産が相次いでいる。特に米国では、負債飛ばし等による粉飾会計を行っていたエンロン・アンダーセンやワールドコムが倒産した事は記憶に新しい。投資家は企業が公表している財務情報に基づき信用リスクの評価をしている為、不正会計などによる予想外の不確実性リスクが与える影響は重大である。しかし従来の信用リスク評価モデルでは、そのような不確実性を考慮していない為、企業の信用度を過小評価しているという問題点がある。

1.2 先行研究

従来の信用リスク評価アプローチは、構造型モデルと誘導型モデルに分類される。構造型モデルは企業の財務構造を直接モデル化し、バランスシートの企業価値といった指標がある閾値を下回った場合、すなわち債務超過の状態を倒産と定義している。一方誘導型モデルでは、倒産のリスクを外部からの強度パラメータによって与えるものであり、倒産は外的な要因によって引き起こされると仮定しているモデルである。

これらの信用リスク評価モデルの基礎的な枠組みを最初に提唱したのが、Black & Scholes[2] と Merton [9] である。彼らのアプローチは、オプション理論で代表的な Black & Scholes[2] モデルを信用リスクの枠組みに当てはめ、企業の財務構造をパラメータとしたオプション理論に基づく構造型モデルを構築した。しかし彼らのモデルでは、信用リスクの評価をある満期時点ではしか評価できないという問題点があった。Black & Cox[1] は Merton[9] モデルを拡張し、満期前の時点においても企業の信用リスクを評価できるモデルを構築した。またこれらの構造型モデルでは、倒産の閾値を一定と仮定しているため、どの水準に設定すべきかという事が重要な議論であった。倒産閾値に関して Black & Cox[1] や Longstaff & Schwartz[8] は、閾値を負債といった財務項目の関数によって設定している。

しかし従来の構造型モデルの数学的な問題点として、倒産時刻が可予測になるという点が挙げられる。すなわち、投資家は企業の倒産を前もって予測できてしまうというモデル上の欠陥があった。このため、突発的なリスクをモデルが捉えきれないのである。これらの解決策として、Merton[9] モデルを拡張した二つのアプローチが研究されている。

一つ目のアプローチは、企業の資産価値過程をジャンプ拡散過程に従うようにモデル化する事である。この研究は Zhou[14] によって提唱され、倒産時刻が非可予測となるモデルを導出した。また二つ目のアプローチとして、企業の財務構造に不完全情報を仮定したモデルがある。Duffie & Lando[3] は、投資家が企業の資産価値に関する財務構造を完全に得られないという仮定の下で従来の構造型モデルを拡張し、非可予測な倒産時刻の下で、突発性リスクを表現する強度パラメーターを導き出した。しかしこのモデルにおいては、倒産の閾値に関しては完全な情報を得られるという非現実的な仮定に基づいている。一方で Kay Giesecke[5] は、企業の資産価値に関しては完全情報を得られるが、倒産閾値に関しては完全に観測できないという仮定の下でモデルを拡張した。いずれのモデルにおいても倒産時刻は非可予測となり、企業の不正会計といった不確実性をモデルに取り入れた現実的なアプローチである。

1.3 研究目的

上述の通り、Duffie & Lando[3] と Kay Giesecke[5] のアプローチでは、倒産時刻が非可予測となるが不完全とする情報の対象が異なる。前者のアプローチでは企業の資産価値を不完全情報としているのに対して、後者では企業が倒産する閾値水準が不完全情報であると仮定している。よって本稿では、両アプローチを理論面から検証する事からはじめ、次にモデルの分析に於いては Kay Giesecke[5] のアプローチを対象とし、Kay Giesecke[5] が提唱した倒産閾値に指数型分布、及びベータ型分布を適用した場合の特性を数値実験を通して検証する。また、従来のキャリブレーション手法を工夫し、本邦企業の財務データから算出した倒産確率、及び信用スプレッドを各モデル間で比較する事で実用性を検証する。

1.4 本稿の構成

本稿では、第 2 章に於いて従来の完全情報に基づく構造型信用リスクモデルについて概説し、第 3 章でそれらの数学的問題点を解説する。また、第 4 章で不完全情報構造型信用リスクモデルの詳細を明らかにし、第 5 章では、Kay Giesecke[5] のアプローチから、具体的なモデルを構築する。第 6 章では数値実験を通して、まだ明らかにされていない面（ベータ型分布モデルなど）から不完全情報に基づく構造型信用リスクモデルの特性を分析する。第 7 章では、倒産企業、及び非倒産企業を対象とした実証分析を通して完全情報構造型モデルとの比較を行い、モデルの実用性を検証する。

2 完全情報構造型信用リスクモデル

この章では、企業の信用リスクを評価する際に基礎となる構造型モデルを概説する。このアプローチは、Black & Scholes[2] と Merton[9] によって最初に提唱され、一般的なオプション価格付けモデルに基づいている。

構造型アプローチでは、企業の財務構造（企業の資産価値や負債価値等）を直接モデル化し、企業の倒産は「債務返済の満期時点において、負債を現有資産の売却によっても返済できない状態」、すなわち債務超過と定義される。従って、企業価値がある閾値（一般的には負債額）を下回った時点に倒産と定義する。数学的には、企業価値をある拡散過程で記述し、定められた閾値を下回った事象のみを考えるため、既存のオプション価格付けモデルを適用しやすい。

2.1 Merton モデル

Merton[9] によって考案された構造型モデルの理論を紹介する。Merton モデルでは、倒産時刻を債務の満期時点においてのみ評価するモデルである。モデル化に際し、以下のような仮定をおく。

1. 企業の財務構造は、株主資本とある単一の負債で構成されているものとする。
2. 企業の市場価値（企業価値）を V とする*1。
3. 負債部は単一のゼロ・クーポン債によって構成されるものとし、その額面価格を K 、満期時刻を T とする。企業は契約上の義務として、満期時点 T に債券投資家へ合計 K を支払う。
4. 満期時点 T において、企業が支払いの債務を果たせない場合、債券投資家は直ちに企業の支配権を得ることができる。従って、倒産時刻 τ は以下のように定義する。

$$\tau = \begin{cases} T & V_T < K \\ \infty & \text{else.} \end{cases} \quad (2.1)$$

企業の倒産は満期時点 T において判別され、企業価値 V_T が負債総額（倒産閾値） K を下回っている場合のみ倒産と定義する。

5. 時点 t における企業価値を V_t とし、幾何ブラウン運動に従うと仮定する。

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad V_0 > 0 \quad (2.2)$$

但し $\mu \in \mathbb{R}$ はドリフト係数、 $\sigma > 0$ はボラティリティ、 W_t は標準ブラウン運動を表す。伊藤のレンマより、

$$V_t = V_0 e^{Z_t} \quad (2.3)$$

$$Z_t = mt + \sigma W_t, \quad m = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (2.4)$$

と表現する。

以上のような仮定のもとで Merton[9] は、債務の満期時点 T における企業の倒産確率 $p(T)$ を

$$\begin{aligned} p(T) &= P[V_T < K] \\ &= P[\sigma W_T < \ln L - mT] \\ &= \Phi\left(\frac{\ln L - mT}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

と導出した。但し $L = \frac{K}{V_0}$ は企業のレバレッジ・レシオを表し、 Φ は標準正規分布の分布関数を表す。

*1 企業の将来の期待割引キャッシュフローと考えられる。

2.2 Black & Cox モデル

Merton モデルの問題点として、企業の倒産は債務の満期時刻 T においてのみ評価された。しかし現実的には、企業の倒産は時点 t から満期 T までの連続時点において評価されるべきである。Black & Cox[1] は倒産時刻の定義を、「企業価値過程 V_t が、倒産閾値 K を最初に下回る時刻」と改良した。このアプローチは初到達時刻 (First Passage Time) モデルと呼ばれる。以下にモデルの詳細を解説する。

倒産閾値を $D \in (0, V_0)^{*2}$ で一定と仮定する。倒産時刻 τ は $(0, \infty]$ において連続的な確率変数とし、企業価値 V_t が閾値 D を最初に下回った時刻と定義する。

$$\tau = \inf\{t > 0 : V_t < D\} \quad (2.6)$$

このとき倒産確率は、次のように導出される。

$$\begin{aligned} p(T) &= P[M_T < D] \\ &= P[\min_{s \leq T} (ms + \sigma W_s) < \ln(D/V_0)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

但し M_t は企業価値の最小価値過程であり、

$$M_t = \min_{s \leq t} V_s \quad (2.8)$$

で定義される。算術ブラウン運動の最小価値過程の分布は Inverse Gaussian 分布となる事が知られている。その分布を $\Psi(t, x)$ とすると、

$$\Psi(t, x) = \Phi\left(\frac{x - mt}{\sigma \sqrt{t}}\right) + \exp\left(\frac{2mx}{\sigma^2}\right) \Phi\left(\frac{x + mt}{\sigma \sqrt{t}}\right), \quad x \leq 0 \quad (2.9)$$

である^{*3}。よって倒産確率 (2.7) は、

$$p(T) = \Phi\left(\frac{\ln(D/V_0) - mT}{\sigma \sqrt{T}}\right) + \left(\frac{D}{V_0}\right)^{\frac{2m}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{\ln(D/V_0) + mT}{\sigma \sqrt{T}}\right) \quad (2.10)$$

となる^{*4}。

2.3 完全情報構造型モデルの拡張

Merton[9] や Black & Cox[1] を拡張した様々なモデルが研究されている。その中で有名なアプローチを幾つか紹介する。

2.3.1 倒産閾値の拡張

Merton[9] 等の一般的な構造型モデルでは、倒産閾値を負債額で一定と仮定してきた。Black & Cox[1] では、倒産閾値は時間に関する関数としている。

倒産閾値 D を時間に関する関数 $D(t) \leq K, t \leq T$ と仮定する。このとき閾値の関数 $D(t)$ を、

$$D(t) = Ke^{-k(T-t)}, \quad k > 0 \quad (2.11)$$

と定義する。この定式化では、倒産閾値が割引率 k で負債の満期に関する減少関数となっている。従って企業価値がある一定水準に近づくと、債権者は企業資産の所有権を主張できるという状況をモデル化している。負債の満期が長期であれば閾値の水準は低くなり、初期時点の倒産確率は低くなる。

企業の倒産事象は、

$$\tau = \inf\{t > 0 : V_t < D(t)\} \quad (2.12)$$

^{*2} 倒産閾値を前述の K ではなく D としたのは、閾値が負債額 K で一定ではなく、様々な関数に設定できるようにする為である。

^{*3} 導出の詳細は付録 C を参照の事。

^{*4} $x = \ln(D/V_0), t = T$ と置いた。

で定義され、倒産確率は次のように表される。

$$\begin{aligned} p(T) &= P[M_t < D(t)] \\ &= P[\min_{t \leq T} \{(m-k)t + \sigma W_t\} < \ln L - kT] \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$= \Phi\left(\frac{\ln L - mT}{\sigma \sqrt{T}}\right) + (Le^{-kT})^{\frac{2}{\sigma^2}(m-k)} \Phi\left(\frac{\ln L + (m-2k)T}{\sigma \sqrt{T}}\right) \quad (2.14)$$

2.3.2 金利の期間構造

Longstaff and Schwartz[8] は、金利を期間構造モデルとして有名な Vasicek(1977) モデルに従うと仮定した。

$$dr = (\zeta - \beta r)dt + \eta d\tilde{W} \quad (2.15)$$

但し、企業価値過程の標準ブラウン運動 W と \tilde{W} は相関があるものとし、相関係数を ρ とした。この金利モデルを用いて、信用リスクのある債券や変動利付債の価格付け式を導出した。

2.3.3 Moody's KMV モデル

金融市場で広く一般的に用いられている信用リスク評価モデルとして、Moody's の KMV モデルがある。このモデルは、Merton[9] のフレームワークを用い、独自に「倒産距離」を定義して企業の信用度を評価している。この倒産距離とは、リスクあたりで見た倒産ポイントまでの近さを表す指標である。

倒産距離は倒産閾値と企業価値との距離を表し、次のように定義される。

$$\text{倒産距離} = \frac{\ln(\text{企業資産の市場価値}) - \ln(\text{倒産ポイント})}{\text{企業価値過程のボラティリティ}} \quad (2.16)$$

企業価値とそのボラティリティは、株式の価格とボラティリティに近似し、倒産点は企業の短期、及び長期負債の額面価値を変数としたある関数^{*5}と置いている。

*5 短期債務 + 長期債務 ÷ 2

3 既存の構造型モデルの問題点

Merton[9]をはじめとする既存の構造型モデルには、幾つかの欠陥が指摘されている。この章では、問題点の提言と解決への方向性を示唆する。

3.1 倒産時刻の可予測性と非可予測性

企業価値が拡散過程に従うモデルでは、短期的な信用スプレッドや倒産確率が非常に低い水準になるという問題点が知られている。これは倒産時刻（停止時刻）の可予測性にに基づいている。

数学的には、^{*6}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau \quad (3.1)$$

となるような announcing sequence $(\tau_n)_{n \geq 1}$ が存在する場合、倒産時刻 τ は可予測となる。よって既存の構造型モデルの場合、企業価値 V_t が閾値 D に最初に到達する時刻 τ は、次のような announcing sequence を持つ事が知られている。

$$\tau_n = \inf\{t > 0 : V_t \leq D + 1/n\} \quad (3.2)$$

このため、既存の構造型モデルでは倒産時刻 τ は可予測となる。

一方、可予測な停止時刻の反対は、totally inaccessible stopping time と呼ばれている。この停止時刻 τ は、可予測となりうるようなどんな情報をも与えない。すなわち、全ての可予測な停止時刻 τ' に関して、

$$P[\tau = \tau' < \infty] = 0 \quad (3.3)$$

を意味する。

3.2 ジャンプ拡散アプローチ

Zhou[14] は、Merton[9] による原資産過程がジャンプ拡散モデルに従うオプション価格付けのモデルを、構造型信用リスクモデルの枠組みに拡張した。このモデルでは、企業価値過程が2つの不確実性、すなわち、連続な拡散過程によるものと、不連続なジャンプ過程（ポアソン過程）を組み込んでいる。このジャンプ拡散モデルでは突発的な事象の表現が可能となるため、倒産時刻が非可予測となり、既存の Merton モデルに比べ短期的なリスクを過小評価しない。

ジャンプ拡散モデルでは、企業価値を次のように定義している。

$$\frac{dV_t}{V_t} = (\mu - \lambda\nu)dt + \sigma dW_t + (J - 1)dN_t \quad (3.4)$$

3.3 不完全情報アプローチ

Duffie and Lando[3] や Kay Giesecke[5] は、企業が公開する財務情報にノイズが入っており、一般の投資家が真の値を観測できないと仮定したモデルを提唱した。これらのアプローチは、完全な情報を得られないという現実的な状況をモデル化でき、倒産時刻が非可予測となる事が証明されているため扱い易い。

本稿ではこの不完全情報構造型信用リスクアプローチを研究対象とし、次章からその詳細を明らかにする。

^{*6} Philipp J.Schönbucher[10],p86 を参照の事。

4 不完全情報構造型信用リスクモデル

前章までの議論に於いて既存の構造型モデルでは、投資家は企業の財務構造に関して真の情報を得られるという条件の下で信用リスクの評価を行う。しかしこの条件下では、倒産時刻が可予測となり、短期的な信用リスクを過小評価する恐れがあると同時に、不正会計などによる情報の不確実性リスクを織り込んでいないという問題点があった。

この問題点に対して、Duffie & Lando[3] と Kay Giesecke[5] は、企業の資産価値、及び倒産閾値がそれぞれ不完全情報であるという仮定の下でモデル化を行い、倒産時刻が非可予測となるモデルの枠組みを提唱した。

よってこの章では、両者によって考案された不完全情報モデルについての詳細を紹介し、数学的な見地から比較を行う。

4.1 情報構造

本稿の研究対象である不完全情報構造型モデルを分析するにあたり、企業の財務構造に関する完全情報、及び不完全情報を数学的に定義する。

4.1.1 完全情報構造

投資家が企業の財務情報を完全に得られると仮定する。これは既存の構造型モデルにおける前提条件である。投資家が知ることができる企業の資産価値に関する情報を次のフィルトレーション \mathcal{G} で定義する。

$$\mathcal{G}_t = \sigma(V_s : s \leq t) \vee \sigma(D) \quad (4.1)$$

ここで、 $\sigma(V_s : s \leq t)$ は企業価値過程の情報系、 $\sigma(D)$ は倒産閾値の情報系である。投資家は企業価値過程 V_t の真の値をどの時点でも連続的に知ることができ、 $t=0$ においてある一定の倒産閾値 D を観測できる。すなわち投資家は、信用リスクの評価時点に於いて、現在の企業価値が倒産するまでの閾値にどれだけ近いかという情報を常に得られる。

4.1.2 不完全情報構造

投資家が不完全な情報として得られる企業の財務構造を、次の2つに分類する。

1. 倒産閾値 D

投資家は企業の倒産閾値に関して不完全な情報しか得られないと仮定する^{*7}。閾値 D の事前分布 G によって表現し、全ての投資家はその情報を得ているものとする。但し、 G は企業価値過程 V と独立であり、密度 g を持つと仮定する。

2. 企業価値過程 V

企業の真の資産価値を直接把握するのは一般的に困難である。企業価値過程に関する情報構造、すなわちフィルトレーションを \mathcal{F}_t とする。投資家が観測できる情報構造を、

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(N_s, s \leq t) \quad (4.2)$$

