2次元差分方程式のダイナミックスと過度的カオス

OKUMA, Hiroyuki / HIROOKA, Hajime / 広岡, 一 / 大隈, 寛之

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学工学部研究集報 / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
33
(開始ページ / Start Page)
31
(終了ページ / End Page)
34
(発行年 / Year)
1997-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00003800

2次元差分方程式のダイナミックスと過度的カオス

システム制御工学科　大隈　寛之・広岡　一

Dynamics of a 2-D difference equation and transients chaos

H. Okuma and H. Hirooka

Abstract

We report the result of computer experiments on a 2-dimensional difference equation, which is considered to simulate a prey-predator system. The equation has an interesting property, transition between the chaos of 1-dimensional Logistic equation to the stable state of the 2-dimensional one studied. We can here find the transients chaos, very very long transient phenomena.

1）はじめに

一般に非線形なシステムの時間発展はシステムのパラメターに依存した多様性をもつ。ある初期状態から過度的状態を経て、安定点、周期、準周期、そしてカオスと呼ばれてきた不規則な時間発展などの定常状態をもつ。差分方程式で表わされるモデルは、微分方程式系に比し理論的解析やアルゴリズムの容易さから、これらの解の分岐、カオスへのルートなどの研究に重要な役割を果たしている。差分方程式モデルは特に生態系や経済などの分野で多くの応用が考えられる。例えば(1)式

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n(1 - x_n - y_n) \\ y_{n+1} = by_n\left(1 + \dfrac{x_n}{c}\right) \end{cases} \tag{1}$$

で表わされる2次元差分系は補食-被食系を表わす離散的数学モデルの一つを与える[1]。

ここで、X_nは第n世代の被食者Xの個体数（密度）を、Y_nは第n世代の捕食者Yの個体数（密度）であり、(1)式に含まれるパラメータa、b、cはそれぞれa：Xの増殖率（>0）、b：Yの増殖率（>0）、c：YのXに対する依存度（>0）を表わしている。この式はまた$y=0$（捕食者Yが存在しないか、あるいは死滅）のときには個体数Xについてのロジスティック方程式として良く知られている1次元差分系のダイナミックスを表わす。このような2次元差分系は写像$f: R^2 \longrightarrow R^2$であり、そのダイナミックスを平面上の写像として視覚的にも捉えやすい利点をもち複雑な力学系の研究の良いモデルを与えてきた。

ここでは2）で(1)式で与えられる力学系がパラメータに依存して安定点への漸近、周期、準周期状態、カオスなど、非線形力学系にみられる一般的挙動を示す計算機実験の結果を与え、3）でのこの系の特徴的な挙動として transients chaos（過度的カオス）ともよばれる非常に長い誘導期間（induction period）の存在について示す。

2）力学系のパラメータ依