と定義する。企業価値過程から生成されるフィルトレーション \mathcal{F}_t を次の2つのタイプに分類する。

- Kay Giesecke[5], Lambrecht and Perraudin(1996), RiskMetrics Group(2002)

投資家は企業価値過程を全ての時点に於いて連続的に観測できる、すなわち、

$$\mathcal{F}_t = \sigma(V_s : s \leq t) \quad (4.3)$$

- Duffie & Lando[3]

投資家は離散時点 $t_1 < t_2 < \dots, t_m$ において、ノイズの入った情報 $Y_{tk} = V_{tk} + U_{tk}$ を観測できる^{*8}。但し U_{tk} は独立な確率変数である。

$$\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s : s \leq t, s \in \{t_1, \dots, t_m\}) \quad (4.4)$$

^{*7} 倒産閾値 D の不完全性に関しては、不正会計で破綻したエンロンやワールドコム的事例が有名である。投資家はエンロンの負債飛ばし等による不完全な財務構造から、倒産の水準を過大評価していた。

^{*8} これに対し Kusuoka(1999) は、連続時点に於いてノイズの入った財務情報 Y_t を観測できると仮定している。すなわち、 $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, s \leq t)$ 。

4.2 倒産トレンド

この節では信用リスクモデルの基礎となる倒産トレンドに関して、数学的な定義を行う。これらの理論的な枠組みの大部分は、Kay Giesecke[5] によって紹介された。この倒産トレンドによって、様々な不完全情報構造型モデルの枠組みを説明できる。

4.2.1 倒産トレンドの定義

既存の全ての信用リスクモデルでは、非減少関数である倒産定義関数 N とその Compensator A^τ から構成されている。Doob-Meyer の定理より、Compensator は倒産過程から分離する事ができる。直感的には、倒産リスクの増加過程の部分 A を倒産定義関数である N から切り離せると考えられる。Doob-Meyer の定理より、倒産定義関数 N から Compensator を次のように分離できる。

$$M_t = N_t - A_t^\tau \quad (4.5)$$

但し、 M はマルチンゲール過程であり、 N は投資家が観測できるフィルトレーション (\mathcal{G}_t) の下で劣マルチンゲールである。従って、 N を (\mathcal{G}_t) マルチンゲールな M と非減少関数で可予測な過程 A_t^τ の累積の形で表現できる。この Compensator A_t^τ は、倒産過程に組み込まれている短期的な信用リスクを累積的に補正する。よって、仮に倒産に関する短期的な不確実性があれば、それは過程 A_t^τ によって生成され、

$$A_t^\tau = A_{\min(t,\tau)} = \begin{cases} A_t, & t < \tau \\ A_\tau, & \text{else.} \end{cases} \quad (4.6)$$

と表される。

この N の Compensator A_t^τ を倒産トレンドと呼び、倒産確率の推定や信用リスク商品の価格付けに用いられる。ここで倒産トレンドを以下のように定義する。

Definition 4.1. 増加過程 A を倒産時刻 τ に関連する倒産トレンドと呼び、次のように定義する。

$$A_t^\tau = \int_0^t \frac{dK_s}{L_{s-}} \quad (4.7)$$

但し L_t は生存確率であり、

$$L_t = P[\tau > t | \mathcal{F}_t], \quad L_t > 0 \quad \text{for all } t > 0 \quad (4.8)$$

とする。過程 L は \mathcal{F}_t -優マルチンゲールであり、Doob-Meyer の定理から、一意な \mathcal{F}_t -可予測増加過程 K が存在する^{*9}。よって、 $L+K$ は \mathcal{F}_t -マルチンゲール過程となる。

以後この倒産トレンド A によって、Duffie & Lando[3] や Kay Giesecke[5] のモデルを説明する。

4.2.2 倒産時刻の非可予測性

完全情報型モデルの問題点は、倒産時刻の可予測性であった。不完全情報型モデルでは、上述の生存確率 L_t が連続のとき、かつそのときに限り、倒産時刻 τ は totally inaccessible、すなわち非可予測となる。よって次に、倒産トレンド A が連続となるための条件を示す^{*10}。

Condition 4.1. 投資家のフィルトレーション \mathcal{G}_t 上の可予測な停止時刻 τ に関して、条件付生存確率 L は以下を満たす。

$$E[L_{\tau-}] = E[L_\tau] \quad (4.9)$$

倒産時刻が非可予測となる為にはこの条件を満たさなければならない。言い換えれば、この条件を満たしていれば、生存確率 L_t が連続、すなわち、倒産トレンド A_t が連続となり、倒産時刻は \mathcal{G}_t -非可予測となる。

^{*9} L の Compensator と呼ぶ。

^{*10} この条件に関しては付録 A.1 を参照の事。

4.3 倒産強度の存在条件

不完全情報構造モデルで代表的な Duffie & Lando[3] と Kay Giesecke[5] では、不完全とする情報構造が異なる事を先に述べた。前者では企業価値過程にノイズが入り、投資家は離散的に不完全な情報を観測できるという仮定である。一方後者では、企業価値に関しては連続的に真の情報を得られるが、倒産閾値に関しては不完全な情報しか得られないという仮定であった。

両アプローチは共に倒産時刻が非可予測となるが、最も大きな差異は、誘導型アプローチで用いられる倒産強度 λ が存在しない点である。この倒産強度の有無によって、Duffie & Lando[3] では、短期的な信用スプレッドが 0 にならず存在するが Kay Giesecke[5] では、0 に収束してしまう^{*11}。よってこの節では、倒産強度が存在する為の条件を解説する。

従来の誘導型アプローチでは、倒産トレンドは \mathcal{F}_t -可予測な強度過程 λ を用いて、

$$A_t = \int_0^t \lambda_s ds \quad (4.10)$$

で表される。これは (4.7) 式の特別な形である。倒産トレンドがこの強度を持つ為には、 A_t が微分可能でなければならない。すなわち、 A_t が絶対連続でなければならない^{*12}。非可予測性との関連をまとめると、

- **Condition 4.1** を満たすならば、倒産トレンド A は連続となり倒産時刻 τ は非可予測である。但し、必要条件であるが十分条件ではない。また、倒産強度が存在する為の必要条件であるが十分条件ではない。
- 倒産強度 λ が存在するならば、倒産トレンド A は絶対連続であり、**Condition 4.1** を満たす。よって、倒産時刻 τ は非可予測となる。

4.4 倒産確率

この節では、前節で解説した倒産トレンドを用いて、強度 λ が存在しない場合とする場合の倒産確率を定義する。

4.4.1 一般的な倒産トレンドの場合

Kay Giesecke[5] より、倒産強度が存在しない場合の一般的な倒産確率は、次の定理によって得られる。

Theorem 4.1. **Condition 4.1** を満たしていると仮定する。すなわち、倒産時刻は非可予測であるものとする。また過程 Y を、

$$Y_t = E[Xe^{-\int_t^T r_s ds + A_t - A_T} | \mathcal{G}_t] \quad (4.11)$$

で与え、倒産時に連続であると仮定する。このとき、信用リスクのある請求権 (T, X) は時点 $t \leq T$ において価値 $Y_t 1_{t < \tau}$ を持つ。倒産確率は、

$$P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t] = 1 - E[e^{A_t - A_T} | \mathcal{G}_t], \quad t < \tau, \quad t \leq T \quad (4.12)$$

で与えられる。

Proof. 付録 B.1 より導出^{*13}。 □

4.4.2 λ が存在する場合

Theorem 4.1 より倒産確率は、一般的な誘導型アプローチの枠組みで表現できる。

Corollary 4.1. 倒産トレンドが倒産強度 λ を持つと仮定する。仮に Y_t ,

$$Y_t = E[Xe^{-\int_t^T (r_s + \lambda_s) ds} | \mathcal{G}_t] \quad (4.13)$$

^{*11} 詳細は 4.6.1 を参照の事。

^{*12} Lebesgue の意味で可積分。

^{*13} Elliott, Jeanblanc, Yor[4] を参照の事。

が倒産時に連続であるとすれば、信用リスクのある請求権 (T, X) は時点 $t \leq T$ において価値 $Y_t 1_{\{t < \tau\}}$ を持つ。このとき倒産確率は、

$$P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t] = 1 - E[e^{-\int_t^T \lambda_s ds} | \mathcal{G}_t], \quad t < \tau, \quad t \leq T \quad (4.14)$$

で与えられる。

4.5 信用スプレッド

企業から発行された社債の信用スプレッドを導出する。時点 t における YTM (Yield-to-Maturity) を $y(t, T)$ とすると、 $y(t, T)$ は満期 T の割引債 $B(t, T)$ を用いて、

$$y(t, T) = -\frac{\ln B(t, T)}{T-t}, \quad T > t \quad (4.15)$$

と表せる。時点 t における無リスク割引債の価格は、

$$d(t, T) = E[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{G}_t], \quad T \geq t \quad (4.16)$$

また、信用リスクのある割引債（回収率なし）の価格を、

$$p(t, T) = E[e^{-\int_t^T r_s ds} (1 - N_T) | \mathcal{G}_t], \quad \tau > t \quad (4.17)$$

と定義する。このとき、信用スプレッド $S(t, T)$ は、

$$S(t, T) = \frac{\ln d(t, T) - \ln p(t, T)}{T-t}, \quad T > t, \tau > t \quad (4.18)$$

特に、倒産が無リスク金利と独立であれば、

$$S(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P[\tau > T | \mathcal{G}_t] \quad (4.19)$$

である。

4.6 倒産閾値が不完全情報の場合 (Kay Giesecke[5])

この節では、Kay Giesecke[5] で構築された、倒産閾値が不完全情報の場合の倒産トレンドのモデル化を紹介する。

倒産閾値 D が不完全情報であり、企業価値過程 Z_t は完全情報と仮定する。このとき投資家が観測できるフィルトレーション \mathcal{G}_t は 4.1 節より、

$$\mathcal{F}_t = \sigma(V_s : s \leq t) \quad (4.20)$$

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(N_s, s \leq t) \quad (4.21)$$

である。

企業価値過程と倒産閾値は独立と仮定し、生存確率 L_t を次のように定義する。

$$L_t = P[\tau > t | \mathcal{F}_t] = P[D < M_t | \mathcal{F}_t] = G(M_t) \quad (4.22)$$

但し G は最小企業価値過程 M の事前分布、 M_t は \mathcal{F}_t -適な最小企業価値過程であり、

$$G(x) = \int_{-\infty}^x g(s) ds \quad (4.23)$$

$$M_t = \min_{s \leq t} Z_s \quad (4.24)$$

と定義する。 L_t を連続な減少関数と仮定^{*14}すると、倒産閾値が不完全情報構造を持つ場合の倒産トレンドを、次の定理により得られる。

^{*14} この仮定により、最小企業価値過程 M も連続な減少関数となる。

Theorem 4.2. 企業価値が投資家に完全に情報公開されているものとする．このとき，倒産トレンド A は次のように連続な対数関数で与えられる．

$$A_t = \int_0^t \frac{dK_s}{G(M_{s-})} \quad (4.25)$$

但し K は，フィルトレーション \mathcal{F}_t のおける $G(M_t)$ の Compensator である． L は連続な減少関数と仮定しているので， $K = 1 - L$ とおける^{*15}．企業価値過程 Z_t が連続ならば，

$$A_t = - \int_0^t \frac{dL_s}{L_s} = -\ln G(M_t) \quad (4.26)$$

と変形できる．よって倒産トレンドは連続であり，倒産時刻は非可予測となる．

Proof. 企業価値過程 Z_t が連続であれば，最小資産価値過程 M_t も同様に連続である．また，生存確率 L_t も連続となる．この場合，Doob-Meyer の定理より L の Compensator K は $K = 1 - L$ で与えられる．よって，倒産トレンド A も連続となり，

$$A_t = - \int_0^t \frac{dL_s}{L_s} = -\ln L_t \quad (4.27)$$

で与えられる． □

上述の定理から，倒産トレンドは企業価値過程 Z_t の分布には依存しない．すなわち，投資家は倒産閾値の分布と最小値過程 M_t のみで，倒産トレンドを評価できる．また G は連続で 2 階微分可能なので，(4.26) 式に伊藤のレンマを適用すると，

$$dA_t = - \frac{g(M_t)}{G(M_t)} dM_t \quad (4.28)$$

と表せる．上式から A_t^{\uparrow} は M が減少するときのみ増加する．すなわち，倒産リスクが上昇すれば，倒産トレンドも上昇する事を示している．

4.6.1 倒産強度 λ の存在

上述の倒産トレンド $A_t = -\ln G(M_t)$ に於いて，仮に企業価値過程 Z_t が最小値過程 M_t と等しい場合，すなわち， Z_t が新たな最小値の水準になった場合には，

$$\{t \geq 0 : Z_t = M_t\} \quad (4.29)$$

はルベーク測度 0 であるため，倒産トレンド A は絶対連続とはならない^{*16}．言い換えれば，時刻 t に関して A_t の導関数が 0 であるため，倒産強度 λ は存在しない．これは 4.3 節で既に述べた．よって短期的な信用スプレッドは (4.19) より，

$$\lim_{T \downarrow t} S(t, T) = - \frac{\partial}{\partial T} \ln P[\tau > T | \mathcal{G}_t] \Big|_{T=t} = 0 \quad (4.30)$$

である．従って倒産閾値が不完全情報構造の場合には，倒産時刻は非可予測であるが，倒産強度は存在せず，短期的な信用スプレッドは 0 に収束する．

4.6.2 倒産確率

Theorem 4.1 より，倒産強度 λ が存在しない場合の倒産確率は

$$P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t] = 1 - E \left[\frac{G(M_T)}{G(M_t)} \Big| \mathcal{G}_t \right], \quad t < \tau, \quad t \leq T \quad (4.31)$$

で与えられる．

^{*15} $K = 1 - L$ より， $dK_t = -g(M_t)dM_t$ ．

^{*16} 最小値過程 M_t がルベーク測度の意味で絶対連続でない為である．

4.7 企業価値が不完全情報の場合 (Duffie & Lando[3])

Duffie & Lando[3] は、企業が離散的に公表する資産価値にノイズが入っていると仮定し、ある条件下では次の形で倒産強度 λ が得られる事を証明した。企業価値過程 Z_t の \mathcal{F}_t -条件付密度関数を $f(t, \cdot)$ とすると、

$$\lambda_t = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P[\tau \leq t+h | \mathcal{G}_t] = \frac{1}{2} \sigma^2 f_x(t, K), \quad t \in (0, \tau) \quad (4.32)$$

となる。但し、 K は一定の閾値、 σ は企業価値過程 Z_t のボラティリティ、 f_x は条件付密度関数 f の微分形である。

倒産強度 λ が存在する事により、Duffie & Lando[3] アプローチでは短期的な信用スプレッドが 0 とならない。また、4.3 節における倒産強度が存在する条件より、 λ が存在する場合は倒産トレンドが絶対連続となり、倒産時刻は非可予測となる。

4.8 両アプローチの比較

前節までの議論から、企業の財務構造のどの部分を不完全情報とするかで、理論面からモデルの特性が変化する事を述べた。概説すると、

1. 企業価値が不完全情報のケース (Duffie & Lando[3])

倒産時刻は非可予測となり、倒産強度 λ が存在する。従って、短期的な信用スプレッドは 0 とならない。しかし倒産閾値を一定と仮定している為、不正会計等による負債額の不確実性リスクは考慮されない。また資産価値のノイズは独立な正規分布と仮定している為、現実的なリスク表現としては乏しい。

2. 倒産閾値が不完全情報のケース (Kay Giesecke[5])

倒産時刻は非可予測となるが、倒産強度 λ は存在しない。従って、短期的な信用スプレッドは 0 へ収束する。しかし倒産閾値に不確実性を表す分布を自由に仮定する事ができる為、自由度が高い。また企業価値過程は完全情報と仮定しているが、従来の完全情報型信用リスクモデルの枠組みをそのまま用いる事ができる為、扱いやすい。

両アプローチとも一長一短あるが、本稿では後者の Kay Giesecke[5] による倒産閾値が不完全情報と仮定したモデルを次章から詳細に分析していく。Duffie & Lando[3] モデルの実用性分析に関しては、福田 [17] を参照の事。

5 倒産トレンドの分析

この章では、Kay Giesecke[5] によって示された倒産閾値が不完全情報の場合の倒産トレンドを詳細に分析する。前章よりこのアプローチでは、倒産時刻は非可予測となるが倒産強度 λ は存在せず、突発的なリスクを表現できない。しかし、倒産閾値が不完全という現実的な仮定に加え、閾値に様々な分布を投資家が仮定できるため、実用的なモデルである。前章の議論から、企業価値過程は観測可能で、倒産閾値が観測不可能である場合、Theorem 4.2 より倒産トレンドは最小企業価値過程によって次のように与えられた。

$$A_t = -\ln G(M_t)$$

また Theorem 4.1 より、時点 $t < \tau$ における倒産確率は、

$$P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t] = 1 - E[e^{A_t - A_T} | \mathcal{G}_t]$$

で与えられた。このとき、倒産閾値の分布に様々な仮定を置くことで、様々なタイプの不完全情報構造モデルを構築できる。

5.1 分析モデルの仮定

分析に際し、企業価値過程に一般的な仮定を置く。

1. 企業価値過程 V_t はドリフト $\mu \in \mathbb{R}$ 、ボラティリティ $\sigma > 0$ の幾何ブラウン運動に従う。

$$V_t = V_0 e^{Z_t}, \quad V_0 > 0 \quad (5.1)$$

$$Z_t = mt + \sigma W_t, \quad m = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (5.2)$$

2. 最小価値過程 $M_t = \min_{s \leq t} V_s$ は次の分布関数 (Inverse Gaussian 分布) を持つ^{*17}。

$$\Psi(t, x) = P[M_t \leq x] \quad (5.3)$$

$$= \Phi\left(\frac{x - mt}{\sigma \sqrt{t}}\right) + \exp\left(\frac{2mx}{\sigma^2}\right) \Phi\left(\frac{x + mt}{\sigma \sqrt{t}}\right), \quad x \leq 0, t > 0 \quad (5.4)$$

5.2 指数型モデル (Kay Giesecke[5])

Kay Giesecke[5] は、倒産閾値の分布が $(0, V_0)$ 上で一様に分布していると仮定したモデルを構築した。すなわち投資家は閾値に関して、信用リスク評価時点では何も特別な情報を得ていないという状況である。

5.2.1 倒産トレンドの仮定

倒産閾値 d が $(0, V_0)$ 上で一様に分布し、企業価値過程 V と独立であると仮定する。更に、この倒産閾値 d を V_0 で基準化し対数を取った閾値を D とすると^{*18},

$$D = \ln \frac{d}{V_0}, \quad D \in (-\infty, 0) \quad (5.5)$$

このとき、基準化された閾値 D は以下の指数型分布を持つ。

$$G(x) = g(x) = e^x, \quad x < 0 \quad (5.6)$$

この分布関数のもとで倒産トレンドは、

$$A_t = -\ln G(M_t) \quad (5.7)$$

$$= -M_t \quad (5.8)$$

となる。

^{*17} 付録 C を参照の事。

^{*18} 基準化をする理由は、倒産閾値 d が初期値 V_0 と等しい場合、すなわち倒産の状況を 0 とするため。

5.2.2 倒産確率

上述の倒産トレンドの下で，倒産確率を導出する．(4.12) 式より，

$$\begin{aligned}
P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t] &= 1 - E[e^{A_t - A_T} | \mathcal{G}_t] \\
&= 1 - E[e^{M_T - M_t} | \mathcal{G}_t] \\
&= 1 - \frac{1}{e^{M_t}} E[e^{M_T} | \mathcal{F}_t, M_t > D] \\
&= 1 - \frac{1}{e^{M_t}} \int_{-\infty}^{M_t} e^y dP[M_{T-t} \leq y - Z_t] \\
&= 1 - \frac{1}{e^{M_t}} \int_{-\infty}^{M_t} e^y \frac{d}{dy} \Psi(T-t, y - Z_t) dy \\
&= 1 - \frac{1}{e^{M_t}} \left\{ [e^y \Psi(T-t, y - Z_t)]_{-\infty}^{M_t} - \int_{-\infty}^{M_t} e^y \Psi(T-t, y - Z_t) dy \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{M_t} e^{y - M_t} \Psi(T-t, y - Z_t) dy
\end{aligned} \tag{5.9}$$

となる．これを展開すると，以下の閉じた解が得られる^{*19}．

$$P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t] = p(s, v) = \int_{-\infty}^{-v} \Psi(s, v) e^{y+v} dy \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi\left(\frac{-v - ms}{\sigma \sqrt{s}}\right) - e^{v+s\mu} \Phi\left(\frac{-v - vs}{\sigma \sqrt{s}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\gamma} e^{(1-\gamma)v} \Phi\left(\frac{ms - v}{\sigma \sqrt{s}}\right) - \frac{1}{\gamma} e^{v+s\eta} \Phi\left(\frac{\delta s - v}{\sigma \sqrt{s}}\right)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

但し，

$$v = m + \sigma^2 \tag{5.12}$$

$$\mu = m + \frac{1}{2}\sigma^2 \tag{5.13}$$

$$\gamma = 1 + \frac{2m}{\sigma^2} \tag{5.14}$$

$$\delta = m - \gamma\sigma^2 \tag{5.15}$$

$$\eta = -m\gamma + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2} \tag{5.16}$$

と置いた．

5.2.3 信用スプレッド

(4.19) 式より信用スプレッドは，上述の倒産確率 $p(s, v)$ を用いて，

$$S(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln[1 - p(T-t, Z_t - M_t)], \quad t < T, t < \tau \tag{5.17}$$

となる．

^{*19} 付録 D を参照の事．

5.3 ベータ分布型モデル (Kay Giesecke[6])

前節では、投資家は倒産閾値に関して特に情報を得ていないという仮定の下で、閾値が指数型の分布に従うモデルを構築した。しかし現実的には、投資家は毎期公開される財務諸表等から倒産閾値の不確実性をモデル化し推測するはずである。そこで本節では、Kay Giesecke[6] で提案しているベータ分布に関して、その詳細をモデル化し分析する^{*20}。

5.3.1 倒産トレンドの仮定

ベータ分布の範囲 $(0, 1)$ を高さパラメータ $\kappa \in (0, V_0)$ によって拡張し、 $(0, \kappa)$ の範囲において倒産閾値がベータ分布に従っていると仮定している。具体的には、基準化した倒産閾値 $\frac{d}{V_0} \in (0, 1)$ を高さパラメータ κ によって、

$$\frac{d\kappa}{V_0} \in (0, \kappa) \quad (5.18)$$

に拡張する。この拡張した閾値がパラメータ $a > 1, b > 1$ のベータ分布に従うと仮定すると変数変換により^{*21}、

$$G(x) = \frac{V_0}{B(a, b)\kappa} \int_{-\infty}^x \left(\frac{V_0 u}{\kappa}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{V_0 u}{\kappa}\right)^{b-1} du \quad (5.19)$$

但し、 $B(a, b)$ はベータ関数を表す。よって倒産トレンドは、

$$\begin{aligned} A_t &= -\ln G(M_t) \\ &= -\ln \left[\frac{V_0}{B(a, b)\kappa} \int_{-\infty}^{M_t} \left(\frac{V_0 u}{\kappa}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{V_0 u}{\kappa}\right)^{b-1} du \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

となる。

5.3.2 倒産確率

上述の倒産トレンドの下での倒産確率は、(4.31) 式より、

$$\begin{aligned} P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t] &= 1 - E \left[\frac{G(M_T)}{G(M_t)} | \mathcal{G}_t \right] \\ &= 1 - \frac{1}{G(M_t)} E[G(M_T) | \mathcal{G}_t] \\ &= 1 - \frac{1}{G(M_t)} \int_{-\infty}^{M_t} G(y) \frac{d}{dy} \Psi(T-t, y - Z_t) dy \\ &= 1 - \frac{1}{G(M_t)} \left\{ [G(y)\Psi(T-t, y - Z_t)]_{-\infty}^{M_t} - \int_{-\infty}^{M_t} g(y)\Psi(T-t, y - Z_t) dy \right\} \\ &= \frac{V_0}{G(M_t)B(a, b)\kappa} \int_{-\infty}^{M_t} \left(\frac{V_0 y}{\kappa}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{V_0 y}{\kappa}\right)^{b-1} \Psi(T-t, y - Z_t) dy \end{aligned} \quad (5.21)$$

となる。

5.3.3 信用スプレッド

(4.19) 式より信用スプレッドは、上述の倒産確率 $p(s, v)$ を用いて、

$$S(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln[1 - P[\tau \leq T | \mathcal{G}_t]], \quad t < T, t < \tau \quad (5.22)$$

となる。

^{*20} Kay Giesecke[6] では、ベータ分布の提案はしているが、詳細なモデル化、及び数値分析はしていない。

^{*21} 付録 E を参照の事。

6 数値実験

前章では、倒産閾値が一様に分布している場合（指数型）、またベータ分布に従っている場合のそれぞれに関して、倒産トレンドを導出し、倒産確率、及び信用スプレッドを求めた。これらの倒産トレンドの下でパラメータを外性的に付与し、数値実験を通してモデルの特性を分析する。

6.1 倒産閾値が指数型分布の場合

本節では、倒産閾値が一様に分布していると仮定したモデル (5.11) の特性を、数値実験を通して明らかにする。次の4種類のグラフから分析を行う。

1. 企業価値と倒産閾値の距離を変化させた場合の、満期までの期間における信用スプレッド。
2. 企業価値のボラティリティを変化させた場合の、満期までの期間における信用スプレッド。
3. 満期までの期間が短いとき、企業価値のボラティリティと企業価値と倒産閾値の距離を変化させた場合の、短期信用スプレッド。
4. 企業価値と倒産閾値の距離を変化させた場合の、満期までの期間における倒産確率。

シミュレーションに用いる (5.2) 式の Z_t のドリフト m 、ボラティリティ σ を以下のように与える。

- ドリフト $m = 0.05$, ボラティリティ $\sigma = 0.2$

6.1.1 企業価値過程・倒産閾値の距離 ($Z_t - M_t$) と信用スプレッドの関係

図1から、現在の企業価値過程 Z_t と過去の最小値過程 M_t との距離の変化により、信用スプレッドに次のような変化が得られた。

1. $Z_t - M_t = 0$ の場合

現在の企業価値 Z_t と過去の最小値 M_t が等しい場合、信用スプレッドの期間構造は減少関数となる。但し、満期までの期間が短い場合、信用スプレッドは無限大に発散する。

$$\lim_{T \rightarrow t} S(t, T) = \infty, \quad Z_t = M_t \quad (6.1)$$

2. $Z_t > M_t$ の場合

現在の企業価値 Z_t と過去の最小値 M_t の値が正の方向に乖離している場合、全ての満期において信用スプレッドの期間構造は全体的に低下傾向になった。但し、満期が短い場合の信用スプレッドは0へ収束する。これは倒産時刻が非可予測であるにもかかわらず、倒産強度が存在しないモデルのため、短期的に突発的な事象の表現は組み込めない事を示している。

$$\lim_{T \rightarrow t} S(t, T) = 0, \quad Z_t > M_t \quad (6.2)$$

6.1.2 企業価値過程のボラティリティと信用スプレッドの関係

図2から、企業価値過程 Z_t のボラティリティ σ が高い場合、信用スプレッドは全体的に増加する傾向になる。信用スプレッドと倒産確率は、企業価値過程 Z_t と最小値過程 M_t にのみ依存しているため、そのボラティリティが高ければ高いほど信用リスクも相対的に上昇する。

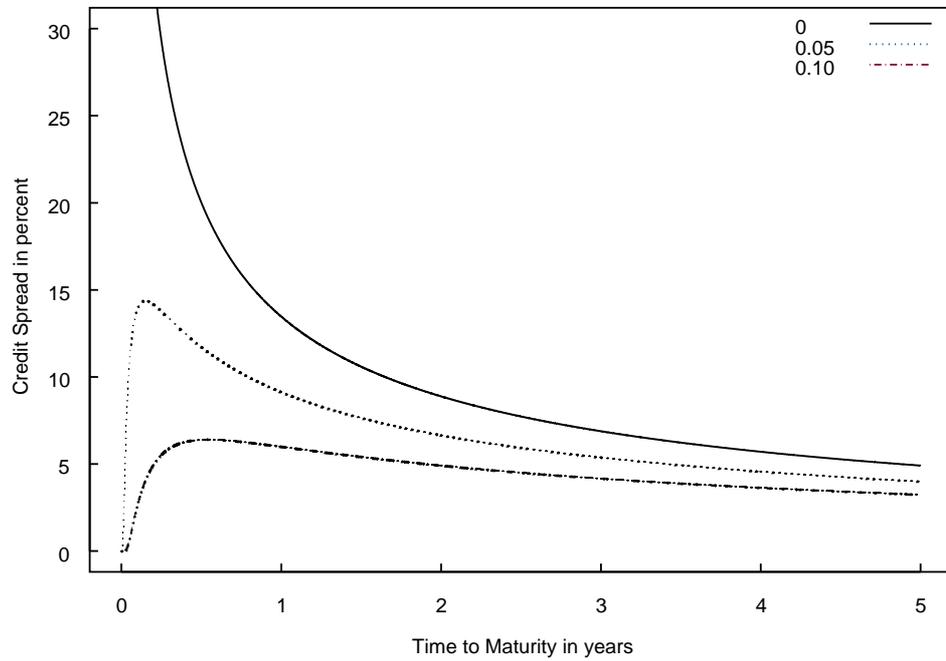


図1 企業価値過程と倒産閾値の距離 ($Z_t - M_t = 0, 0.05, 0.1$) を変化させた場合の、満期までの期間 ($T - t$) における信用スプレッド

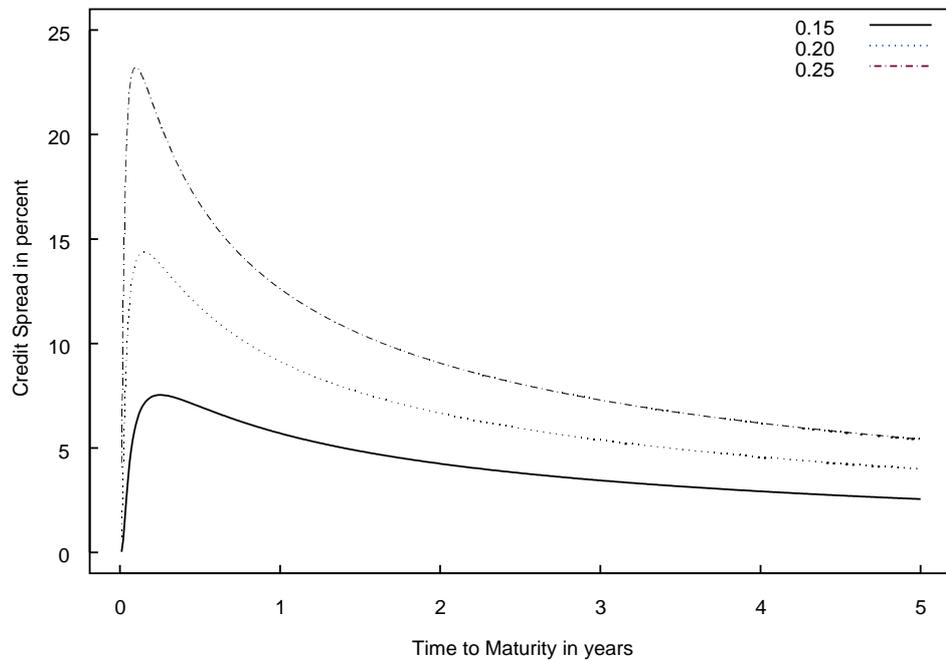


図2 企業価値過程のボラティリティ ($\sigma = 0.15, 0.20, 0.25$) を変化させた場合の、満期までの期間 ($T - t$) における信用スプレッド ($Z_t - M_t = 0.05$ の場合)

6.1.3 企業価値のボラティリティ・距離と信用スプレッドの関係

図3より、満期までの期間が非常に短い場合 ($t+0.01$) の信用スプレッドは次のような結果が得られた。

- $Z_t - M_t$ が小さく、 σ が大きい場合 短期信用スプレッドは増大
 Z_t が M_t の近辺にある場合、倒産の可能性が非常に高まっている事を示す。前小節で述べた通り、このモデルでは信用リスクを企業価値過程 Z_t と最小値過程 M_t のみで評価するため、そのボラティリティ σ が高い場合は不確実性が増し、リスクも増大する。よって、ボラティリティ σ が上昇するほど、信用スプレッドも高まる。
- $Z_t - M_t$ が大きく、 σ が小さい場合 短期信用スプレッドは減少
先に述べた場合と逆の傾向を示す。いずれも、 Z_t と M_t の距離が小さい場合は、突発的な倒産の可能性は低い。またボラティリティ σ に関しても同様の事が言える。

6.1.4 企業価値・倒産閾値の距離と倒産確率の関係

図4から、倒産確率に関して以下の結果が得られた。

- $Z_t - M_t > 0$ の場合
 $Z_t - M_t > 0$ であれば、企業は短期間で突発的には倒産しないと考えられる。企業価値過程 Z_t はジャンプしないと仮定しているため、 Z_t が M_t の水準に近づくまでは時間を要する。よって短期間での倒産確率は0に近づく。これは完全情報構造型モデルと同様の結果である。
- $Z_t - M_t \rightarrow 0$ の場合
 Z_t と M_t の距離が近ければ、短期間で倒産する可能性を評価する。よってこのモデルでは、倒産確率は相対的に上昇する。

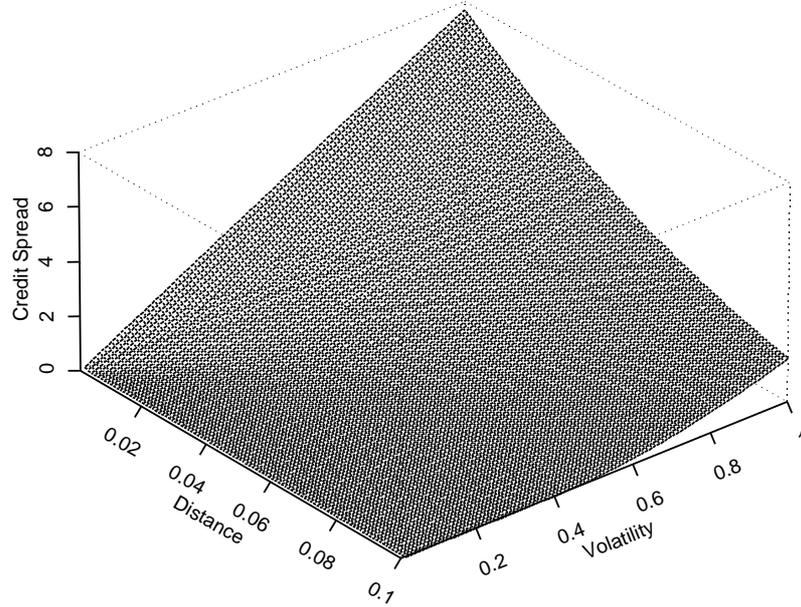


図3 企業価値過程のボラティリティ σ , 及び企業価値と倒産閾値との距離 ($Z_t - M_t > 0$) を変化させた場合の, 短期間における信用スプレッド $S(t, t+0.01)$

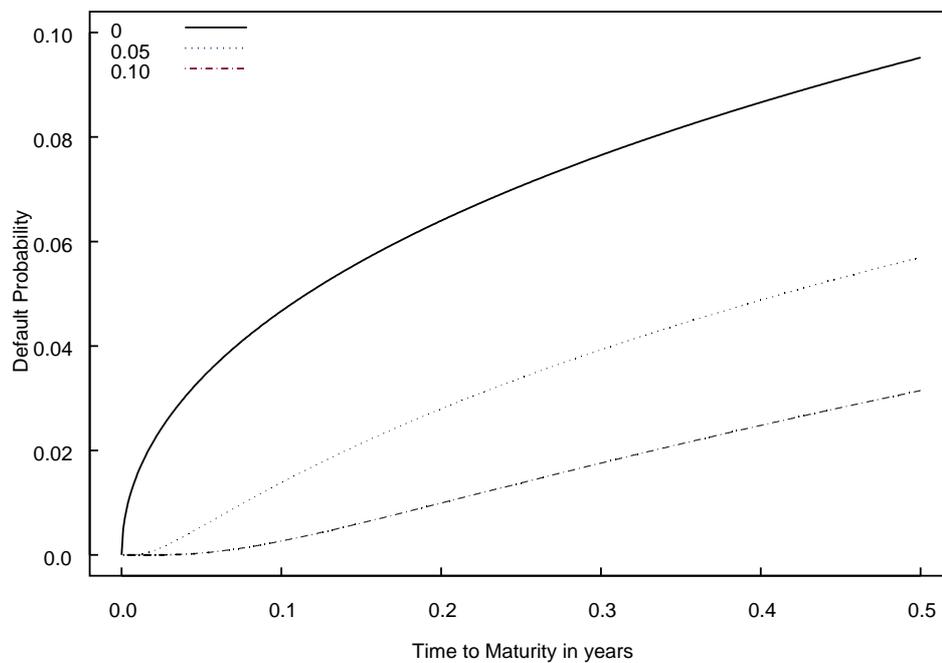


図4 企業価値過程と倒産閾値との距離 ($Z_t - M_t = 0, 0.05, 0.1$) を変化させた場合の, 満期までの期間 ($T-t$) における倒産確率 $p(T-t, Z_t - M_t)$

6.2 倒産閾値がベータ分布に従う場合

本節では、倒産閾値がベータ型分布に従っていると仮定したモデル (5.21) の特性を、数値実験を通して明らかにする。次の 3 種類のグラフから分析を行う。

1. ベータ分布のパラメーター (a, b) を変化させた場合の倒産確率と信用スプレッド。
2. 企業価値と倒産閾値の距離を変化させた場合の、満期までの期間における倒産確率と信用スプレッド。
3. 高さパラメータ κ を変化させた場合の、満期までの期間における倒産確率と信用スプレッド。

また、企業価値過程 Z_t のドリフト m とボラティリティ σ は前節と同様の値に設定する。

- ドリフト $m = 0.05$, ボラティリティ $\sigma = 0.2$

6.2.1 ベータ分布のパラメーター (a, b) と倒産確率・信用スプレッドの関係

モデルのパラメータを以下のように設定する。

- 企業価値の初期値 $V_0 = 1$
- 現時点の企業価値 $Z_t = \ln(1.2)$
- 現時点の最小値 $M_t = \ln(0.9)$
- 高さパラメータ $\kappa = 0.8$
- 満期時点 $T = 1$

この設定の下で、ベータ分布のパラメータ (a, b) を各々 2 から 10 と変化させた場合に得られる倒産確率・信用スプレッドを図 5 と図 6 に示した。

図 5 と図 6 より、ベータ分布のパラメータ (a, b) の変化に関して次の結果が得られた。

- $a = 10, b = 2$ のとき最大。すなわち、 a が大きくなればなるほど、 b が小さくなればなるほど、倒産確率・信用スプレッド共に上昇傾向がある。
- $a = 2, b = 10$ のとき最小。すなわち、 b が大きくなればなるほど、 a が小さくなればなるほど、倒産確率・信用スプレッド共に下降傾向がある。

これは、一般的なベータ分布の形状を考えた場合、 $a > b$ の場合は分布が右寄りに、 $a < b$ の場合は分布が左寄りに歪む事と関連すると考えられる。よって、分布が限りなく右寄りの場合、すなわち、倒産閾値が企業価値の初期値 V_0 の付近に分布している場合、倒産までの距離が近い為、結果的に信用リスクが高まったと考えられる。

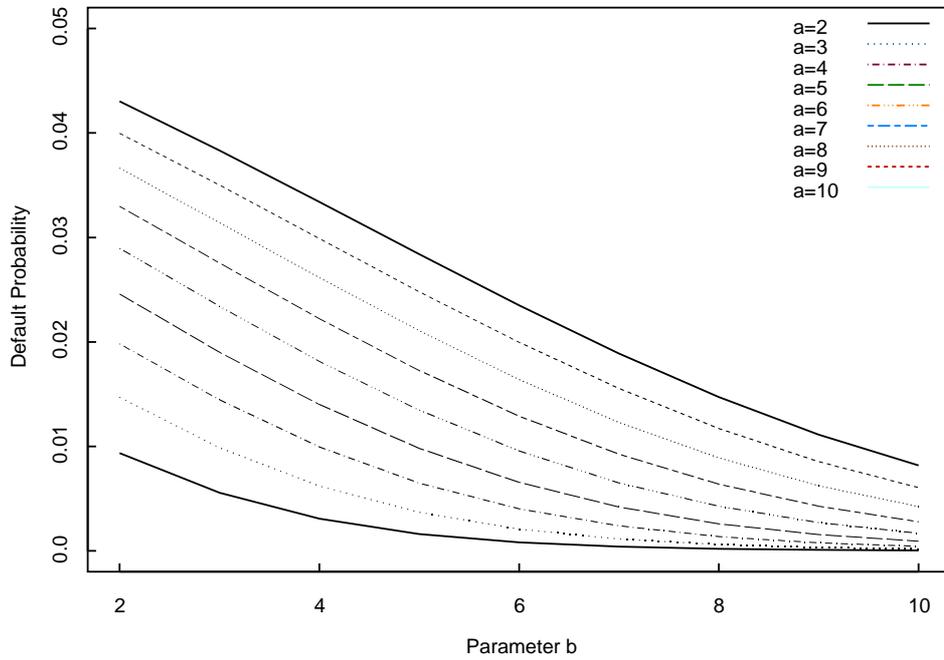


図5 ベータ分布のパラメーター $(a, b) \in [2, 10]$ を変化させた場合の倒産確率

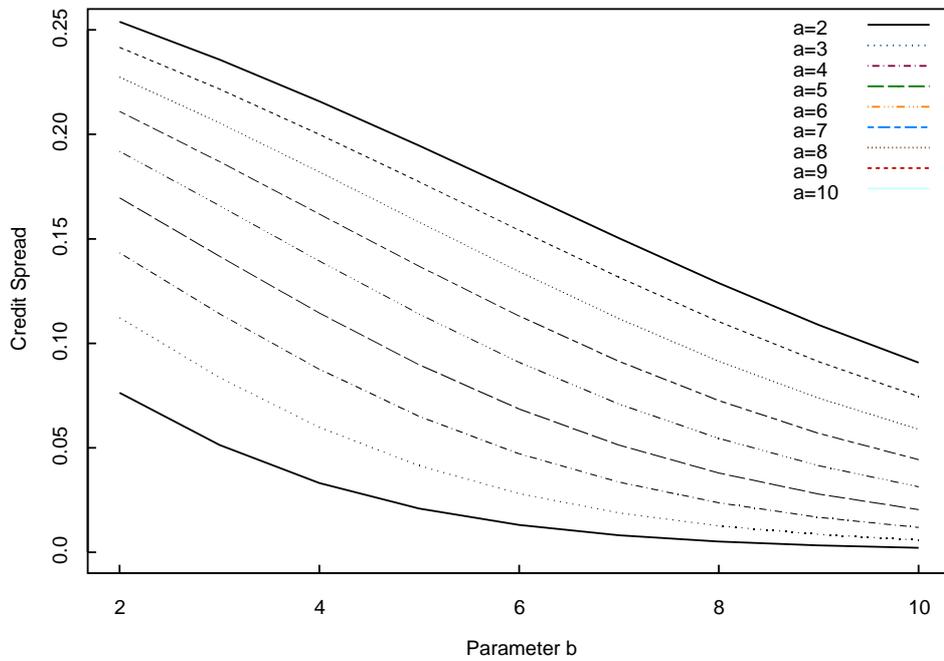


図6 ベータ分布のパラメーター $(a, b) \in [2, 10]$ を変化させた場合の信用スプレッド

6.2.2 企業価値・倒産閾値の距離 ($Z_t - M_t$) と倒産確率・信用スプレッドの関係

モデルのパラメータを以下のように設定する。

- 企業価値の初期値 $V_0 = 1$
- 企業価値と倒産閾値の距離 $Z_t - M_t = 0, 0.05, 0.1$
- 高さパラメータ $\kappa = 0.8$
- 満期時点 $T \in [0, 5]$ 年
- ベータ分布のパラメータ $(a, b) = (2, 2), (10, 2), (5, 5), (2, 10)$ の 4 種類

図 7 と図 8 より、企業価値と倒産閾値の距離 $Z_t - M_t$ によって、倒産確率、信用スプレッドの構造が変化する結果となった。これは前節で分析した倒産閾値が指数型に分布するモデルで得られた結果と同じである。すなわち、 Z_t と M_t の距離が小さいほど、倒産閾値に近いリスクを見積もり、全体的に信用リスクを高く評価する。

一方でベータ分布のパラメータ (a, b) の変化により、倒産確率、信用スプレッドが変化する事が示された。これは前小節で述べた通り、分布形状の変化によるリスクに関連すると考えられるため、結果として同様の傾向を示している。また、倒産閾値が指数型に分布するモデルに比べ、パラメータ (a, b) により柔軟なリスク変化を表現できると考えられる。

6.2.3 高さパラメータ κ と倒産確率・信用スプレッドの関係

モデルのパラメータを以下のように設定する。

- 企業価値の初期値 $V_0 = 1$
- 現時点の企業価値 $Z_t = \ln(1.2)$
- 現時点の最小値 $M_t = \ln(0.9)$
- 高さパラメータ $\kappa = 0.25, 0.5, 0.75, V_0$
- 満期時点 $T \in [0, 5]$ 年
- ベータ分布のパラメータ $(a, b) = (2, 2), (10, 2), (5, 5), (2, 10)$ の 4 種類

図 9 と図 10 より、高さパラメータ $\kappa \in [0, V_0]$ を $\kappa = 0.25, 0.5, 0.75, V_0$ と変化させた場合、初期値 V_0 とベータ分布の高さパラメータ κ との距離が短いほど、倒産確率、信用スプレッドは上昇する結果となった。倒産閾値の分布 $G(x), x \in [0, 1]$ は高さパラメータによって、 $x \in [0, \kappa]$ へスケールされる。よって倒産閾値の分布が、初期値 V_0 の近辺（裾野部分）まで分布している場合、すなわち、現在の企業価値の近辺に倒産閾値がある確率が高い場合、全体的にリスクの度合いが高まる結果となる。また、 κ が現在の企業価値 V_0 と乖離している場合、倒産閾値のレベルが低い場合、倒産確率、信用スプレッドはほとんど 0 に等しい。

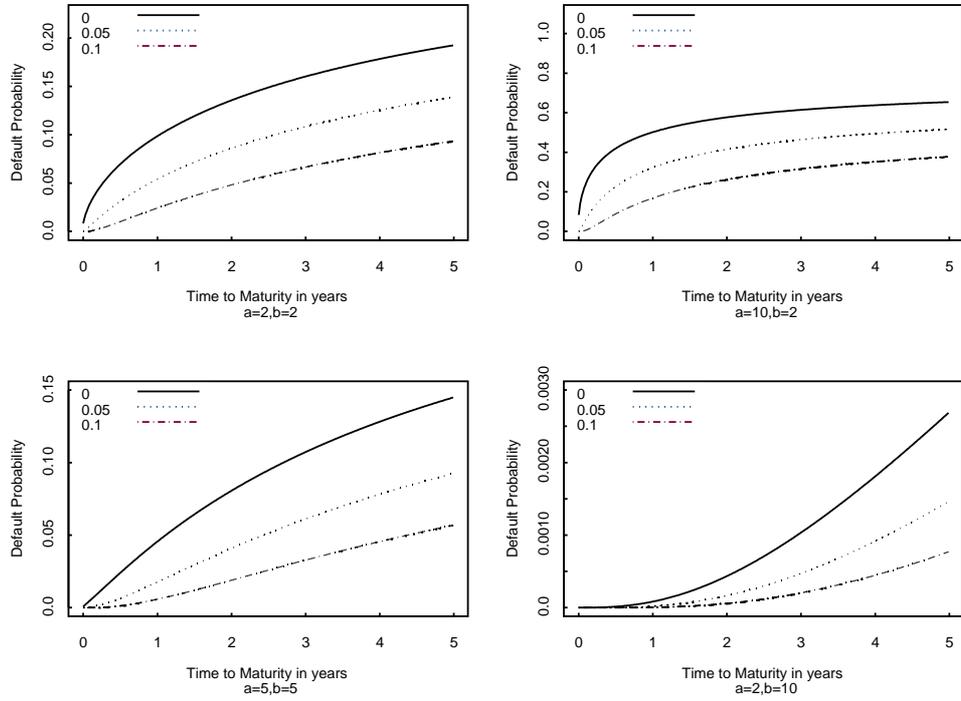


図7 企業価値・倒産閾値の距離 $Z_t - M_t = 0, 0.05, 0.1$ の場合の倒産確率

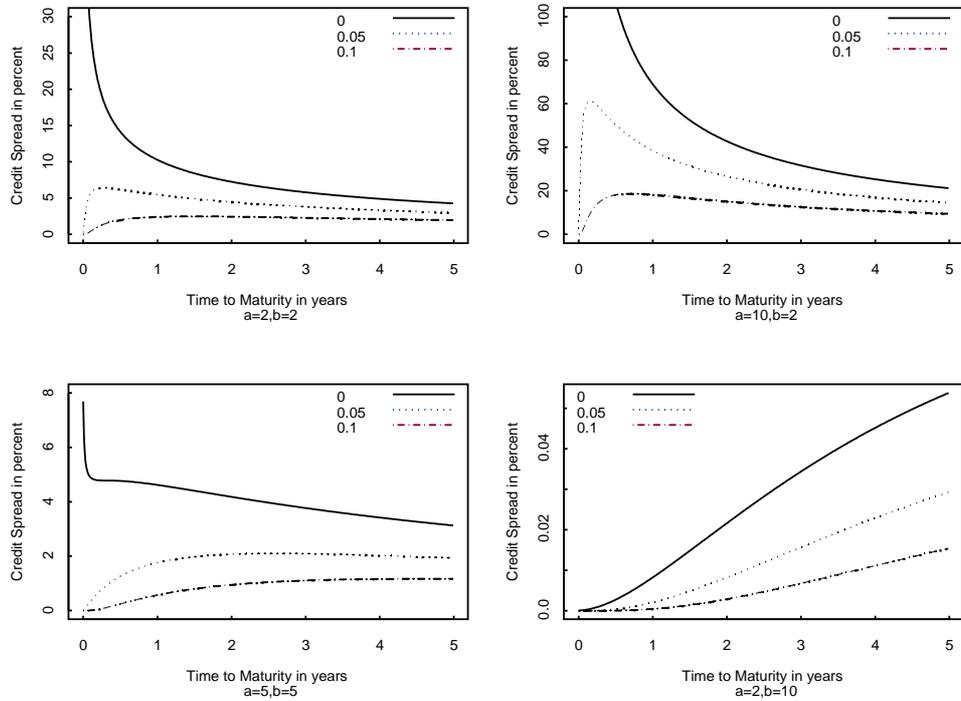


図8 企業価値・倒産閾値の距離 $Z_t - M_t = 0, 0.05, 0.1$ の場合の信用スプレッド

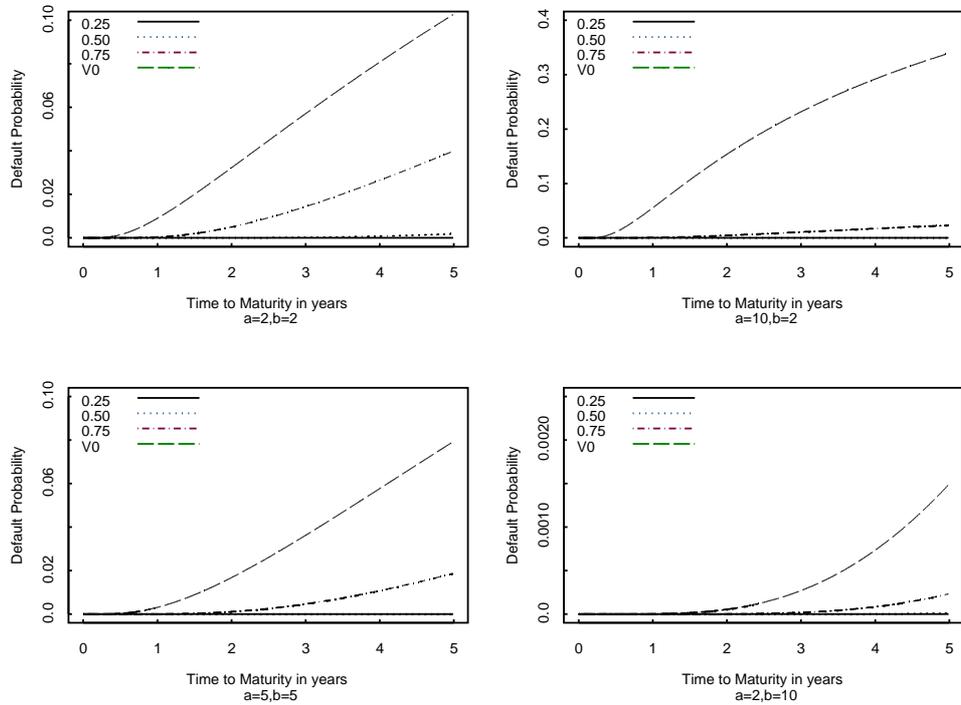


図9 高さパラメータ $\kappa = 0.25, 0.5, 0.75, V_0$ の場合の倒産確率

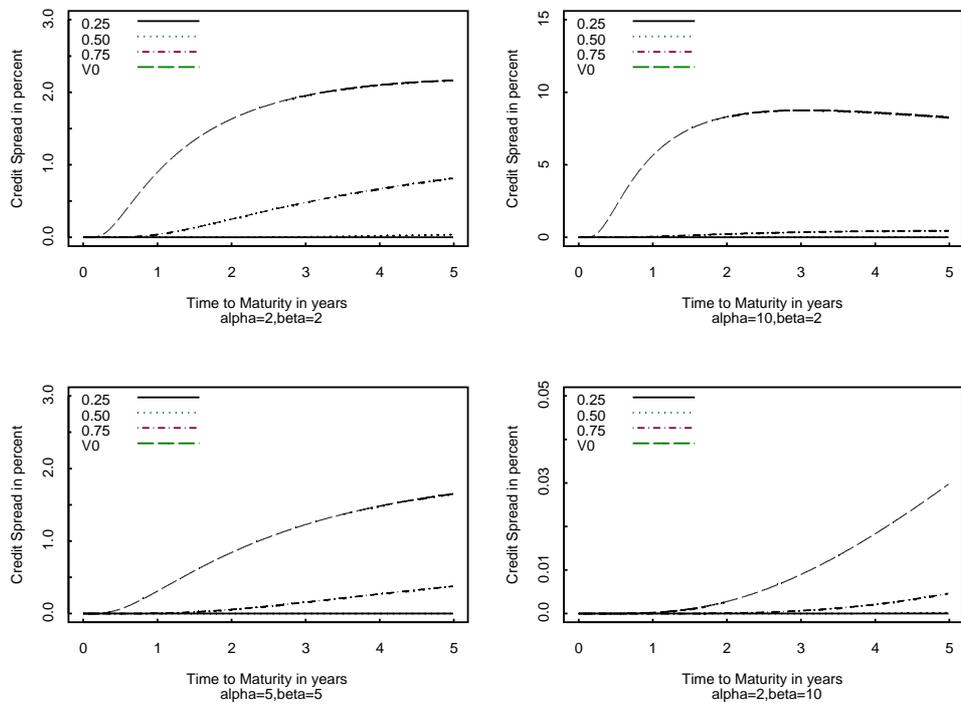


図10 高さパラメータ $\kappa = 0.25, 0.5, 0.75, V_0$ の場合の信用スプレッド

7 実証分析

7.1 モデルの設定

本稿では、倒産閾値が不完全情報構造の信用リスクモデルの詳細を紹介し、第5章でモデル化した。本章ではそれらのモデルを用い、本邦企業の財務データからモデルのパラメータ推定、及び倒産確率・信用スプレッドの予測値を算出する。予測した算出値の比較に当たっては、完全情報構造型モデルの一つである Black & Cox 型を対象とし分析する。

評価に際し、企業価値過程、及び株価過程は完全情報型・不完全情報型モデルと共通であるため^{*22}、次のように設定する。

7.1.1 企業価値過程 V_t

時刻 t における企業価値過程 V_t は、以下の確率微分方程式に従うものとする。

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (7.1)$$

$$V_t = V_0 e^{Z_t} \quad (7.2)$$

$$Z_t = mdt + \sigma dW_t \quad m = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (7.3)$$

但し、 μ は期待収益率、 σ はボラティリティ、 W_t は標準ブラウン運動である。

7.1.2 株価過程 E_t

時刻 t における株価過程 S_t は、以下の確率微分方程式に従うものとする。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_S dt + \sigma_S dW_t \quad (7.4)$$

但し、 μ_S は期待収益率、 σ_S はボラティリティ、 W_t は標準ブラウン運動である。また、株式時価総額を $E_t = nS_t$ と定義し、

$$\frac{dE_t}{E_t} = \mu_E dt + \sigma_E dW_t \quad (7.5)$$

に従うものとする。但し、 $\mu_S = \mu_E, \sigma_S = \sigma_E$ である。

^{*22} 倒産閾値のみが不完全情報と仮定している。企業価値過程が不完全情報のモデルは Duffie-Lando[3] を参照の事。

7.2 共通パラメータの推定手法

実証分析に際し，完全情報型・不完全情報型モデルに必要な共通のパラメータを推定する必要がある．推定すべき共通パラメータ ($T, K_T, V_0, \mu, \sigma, \sigma_E$) の詳細は次の通りである．

1. 満期（予測）時点 T
 $T = 1$ 年と設定する．
2. 時点 T における負債価値 K_T
 負債の時価はマーケットで観測する事ができない．よって便宜上，1年後の負債価値を企業が公表している直近の財務諸表の簿価， $K_T = K_0$ と設定する．
3. 時点 $t = 0$ における企業の資産価値 V_0
 株式時価総額 E_0 と負債総額 K_0 の和とする．

$$\text{企業価値 } V_0 = \text{負債総額 } K_0 + \text{株式時価総額 } E_0 (= \text{株式発行数 } n \times \text{現時点の株価 } S_0) \quad (7.6)$$

これは，企業が生み出す将来の期待キャッシュフローの現在価値が，マーケットで評価されていると考えるものである．

4. 企業価値過程 Z_t の期待収益率 μ
 無リスク金利 r を用い， $\mu = r$ とする． r には1年物国債金利を使う．
5. 企業価値過程 Z_t のボラティリティ σ
 Merton[9] のオプションアプローチを拡張した，安藤・丸茂 [16] ノックアウト・オプションアプローチを用いて算出する．具体的には次の関係式，

$$\sigma_E E_t = \Delta(V_t, t) \sigma V_t \quad (7.7)$$

から σ をインプライドに算出する．但し， Δ はオプション価格関数のデルタである．キャリブレーション手法の詳細に関しては，次節で取り上げる．

6. 株式時価総額過程 $E_t = nS_t$ のボラティリティ σ_E
 過去の株価データ S_t (日次終値) から算出した年率ヒストリカルボラティリティを用いる．算出には以下の式を用いた．

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \quad (7.8)$$

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\ln \frac{S_i}{S_{i-1}} - m \right)^2 \quad (7.9)$$

$$\tilde{\sigma}_E = \sqrt{250 * \sigma_E} \quad (7.10)$$

7.3 ノックアウト・オプションによるキャリブレーション手法

従来から用いられている Merton モデルでは、ヨーロピアン・オプションの枠組みで信用リスク評価が行われていた。しかしヨーロピアンタイプ的手法では、企業の倒産を満期 T でのみ評価するため、時点 T 以前に倒産する可能性を考慮していなかった。本稿で対象としている不完全情報モデルでは、Black & Cox[1] の初到達時刻モデルをベースとしたモデルであるため、従来のヨーロピアン・オプションアプローチでは推定方法に問題がある。

従って本稿では、満期時点 T 以前の各時点 t に於いて評価可能な安藤・丸茂 [16] のノックアウト・オプションアプローチ手法を導入し、企業価値過程 Z_t のパラメータ σ を推定する。

7.3.1 ノックアウト・オプションについて

ノックアウト・オプションとは、時点 $t(0 \leq t \leq T)$ における原資産価格 S_t が、満期 T までにあるノックアウト閾値 m を下回らなかった場合に、権利行使価格 K のペイオフ $S_T - K$ があるオプションである^{*23}。従って、ペイオフ関数 KO_T は、

$$KO_T = \begin{cases} \max(S_T - K, 0), & \min_{0 \leq t \leq T} S_t > m \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (7.11)$$

となる。ここで、原資産価格過程が、

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_S dt + \sigma_S dW_t \quad (7.12)$$

に従っている場合、ノックアウト・オプションの時点 t における価格は、

$$\begin{aligned} KO(S, t) = & S \Phi(d1) - K \exp\{r(T-t)\} \Phi(d1 - \sigma_S \sqrt{T-t}) - \left(\frac{S}{m}\right)^{-(1+2r/\sigma_S^2)} \Phi(d2) \\ & + K \exp\{-r(T-t)\} \left(\frac{S}{m}\right)^{1-2r/\sigma_S^2} \Phi(d2 - \sigma_S \sqrt{T-t}) \end{aligned} \quad (7.13)$$

但し、

$$d1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma_S^2/2)(T-t)}{\sigma_S \sqrt{T-t}} \quad (7.14)$$

$$d2 = \frac{\ln(m^2/SK) + (r + \sigma_S^2/2)(T-t)}{\sigma_S \sqrt{T-t}} \quad (7.15)$$

である。

7.3.2 企業価値過程 V_t のボラティリティ σ の推定方法

上述のノックアウト・オプション価格式を用いて、企業価値過程 V_t ボラティリティ σ をインプライドに算出する手法を紹介する。

ノックアウト事象を企業の倒産事象と定義しなおす。すなわち、時点 T 以前に企業の資産価値 V_t が負債価値 K_T を下回る場合、企業は債務超過で倒産と考え、時点 T での株式時価総額 E_T は 0 となる。また下回らなかった場合、株式時価総額 $E_T = nS_T$ は資産価値から負債総額を引いた値 $V_T - K_T$ であると仮定する。これを以下のように定義する。

$$E_T = \begin{cases} \max(V_T - K_T, 0), & \min_{0 \leq t \leq T} V_t > K_t \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (7.16)$$

これは、原資産を企業の資産価値 V 、権利行使価格とノックアウト値を企業の負債総額 K_T 、オプションの満期を T としたノックアウト・コールオプションの価格に等しい。

^{*23} これはダウン・アンド・アウトタイプのノックアウト・オプションと呼ばれている。

よって、時点 t における株式時価総額 E_t が、ダウン・アンド・アウトタイプのノックアウト・コールオプションの価値に等しいと仮定すれば、(7.13) より、

$$KO(V,t) = V\Phi(d1) - K_0 \exp\{r(T-t)\}\Phi(d1 - \sigma\sqrt{T-t}) - V\left(\frac{V}{K_0}\right)^{-(1+2r/\sigma^2)}\Phi(d2) \\ + K_0 \exp\{-r(T-t)\}\left(\frac{V}{K_0}\right)^{1-2r/\sigma^2}\Phi(d2 - \sigma\sqrt{T-t}) \quad (7.17)$$

但し、

$$d1 = \frac{\ln(V/K_0) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (7.18)$$

$$d2 = \frac{\ln(K_0/V) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (7.19)$$

である。このオプションのデルタ、ガンマ、セータは、

$$KO_V(V,t) = \frac{\partial KO_V(V,t)}{\partial V} \\ = \Phi(d1) + \left(\frac{2r}{\sigma^2}\right)\left(\frac{V}{K_0}\right)^{-(1+2r/\sigma^2)}\Phi(d2) \\ + \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2}\right)\exp\{-r(T-t)\}\left(\frac{V}{K_0}\right)^{-2r/\sigma^2}\Phi(d2 - \sigma\sqrt{T-t}) \quad (7.20)$$

$$KO_{VV}(V,t) = \frac{\partial^2 KO_V(V,t)}{\partial V^2} \quad (7.21)$$

$$KO_t(V,t) = \frac{\partial KO_V(V,t)}{\partial t} \quad (7.22)$$

であるので、伊藤のレナマより株式時価総額 E_t が従う確率微分方程式は、

$$dE_t = \left(KO_V(V_t,t)V_t\mu + KO_t(V_t,t) + \frac{1}{2}KO_{VV}(V_t,t)\sigma^2V_t^2 \right) dt + KO_V(V_t,t)\sigma V_t dW_t \quad (7.23)$$

また、株式時価総額 E_t の過程、

$$\frac{dE_t}{E_t} = \mu_E dt + \sigma_E dW_t \quad (7.24)$$

と比較すると、ボラティリティに関して以下の関係式を得る。

$$\sigma_E E_t = \frac{\partial KO_V(V,t)}{\partial V} \sigma V_t \quad (7.25)$$

$$= \left[\Phi(d1) + \left(\frac{2r}{\sigma^2}\right)\left(\frac{V_t}{K_0}\right)^{-(1+2r/\sigma^2)}\Phi(d2) \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2}\right)\exp\{-r(T-t)\}\left(\frac{V_t}{K_0}\right)^{-2r/\sigma^2}\Phi(d2 - \sigma\sqrt{T-t}) \right] \sigma V_t \quad (7.26)$$

以上より、 $t=0$ の値を用いて企業価値過程のボラティリティ σ は、

$$\sigma_E E_0 = \left[\Phi(d1) + \left(\frac{2r}{\sigma^2}\right)\left(\frac{V_0}{K_0}\right)^{-(1+2r/\sigma^2)}\Phi(d2) \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2}\right)\exp\{-rT\}\left(\frac{V_0}{K_0}\right)^{-2r/\sigma^2}\Phi(d2 - \sigma\sqrt{T}) \right] \sigma V_0 \quad (7.27)$$

を σ に関して解けば得られる。

7.4 分布パラメータの推定手法

前節では、完全情報型・不完全情報型モデルで分析する際に必要な共通のパラメータ推定手法を述べた。本節では、不完全情報型のベータ型分布モデル (5.21) において必要なパラメータ (a, b, κ) の推定手法を述べる。

7.4.1 ベータ分布のパラメータ (a, b, κ)

ベータ分布のパラメータ推定手法に関しては、Kay Giesecke[6] で提案されている手法を参考にする。ベータ分布の平均・分散は、

$$E[x] = \frac{a}{a+b} \quad (7.28)$$

$$V[x] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \quad (7.29)$$

である。Kay Giesecke[6] では分布の平均を企業から公表された直近の負債額 K_t と置いている。これは企業が毎期公表している財務データにノイズが含まれていると考え^{*24}、その不確実性分布によってモデル化するものである。

一方で分布の分散に関しては、公表された財務データの不確実性の度合いを測る。よって、投資家が自由にその値を設定できる。企業のコンプライアンスに問題があると考えられる場合など、分散のパラメータが大きくなるように設定をし、信用リスクを過大に評価する事ができる。Kay Giesecke[6] ではこの分散レベルを、

$$V[x] = (\kappa - E[x]) \left(\frac{E[x]}{10} \right) \quad (7.30)$$

と設定している。この値は経験的に求めたものである為、どのような水準が最適であるかの議論をしなければならない。本稿ではその議論は深く行わず、分散のレベルは全ての企業に関して一定と考え上記の式を採用し、以上の2式から分布パラメータ (a, b) を毎期逆算する。

分布の高さを決めるパラメータ κ に関して Kay Giesecke[6] では、

$$\kappa = \frac{\text{現在の負債額 } K_t}{\text{過去6ヶ月間に観測した最大のレバレッジレシオ}} \quad (7.31)$$

と置いている。仮に κ を算出した時点での負債額が、過去に観測した最大のレバレッジレシオと等しいならば、

$$\kappa = \frac{K_t}{\frac{K_t}{V_t}} = V_t \quad (7.32)$$

となり、現在の企業価値に等しくなる。この場合、閾値の分布範囲が $\kappa \in (0, V_t)$ と広範囲に広がっている状況を示す。

^{*24} 財務データの操作による不確実性を考慮している。米国のエンロンが良い例である。対して従来の Black & Cox 型では、分散が0で倒産閾値が一定で負債額に等しいという仮定である。

7.5 個別企業分析

この節では本邦個別企業の財務データを用いて、完全情報モデル・不完全情報モデルの枠組みで信用リスク評価を行う。評価に用いるモデルは、

1. 完全情報型：Black & Cox モデル
2. 不完全情報型：指数型モデル
3. 不完全情報型：ベータ分布型モデル

この3つのモデルから算出される倒産確率、信用スプレッドを各企業間で比較する。評価に際し、対象企業の設定、及び財務データの選別を行う。

7.5.1 対象企業の設定

次の基準で対象企業を選別する。

1. 東証一部上場企業
2. 同業種で資産規模が同等の企業

この基準を満たし、かつ比較対象として次の項目を満たす企業を選別する。

1. 過去に倒産実績のある企業、及び現存している企業

上記から本研究において対象とする2つの企業を表1のように選別した。尚、対象とするデータ期間は1998/04/01～2002/03/01の4年間とした。また分析に用いる財務データは中間決算、本決算の2期分とする^{*25}。両社の8期分の財務データは付録Fの表6、及び表7に示した。

表1 個別分析の対象企業

企業名(証券コード)	業種	法的申請日
佐藤工業(1804)	建設	2002/03(会社更生法)
西松建設(1820)	建設	現存

7.5.2 倒産確率の比較

完全情報型、及び不完全情報型モデルを用い、佐藤工業(1804)と西松建設(1820)それぞれの株価・財務データから1年後の倒産確率の算出を行った。算出値を比較する際に、次の3つのケースを比較項目として分析する^{*26}。

1. 完全情報型：Black & Cox モデルと不完全情報型：指数型分布モデルの比較
2. 完全情報型：Black & Cox モデルと不完全情報型：ベータ型分布モデルとの比較
3. 不完全情報型：指数型分布モデルと不完全情報型：ベータ型分布モデルとの比較

また完全情報型モデル・不完全情報型モデルの倒産確率算出値の差(乖離度)は平均誤差(Mean Error)を用いて分析する。平均誤差は比較する時系列データを x_t, y_t とすると、

$$ME(\%) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{y_t - x_t}{x_t} \quad (7.33)$$

で求められる。モデル間の倒産確率の平均誤差を、表2(佐藤工業)と表3(西松建設)に示した。

^{*25} オンラインデータベースのeol DB タワーサービスから取得。

^{*26} 分析には完全情報型：Merton モデルは用いなかった。不完全情報型モデルは初到達時刻モデルをベースとしているため、比較対象としてはBlack & Cox モデルのみで十分とした。尚、Merton モデルとBlack & Cox モデルの比較分析に関しては、安藤・丸茂[16]を参照の事。

表 2 完全情報型と不完全情報型の倒産確率の平均誤差（佐藤工業）

	Exp	Scaled-Beta
Black & Cox	0.2175197	23.25111

表 3 完全情報型と不完全情報型の倒産確率の平均誤差（西松建設）

	Exp	Scaled-Beta
Black & Cox	122.611	163.2714

表 4 予測値（倒産確率）の統計値（佐藤工業）

	Black & Cox	Exp	Scaled-Beta
Max	0.2970137	0.01551748	0.3721226
Min	0.0000276	0.00000007	0.0218558
Mean	0.0422430	0.00387526	0.1054797
Std Dev	0.0607732	0.00409436	0.0741387

表 5 予測値（倒産確率）の統計値（西松建設）

	Black & Cox	Exp	Scaled-Beta
Max	0.02943487	0.09351344	0.1011719
Min	0.00000001	0.00484956	0.0146929
Mean	0.00463533	0.03040817	0.0447631
Std Dev	0.00698665	0.01700934	0.0211005

【ケース 1】完全情報型：Black & Cox モデルと不完全情報型：指数型分布モデルの比較

佐藤工業の場合（図 17）と西松建設の場合（図 18）で倒産確率の予測傾向に差が生じている。前者では倒産確率に関して完全情報型の Black & Cox モデルに比べ、不完全情報型の指数型分布モデルは相対的に低い傾向が示されている。表 2 の平均誤差を見ても、平均的に低い事が分かる。これには次のような考察が考えられる。

倒産傾向が高い企業の場合、一般的にはレバレッジレシオが非常に高く債務超過に陥りやすい。佐藤工業（1840）の場合、表 2 の財務データ、及び図 15 から倒産の 4 年前からレバレッジレシオが 90% 台で推移している。完全情報型の Black & Cox モデルは現在の企業価値 V_t と倒産閾値である負債総額 K_t との距離でのみ倒産まであとどのくらいを完全情報として倒産確率で評価する。よって、このようにレバレッジが高い状況では、倒産確率を高く算出する。

一方、不完全情報型の指数型モデルでは、倒産閾値は不完全情報である。閾値は一樣に分布しており、リスクの度合いは、現在の企業価値 Z_t と過去最も低い企業価値 M_t との距離で評価される。最も倒産閾値に近い場合、すなわち $Z_t - M_t = 0$ という状況であれば、倒産リスクが高い。図 11 から、佐藤工業の倒産直前時（2002 年近辺）の距離 $Z_t - M_t$ は 0 付近で推移しているが、倒産確率は Black & Cox モデルに比べ相対的に低い。これは、企業価値過程 Z_t ボラティリティ σ の影響によるものと考えられる。図 13 から、ボラティリティ σ は 1% ~ 3% 台と低めに推移しているため、 $Z_t - M_t$ の距離が短くとも、倒産確率の予測値は低くなってしまいう結果となった。従って、指数型モデルではボラティリティによる影響が大きいと考えられる。

では倒産リスクがそれほど高くない西松建設（1820）ではどうであるか。図 18 より佐藤工業のケースとは逆に、完全情報型の Black & Cox モデルより不完全情報型の指数型モデルのほうが倒産確率が総じて高く算出されている。表 3 の財務データ、及び図 16 に注目すると、佐藤工業に比べレバレッジレシオは 0.7 ~ 0.8 台と相対的に低い。よって Black & Cox モデルでは、企業価値 V_t と倒産閾値である負債総額 K_t の距離が遠く、倒産確率を高く予測しない。対して指数型分布モデルでは、図 12 から $Z_t - M_t$ は 0.02 ~ 0.10 台と比較的高めに推移しているが、図 14 よりボラティリティ σ が 6% ~ 10% 台と佐藤工業に比べ高めに推移している。よって先に述べたとおり、ボラティリティの影響が強く倒産確率は Black & Cox モデルに比べ高めに予測されている。

以上の結果から、倒産危険度の高い企業、すなわちレバレッジレシオが高い企業に対しては、指数型モデルは Black & Cox モデルに比べ、財務データの不完全性リスクを加味しても高いリスク量を算出できない問題点がある。すなわち、 $Z_t - M_t$ よりもボラティリティによる影響が大きい。しかし安定的な企業に対しては、財務データの不完全性リスクを加味するため、完全情報型モデルよりも総じて高い倒産確率を算出すると考察できる。従って、倒産間近の企業、すなわちレバレッジレシオの高い企業に対してこのモデルを用いるのは過小評価してしまう危険性がある。安定的な企業の場合、特にエンロンのような事例に有効であると考えられる。

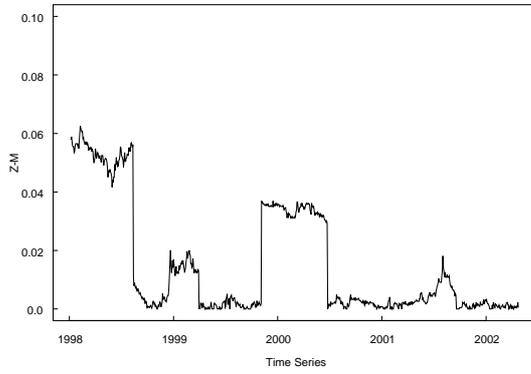


図 11 $Z_t - M_t$ の時系列 (佐藤工業)

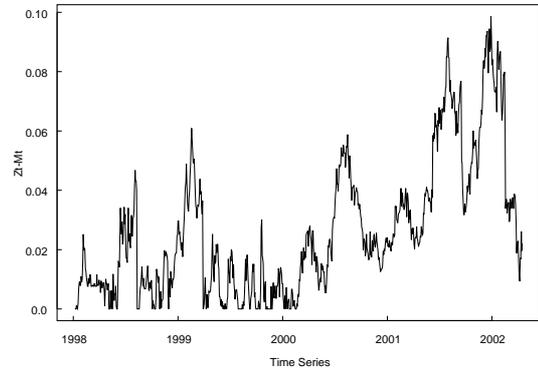


図 12 $Z_t - M_t$ の時系列 (西松建設)

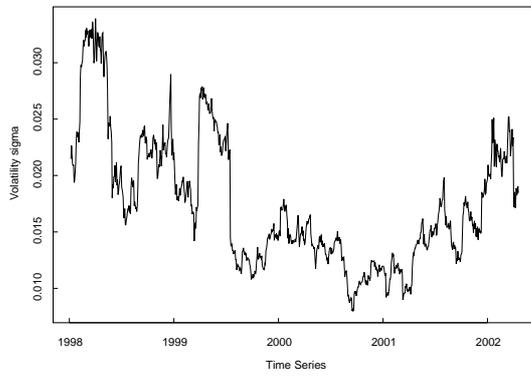


図 13 Z_t のボラティリティ σ (佐藤工業)

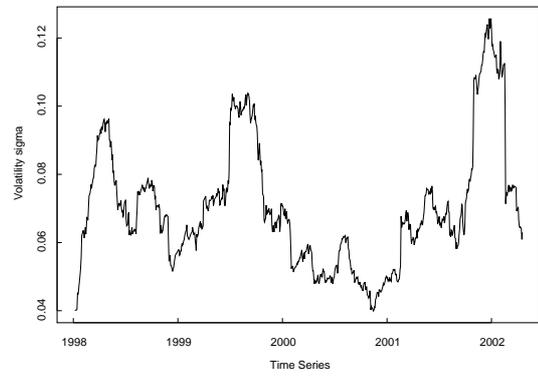


図 14 Z_t のボラティリティ σ (西松建設)

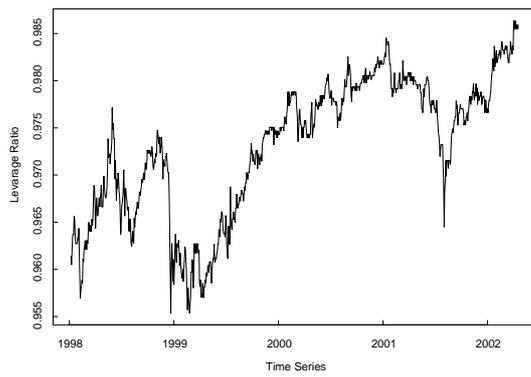


図 15 レバレッジレシオの推移 (佐藤工業)



図 16 レバレッジレシオの推移 (西松建設)

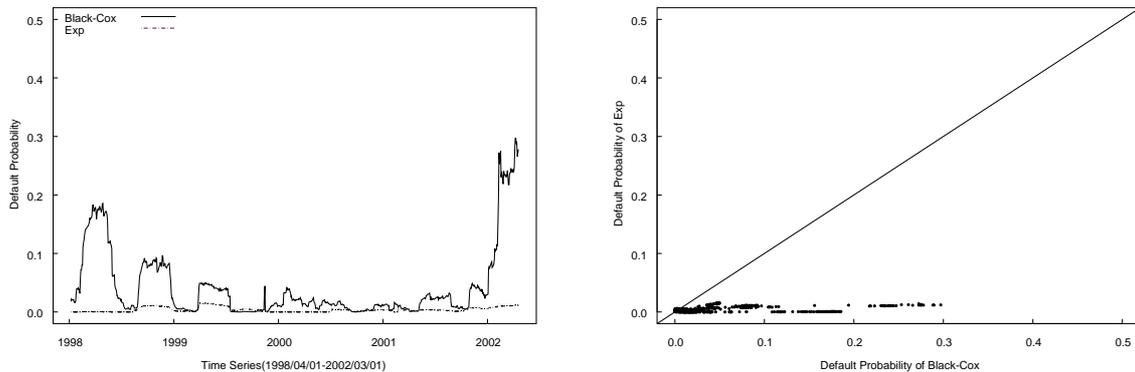


図 17 完全情報型：Black & Cox モデルと不完全情報型：指数型モデルの倒産確率の比較（佐藤工業）

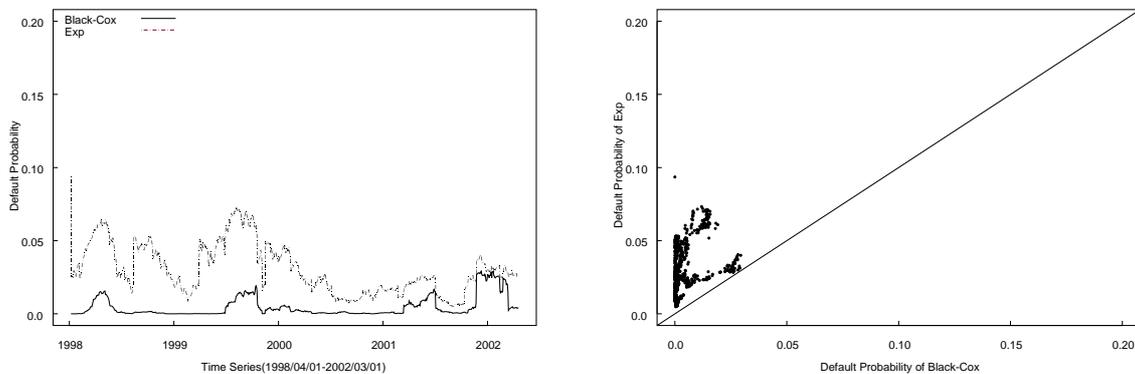


図 18 完全情報型：Black & Cox モデルと不完全情報型：指数型モデルの倒産確率の比較（西松建設）

【ケース 2】完全情報型：Black & Cox モデルと不全情報型：ベータ分布型モデルとの比較

佐藤工業の場合（図 21）と西松建設の場合（図 22）で倒産確率の傾向は同様の結果を得た．どちらのケースでも、相対的に完全情報型の Black & Cox モデルより不完全情報型のベータ分布型モデルのほうが倒産確率の予測値が高い結果となっている．表 2（佐藤工業）と表 3（西松建設）の平均誤差を比べても、ベータ分布型が高い．

先の指数型モデルとの大きな違いは、倒産閾値が一樣ではなくパラメータ κ でスケールしたベータ分布に従っている点である．過去のレバレッジレシオから毎日 κ を算出し、倒産閾値の分布範囲を決めている．よってある時点でレバレッジレシオが過去に観測された最大のレバレッジレシオに非常に近い状況では、閾値の分布が現在の企業価値 V_t の近くにまで分布している状況をモデル化できる．この場合、倒産リスクが非常に高く算出される．図 15 に注目すると、現在の企業価値 V_0 と分布の高さを表すパラメータ κ の値が倒産直前では非常に近い値（0.1 近辺）となっている．これは、倒産閾値が V_0 のすぐ近辺に分布している状況を表し、図 21 より倒産直前の倒産確率が高く（約 0.4 程度）予測されている．また分布パラメータ a, b によって、負債レベル K_t を平均としてその周辺の分布形状を歪めるため、負債レベル K_t が非常に高ければ、閾値は現在の企業価値 V_t の周囲にある確率が高まる．

以上から、ベータ分布型モデルの場合は、過去のレバレッジレシオと高さパラメータ κ によって閾値を柔軟に変化できるため、完全情報型の Black & Cox モデル、及び不完全情報型の指数型分布モデルに比べ不完全性リスクを非常に高く算出できるモデルである事が実証できる．また、指数型分布モデルのように倒産危険度の高い企業、及び安定度の高い企業で問題点は見受けられなかった．いずれの場合も不完全情報の不確実性リスクにより、完全情報型の Black & Cox モデルに比べて高い信用リスク評価ができるモデルであると考えられる．

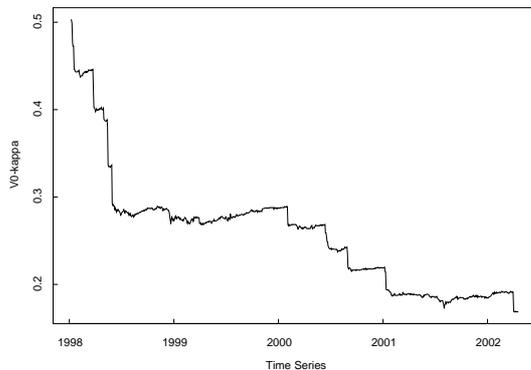


図 19 $V_0 - \kappa$ の推移 (佐藤工業)

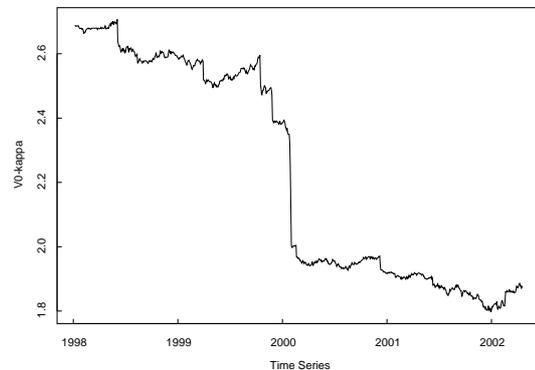


図 20 $V_0 - \kappa$ の推移 (西松建設)

【ケース 3】 不完全情報型：指数型分布モデルと不完全情報型：ベータ分布型モデルとの比較

佐藤工業の場合 (図 23) と西松建設の場合 (図 24) で倒産確率の傾向はベータ分布型の方が相対的に高い結果となった。これは先の考察と同様である。倒産閾値の分布を過去のレバレッジレシオ、高さパラメータ κ 、及び分布パラメータ a, b により自由に設定できるため、閾値が一様に分布していると仮定している指数型に比べ、企業の財務状況に見合った不完全性リスクを加味できると考えられる。

7.5.3 信用スプレッドの比較

対象企業 2 社に関して、佐藤工業が倒産する直前 (2002 年 2 月 1 日) における満期まで 3 年間の信用スプレッドを分析する。

【佐藤工業のケース】 図 25 より、倒産直前における信用スプレッドから次の考察が得られる。

倒産までの距離が完全情報として把握できる Black & Cox モデルでは、短期的なスプレッドが 0 となっている。これは倒産時刻が可予測なモデルのため、倒産リスクが高い (レバレッジレシオが高い^{*27}) 状況であってもこのケースでは突発的なスプレッドの表現ができない事を実証している。対して不完全情報型モデル (指数型、ベータ分布型) では、企業価値と最小値までの距離 $Z_t - M_t$ が 0 に近い (倒産リスクが高い) 状況では、短期スプレッドは無限大に発散している^{*28}。

またモデル間の全体的なスプレッド幅を比べると、倒産確率の算出値の差と同様の結果が得られた。すなわち、倒産リスクの高い状況ではベータ分布型がスプレッド幅が高く、指数型は Black & Cox モデルに比べ過小評価になっている。

【西松建設のケース】

図 26 より、2002 年 2 月 1 時点における西松建設の信用スプレッドを見ると、倒産直前の佐藤工業に比べ安定的な財務構造であるためスプレッド幅が低い。モデル間のスプレッド幅を見ると、レバレッジレシオが相対的に低い状況^{*29}では突発的な倒産リスクが低いいため、短期的なスプレッドはいずれも 0 に収束している。

*27 このケースでは 2002 年 2 月 1 日時点でレバレッジレシオは 0.985917。

*28 このケースでは 2002 年 2 月 1 日時点で $V_t - M_t = 0.0004509363$ 。

*29 このケースでは、レバレッジレシオは 0.8261214。

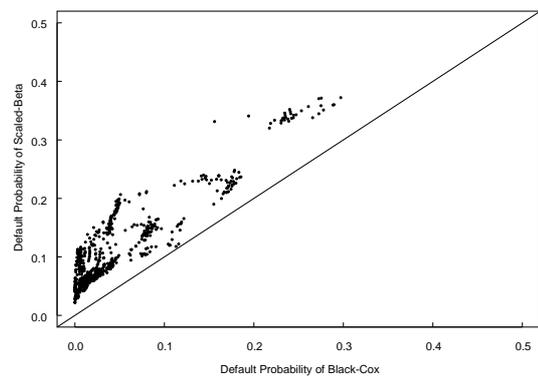
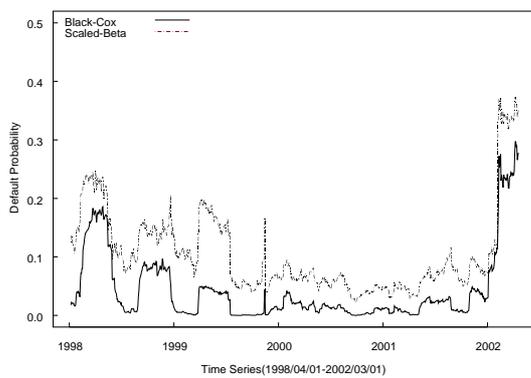


図 21 完全情報型：Black & Cox モデルと不完全情報型：ベータ分布型モデルの倒産確率の比較（佐藤工業）

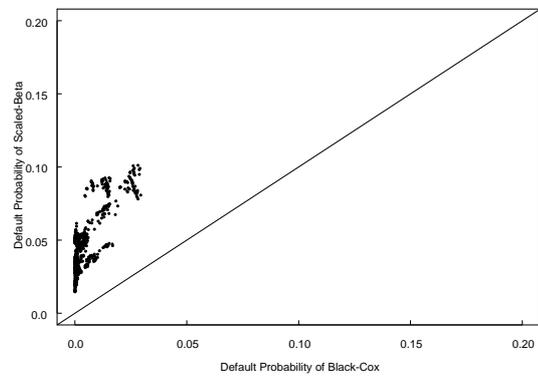
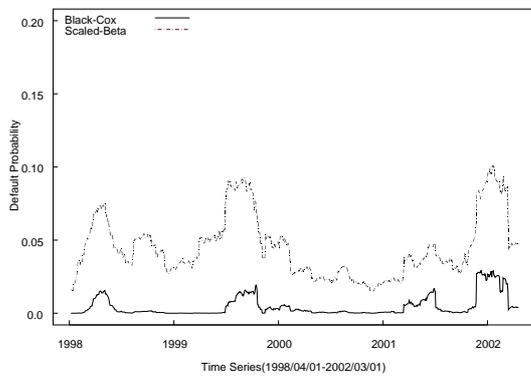


図 22 完全情報型：Black & Cox モデルと不完全情報型：ベータ分布型モデルの倒産確率の比較（西松建設）

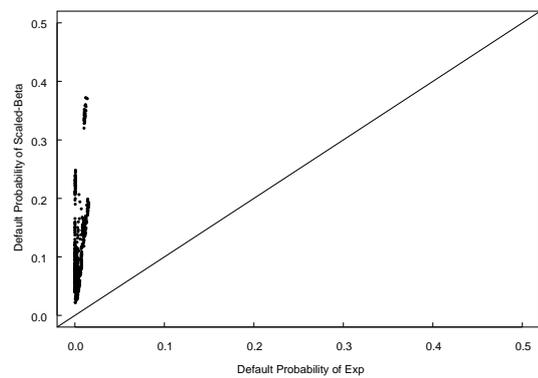
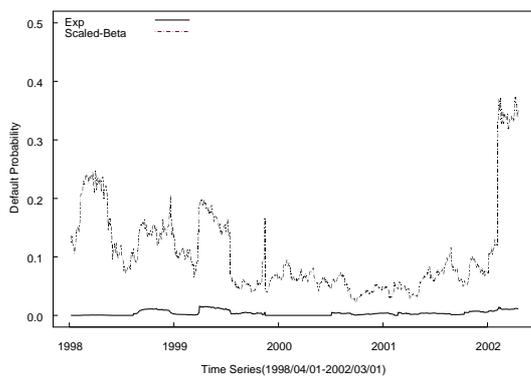


図 23 不完全情報型：指数型モデルと不完全情報型：ベータ分布型モデルの倒産確率の比較（佐藤工業）

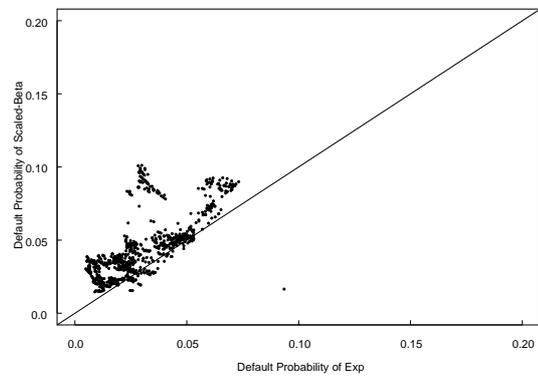
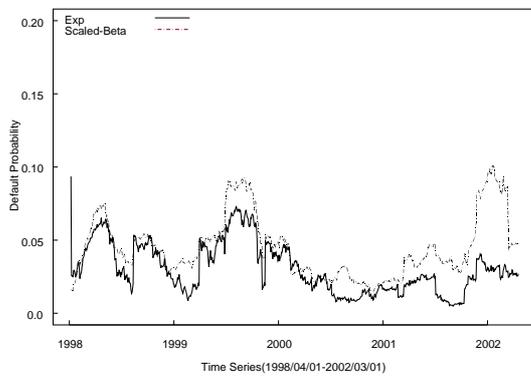


図 24 不完全情報型：指数型モデルと不完全情報型：ベータ分布型モデルの倒産確率の比較（西松建設）

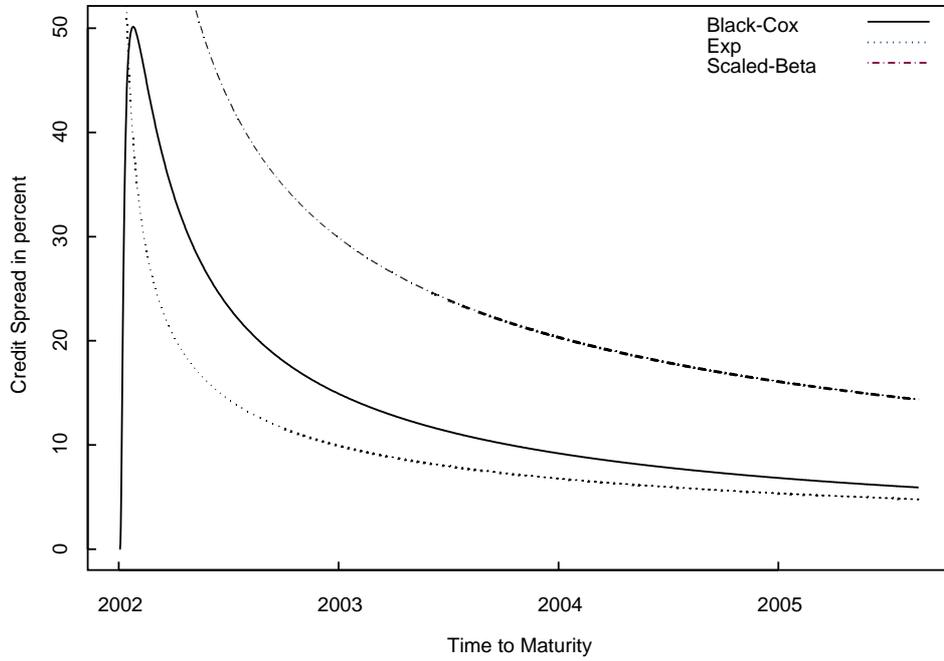


図 25 2002/2/1 時点における満期まで 3 年間の信用スプレッド (佐藤工業)

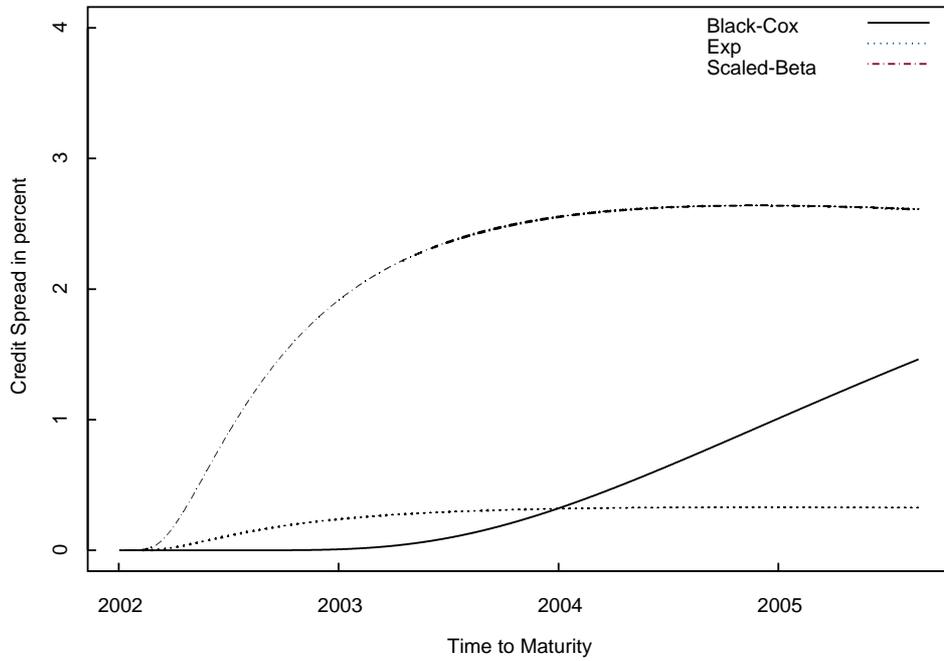


図 26 2002/2/1 時点における満期まで 3 年間の信用スプレッド (西松建設)

8 総括

本稿では、Kay Giesecke[5] によって提案された、不完全情報に基づく構造型信用リスクモデルを分析し、実証分析を通して完全情報に基づく構造型信用リスクモデルとの比較、及び実用性の検討をした。

まず最初に、従来の構造型信用リスクモデルの理論的な問題点に関して言及した。これらのモデルでは、Announcing Sequence の存在によって倒産時刻が可予測となるため、構造型モデルとして有名な Merton モデル、及び Black & Cox モデルでは突発的なリスクが表現できないという問題点があった。従ってこれらのモデルでは、短期的な信用スプレッド、及び倒産確率が 0 となり、突発的な倒産リスクが表現できず、過小評価してしまう恐れがある。

次に倒産時刻が非可予測となるための解決策として、不完全情報に基づいた信用リスク評価のアプローチを理論面から明らかにした。これは企業の財務情報が不完全であるという仮定に基づき信用リスク評価を行うもので、Duffie & Lando[3] によってはじめて紹介された。またどの情報を不完全と仮定するかによって、モデルの枠組みが変化する事を倒産トレンド、及び倒産強度を用いて論じた。具体的には、資産価値を不完全情報とする場合、倒産トレンドは絶対連続となり、倒産強度が存在する事を示した。従ってこのアプローチでは、短期的な信用スプレッドは 0 とならない。一方で倒産閾値を不完全情報とする場合では、倒産トレンドは連続となるが、倒産強度は存在しない。この場合、ある状況下では短期的な信用スプレッドは 0 に収束してしまう。両モデルとも、資産価値、及び倒産閾値どちらか一方のみを不完全としているため、現実的な仮定に問題はある。本稿では、特に後者のアプローチを対象とし、Kay Giesecke[5] が提案している指数型の分布、及びベータ型の分布を倒産閾値に仮定し、数値実験を通してその特性を解明した。

実証分析では、個別企業の財務データから倒産確率・信用スプレッドを算出し、従来の完全情報型モデルと比較分析をした。まずパラメータのキャリブレーションに当たっては、安藤・丸茂 [16] のノックアウト・オプションアプローチを導入し、モデルの整合性を図った。従来の Merton 型のヨーロッパ・オプションによるキャリブレーション手法では、企業価値過程のボラティリティが理論的に正しい値でインプライドできない為である。

次に倒産企業、及び現存企業を選別し、実際の財務データを用いて信用リスク評価を行った。倒産危険性の高い企業に対しては、Black & Cox モデルに比べベータ型分布モデルが相対的に高い予測値を算出した。これは、過去のレバレッジレシオに基づいて倒産閾値の分布幅 κ を決めるため、現在のレバレッジレシオにおいてのみ評価を行う完全情報型の Black & Cox モデルに比べ、閾値の不確実性リスクを見積もった予測ができるモデルである事が考えられる。しかし一方で指数型モデルの場合では、レバレッジレシオの高さに依らず、企業価値過程のボラティリティに強く影響を受ける事が見受けられた。従って、倒産危険性が高い、すなわちレバレッジレシオが高い状況の企業に関しては、完全情報型よりも信用リスクを過小評価してしまうという問題点が見受けられた。

現存の企業に関しては、不完全情報型モデルは完全情報型モデルに比べ、相対的に高い予測値を算出した。これは、レバレッジレシオが低い状況下では、完全情報型モデルではリスクを過小評価してしまうからである。しかし不完全情報型モデルでは、過去の最小値過程との距離、及び過去のレバレッジレシオによって分布を決め不確実性を見積もる為、相対的に高い予測値を算出できると考えられる。

実用性に関する見解であるが、倒産閾値の分布形状を自由に変形できるベータ型モデルが高い予測値を算出できる傾向にあった。従って、エンロン等のように財務上はレバレッジレシオが低く、安定的な財務と見せかけている場合に対しては、完全情報型に比べ適用しうると考えられる。企業の不正会計は一般的に行われていると仮定するならば^{*30}、投資家が通常行うの企業の信用リスク評価では、不完全情報と仮定したモデルを用いて不確実性を加味した高い算出値を参考にすべきだと考える。但し、指数型モデルの場合には上述のような過小評価する可能性があるため、適用には不十分と言えるだろう。

今後の応用としては、企業価値過程に不完全性を組み入れたモデルの発展が考えられる。具体的には、本稿では企業価値過程は幾何ブラウン運動と仮定したが、ジャンプ拡散過程に基づいた不完全情報モデル等を提案できるのではないかと。これにより、企業価値・閾値ともに現実的な仮定に基づいた信用リスク評価ができると考えられる。

^{*30} 実際にはほとんどの企業で、負債飛ばし等の粉飾会計を行っていると考えて良いのではないだろうか。

謝辞

本稿を執筆するにあたり，3年間ご指導頂いた浦谷規教授に深く感謝を致します．

付録 A Proofs

A.1 Condition 4.1 に関する命題

倒産トレンド A が連続となる場合、Condition 4.1 を満たす事を証明する。

Proposition 付録 A.1. 倒産時刻 τ に関する倒産トレンド A は、Condition 4.1 を満たすとき、かつそのときに限り連続となる。

Proof. (4.7) 式より、 K は可予測で有界変動であるためスティルチェス積分で表されている。従って、 K が連続であると時かつその時に限り、 A は連続となる。また、Giesecke and Goldberg(2003b)^{*31}の証明より、cadlag-supermartingale L の Compensator は、 L が以下を満たすとき、かつそのときに限り連続となる。

$$\lim_{n \uparrow \infty} E[L_{\sigma_n}] = E[L_\sigma], \quad \text{for every } \sigma_n \uparrow \sigma \quad (\text{付録 A.1})$$

L は有界なので、この命題は Condition 4.1 と同等である。□

A.2 Theorem 4.2 の証明

Proof. デフォルト閾値 D は資産価値と独立なので、生存過程 L は以下のように書き表せる。

$$L_t = P[\tau > t | \mathcal{F}_t] = P[D < M_t | \mathcal{F}_t] = G(M_t) \quad (\text{付録 A.2})$$

資産価値過程がほとんど確実に連続であるならば、 M_t も連続である。従って、生存過程 L も連続である。Doob-Meyer decomposition の一意性から、 L の \mathcal{F}_t -Compensator K は $K = 1 - L$ と与えられる。この場合、 A はほとんど確実に連続であり、次のように表せる。

$$A_t = - \int_0^t \frac{dL_s}{L_s} = -\ln L_t = -\ln G(M_t) \quad (\text{付録 A.3})$$

□

付録 B 条件付期待値と倒産確率

B.1 条件付期待値

Lemma 付録 B.1. X を \mathcal{G}_t -可測で積分可能な確率変数とする。このとき $t < T$ に関して、

$$E(X | \mathcal{G}_t) 1_{\tau > t} = \frac{E[X 1_{\tau > t} | \mathcal{F}_t]}{E[1_{\tau > t} | \mathcal{F}_t]} 1_{\tau > t} \quad (\text{付録 B.1})$$

$$= 1_{\tau > t} E[X 1_{\tau > t} e^{A_t} | \mathcal{F}_t] \quad (\text{付録 B.2})$$

特に $t \leq T$ に関して、

$$E(X 1_{\tau > T} | \mathcal{G}_t) = 1_{\tau > t} E[X 1_{\tau > T} e^{A_t} | \mathcal{F}_t] \quad (\text{付録 B.3})$$

B.2 倒産確率

Proposition 付録 B.1. X を \mathcal{F}_t -可測で積分可能な確率変数とする。このとき $t < T$ に関して、

$$E[X 1_{\tau > T} | \mathcal{G}_t] = 1_{\tau > t} E[X e^{A_t - A_T} | \mathcal{F}_t] \quad (\text{付録 B.4})$$

^{*31} 現在はこの論文は未公開。

特に,

$$E[1_{T>T}|\mathcal{G}_T] = 1_{T>T}E[e^{A_T-A_T}|\mathcal{F}_T] \quad (\text{付録 B.5})$$

付録 C 初到達時刻の分布

C.1 ドリフトのないブラウン運動と吸収壁

X_t を確率空間 $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ の下で $(0, \sigma)$ -ブラウン運動とする。初期値 $X_0 = x_0$ でドリフトは無いブラウン運動である。

$$X_t = \sigma W_t \quad (\text{付録 C.1})$$

初期状態 x_0 から出発した X_t が、その後時点 T までに状態 $m (< x_0)$ に到達したかどうかによって場合分けをし、到達しなかった場合の X_T の確率分布を考える^{*32}。

X_t の $0 \leq t \leq T$ における最小値を、

$$M_T = \min_{0 \leq t \leq T} X_t \quad (\text{付録 C.2})$$

とおく。このとき、 M_T は確率変数である。よって、

- 時点 $0 \leq t \leq T$ に X_t が吸収壁 m に到達する。

という事象は、この M_T を用いて、

$$M_T \leq m \quad (\text{付録 C.3})$$

と書ける。同様に、

- 時点 $0 \leq t \leq T$ に X_t が吸収壁 m に一度も到達しない。

という事象は、

$$M_T > m \quad (\text{付録 C.4})$$

と書ける。よって、 $x (\geq m)$ に対し、「時点 0 に x_0 から出発した X_t が、一度も m に到達せずに、時点 T に x より大きい値をとる」確率を考えればよい。

この確率は、

$$\begin{aligned} P[X_T > x, M_T > m | X_0 = x_0] &= P[X_T > x | X_0 = x_0] - P[X_T > x, M_T \leq m | X_0 = x_0] \\ &= P[X_T > x | X_0 = x_0] - P[X_T \leq 2m - x | X_0 = x_0] \end{aligned} \quad (\text{付録 C.5})$$

となる。但し、1番目の式の右辺第二項に鏡像原理を用いた。 X_t はドリフトのないブラウン運動なので、確率測度 P の下で、 $N(x_0, \sigma^2 T)$ に従う。よってこの確率は、

$$P[X_T > x, M_T > m | X_0 = x_0] = \Phi\left(-\frac{x-x_0}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(-\frac{x+x_0-2m}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (\text{付録 C.6})$$

となる。ここで、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数を表す。その密度関数を $\phi(\cdot)$ とし、この確率を x で微分した関数を a とすると、

$$\begin{aligned} a_T(x_0, x, m) &= -\frac{d}{dx} P[X_T > x, M_T > m | X_0 = x_0] \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\phi\left(\frac{x-x_0}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \phi\left(\frac{x+x_0-2m}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{付録 C.7})$$

となる。これは、吸収壁 m を持つ $(0, \sigma^2)$ -ブラウン運動が、 x に到達する推移確率密度と考えることができる。

^{*32} この状態 m を吸収壁という。

C.2 ドリフトのあるブラウン運動と吸収壁

ブラウン運動にドリフトがある場合を考える．確率過程 X_t が確率空間 $\{\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P}\}$ の下で (μ, σ^2) -ブラウン運動と仮定する．ここで，

$$\xi_T = \exp\left\{\frac{1}{\sigma^2}\left(\mu(X_T - x_0) - \frac{\mu^2 T}{2}\right)\right\} \quad (\text{付録 C.8})$$

とし， $d\tilde{P} = \xi dP$ より新しい確率測度を定義する．このときギルサノフの定理より，

$$\begin{aligned} \tilde{P}[X_T > x, M_T > m | X_0 = x_0] &= \tilde{E}[1_{\{X_T > x, M_T > m\}}] \\ &= E[\xi_T 1_{\{X_T > x, M_T > m\}}] \\ &= \exp\left\{-\frac{\mu}{2\sigma^2}(2x_0 + \mu T)\right\} E\left[1_{\{X_T > x, M_T > m\}} \exp\left\{\frac{\mu X_T}{\sigma^2}\right\}\right] \\ &= \exp\left\{-\frac{\mu}{2\sigma^2}(2x_0 + \mu T)\right\} \int_x^\infty a_T(x_0, u, m) \exp\left(\frac{\mu u}{\sigma^2}\right) du \\ &= \exp\left\{-\frac{\mu}{2\sigma^2}(2x_0 + \mu T)\right\} \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \int_x^\infty \left[\phi\left(\frac{u-x_0}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \phi\left(\frac{u+x_0-2m}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] \exp\left\{\frac{\mu u}{\sigma\sqrt{T}}\right\} du \\ &= \Phi\left(-\frac{x-x_0-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \exp\left\{-\frac{2\mu}{\sigma^2}(x_0-m)\right\} \Phi\left(-\frac{x+x_0-\mu T-2m}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (\text{付録 C.9})$$

ここで $\tau_m = \inf\{t > 0 : \mu t + \sigma W_t = m\}$ とし，初期値 $x_0 = 0$ とおくと， τ_m は次の Inverse Gaussian 確率分布に従う^{*33}．

$$\begin{aligned} P[\tau_m > t] &= \tilde{P}[X_T > x, M_T > m | X_0 = x_0] \\ &= \Phi\left(\frac{-m + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \exp\left\{\frac{2m\mu}{\sigma^2}\right\} \Phi\left(\frac{m + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (\text{付録 C.10})$$

以上より，生存確率が求まる．倒産確率は，

$$\begin{aligned} P[\tau_m \leq t] &= 1 - P[\tau_m > t] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{-m + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \exp\left\{\frac{2m\mu}{\sigma^2}\right\} \Phi\left(\frac{m + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{m - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \exp\left\{\frac{2m\mu}{\sigma^2}\right\} \Phi\left(\frac{m + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (\text{付録 C.11})$$

但し， $m \leq 0, t > 0$ である．

付録 D (5.11) 式の導出

$$\begin{aligned} p(s, v) &= \int_{-\infty}^{-v} \Psi(t, y) e^{y+v} dy \\ &= \int_{-\infty}^{-v} \left[\Phi\left(\frac{y-mt}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \exp\left(\frac{2my}{\sigma^2}\right) \Phi\left(\frac{y+mt}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] e^{y+v} dy \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{-v} \Phi\left(\frac{y-mt}{\sigma\sqrt{t}}\right) e^{y+v} dy}_{(1)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{-v} \exp\left(\frac{2my}{\sigma^2}\right) \Phi\left(\frac{y+mt}{\sigma\sqrt{t}}\right) e^{y+v} dy}_{(2)} \end{aligned}$$

^{*33} Bielecki and Rutkowski[13] P67.

ここで (1) 式を展開する .

$$\begin{aligned}
 (1) &= \left[\Phi \left(\frac{y-mt}{\sigma\sqrt{t}} \right) e^{y+v} \right]_{-\infty}^{-v} - \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{-v} \exp \left(\frac{2my}{\sigma^2} \right) \phi \left(\frac{y+mt}{\sigma\sqrt{t}} \right) e^{y+v} dy \\
 &= \Phi \left(\frac{-v-mt}{\sigma\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{-v} \exp \left\{ -\frac{(y-(m+\sigma^2)t)^2}{2\sigma^2 t} \right\} \exp(v+\mu t) dy \\
 &= \underbrace{\Phi \left(\frac{-v-mt}{\sigma\sqrt{t}} \right) - e^{v+\mu t} \Phi \left(\frac{-v-vt}{\sigma\sqrt{t}} \right)}_{(1')}
 \end{aligned}$$

但し, $v = m + \sigma^2$ とおいた . 次に (2) を展開する .

$$\begin{aligned}
 (2) &= \int_{-\infty}^{-v} \exp \left(\frac{2my}{\sigma^2} \right) \Phi \left(\frac{y+mt}{\sigma\sqrt{t}} \right) e^{y+v} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{-v} \exp \left(\frac{y(2m+\sigma^2)}{\sigma^2} + v \right) \Phi \left(\frac{y+mt}{\sigma\sqrt{t}} \right) dy \\
 &= \underbrace{\left[\Phi \left(\frac{y+mt}{\sigma\sqrt{t}} \right) \frac{\sigma^2}{2m+\sigma^2} \exp \left(\frac{y(2m+\sigma^2)}{\sigma^2} + v \right) \right]_{-\infty}^{-v} - \frac{\sigma^2}{2m+\sigma^2} \int_{-\infty}^{-v} \exp \left(\frac{y(2m+\sigma^2)}{\sigma^2} + v \right) \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \phi \left(\frac{y+mt}{\sigma\sqrt{t}} \right) dy}_{(2')}
 \end{aligned}$$

ここで, $\gamma = 1 + \frac{2m}{\sigma^2}$ とおくと,

$$(2)' = \Phi \left(\frac{-v+mt}{\sigma\sqrt{t}} \right) \frac{1}{\gamma} \exp \{ (1-\gamma)v \} - \underbrace{\frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{-v} \exp(y\gamma + v) \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \phi \left(\frac{y+mt}{\sigma\sqrt{t}} \right) dy}_{(3)}$$

(3) を展開すると,

$$\begin{aligned}
 (3) &= \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{-v} \exp(y\gamma + v) \exp \left(-\frac{(y+mt)^2}{2\sigma^2 t} \right) dy \\
 &= \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{-v} \exp \left(-\frac{(y+t\delta)^2}{2\sigma^2 t} \right) \exp(v+t\eta) dy \\
 &= \frac{1}{\gamma} e^{v+t\eta} \Phi \left(\frac{-v+\delta t}{\sigma\sqrt{t}} \right)
 \end{aligned}$$

但し, $\delta = m - \gamma\sigma^2, \eta = -m\gamma + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}$ と置いた . よって (2)' は,

$$(2)' = \Phi \left(\frac{-v+mt}{\sigma\sqrt{t}} \right) \frac{1}{\gamma} e^{(1-\gamma)v} - \frac{1}{\gamma} e^{v+t\eta} \Phi \left(\frac{-v+\delta t}{\sigma\sqrt{t}} \right)$$

以上より, (1)'+(2)' から,

$$p(s, v) = \Phi \left(\frac{-v-ms}{\sigma\sqrt{s}} \right) - e^{v+s\mu} \Phi \left(\frac{-v-vs}{\sigma\sqrt{s}} \right) + \frac{1}{\gamma} e^{(1-\gamma)v} \Phi \left(\frac{ms-v}{\sigma\sqrt{s}} \right) - \frac{1}{\gamma} e^{v+s\eta} \Phi \left(\frac{\delta s-v}{\sigma\sqrt{s}} \right)$$

付録 E 高さパラメータ κ でスケールしたベータ分布

x がパラメータ $a > 1, b > 1$ のベータ分布に従うと仮定する. このとき, 高さパラメータ $\kappa \in (0, V_0)$ によってスケールした変数 $y = \frac{\kappa}{V_0}x$ が従う分布を変数変換によって求める. ベータ分布の密度関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \quad (\text{付録 E.1})$$

y の分布関数は,

$$F_Y = P[Y \leq y] = P \left[\frac{\kappa}{V_0} x \leq y \right] = P \left[X \leq \frac{V_0}{\kappa} y \right] = \int_{-\infty}^{\frac{V_0}{\kappa} y} f(x) dx \quad (\text{付録 E.2})$$

y の密度関数は ,

$$f_Y(y) = f\left(\frac{V_0}{\kappa}y\right) \frac{V_0}{\kappa}y \quad (\text{付録 E.3})$$

$$= \frac{1}{\beta(a,b)} \left(\frac{V_0y}{\kappa}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{V_0}{\kappa}y\right)^{b-1} \frac{V_0}{\kappa}y \quad (\text{付録 E.4})$$

よって , スケールベータ分布 $G(y)$ は ,

$$G(y) = \frac{V_0}{\beta(a,b)\kappa} \int_{-\infty}^y \left(\frac{V_0u}{\kappa}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{V_0u}{\kappa}\right)^{b-1} du \quad (\text{付録 E.5})$$

となる .

付録 F 分析データ

F.1 財務データ（佐藤工業）

表 6 佐藤工業の財務データ（1998/03～2001/09 の 8 期分）

年	月	負債額 K_0 (百万)	S_0	株式発行部数	時価総額 E_0 (百万)	企業価値 V_0 (百万)	レバレッジレシオ
1998	3	736096	164	261493013	42884.85413	778980.8541	0.9449475
1998	9	749866	99	261493013	25887.80829	775753.8083	0.9666288
1999	3	716326	82	261493013	21442.42707	737768.4271	0.9709361
1999	9	640725	89	261493013	23272.87816	663997.8782	0.9649504
2000	3	664705	55	261493013	14382.11572	679087.1157	0.9788214
2000	9	632675	51	261493013	13336.14366	646011.1437	0.9793562
2001	3	589329	54	261493013	14120.6227	603449.6227	0.9766002
2001	9	567501	49	261493013	12813.15764	580314.1576	0.9779203

F.2 財務データ（西松建設）

表 7 西松建設の財務データ（1998/03～2001/09 の 8 期分）

年	月	負債額 K_0 (百万)	S_0	株式発行部数	時価総額 E_0 (百万)	企業価値 V_0 (百万)	レバレッジレシオ
1998	3	774652	690	277957000	191790.33	966442.33	0.8015502
1998	9	729597	660	277957000	183451.62	913048.62	0.7990779
1999	3	679864	545	277957000	151486.565	831350.565	0.8177826
1999	9	598589	628	277957000	174556.996	773145.996	0.7742251
2000	3	574739	332	277957000	92281.724	667020.724	0.8616509
2000	9	583694	355	277957000	98674.735	682368.735	0.8553938
2001	3	582955	401	277957000	111460.757	694415.757	0.8394899
2001	9	561260	578	277957000	160659.146	721919.146	0.7774555

参考文献

- [1] Black, Fischer & John C. Cox (1976), 'Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions', *Journal of Finance* 31, 351-367.
- [2] Black, Fischer & Myron Scholes (1973), 'The pricing of options and corporate liabilities', *Journal of Political Economy* 81, 81-98.
- [3] Duffie, Darrell & David Lando (2001), 'Term structures of credit spreads with incomplete accounting information', *Econometrica* 69(3), 633-664.
- [4] Elliott, Robert, Monique Jeanblanc & Marc Yor (2000), 'On models of default risk', *Mathematical Finance* 10(2), 179-195.
- [5] Giesecke, Kay (2001), 'Default and information', *Working Paper, Cornell University*.
- [6] Giesecke, Kay & Lisa Goldberg (2004b), 'Forecasting default in the face of uncertainty', *Journal of Derivatives* 12(1), 1-15.
- [7] Goldberg, Lisa R. (2004), 'Investing in credit: How good is your information?', *Risk* 17(1), S15-S18.
- [8] Longstaff, Francis A. & Eduardo S. Schwartz (1995), 'Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads', *Journal of Finance* 51(3), 987-1019.
- [9] Merton, Robert C. (1974), 'On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates', *Journal of Finance* 29, 449-470.
- [10] Philipp J. Schöenbucher (2003), 'Credit Derivatives Pricing Models: Model, Pricing and Implementation', *Wiley Finance*.
- [11] Philipp J. Schöenbucher (2003), 'Information-Driven Default Contagion', *Department of Mathematics, ETH Zürich*.
- [12] Reisz, Alexander & Claudia Perlich (2004), 'A market-based framework for bankruptcy prediction.', *Working Paper, Baruch College and New York University*.
- [13] Tomasz R. Bielecki and Marek Rutkowski (2001), 'Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging.', *Springer Finance*.
- [14] Zhou, Chunsheng (1997), 'A Jump-Diffusion Approach to Modeling Credit Risk and Valuing Defaultable Securities'.
- [15] Zhou, Chunsheng (2001b), 'The term structure of credit spreads with jump risk', *Journal of Banking and Finance* 25, 2015-2040.
- [16] 安藤 啓, 丸茂 幸平, 'ノックアウト・オプションアプローチを用いたデフォルト率の推定方法', *IMES Discussion Paper* 2001-J-4.
- [17] 福田 智尚, '不完全情報構造に基づく構造型アプローチによるデフォルト・リスク評価モデル', 法政大学大学院 修士論文 2003.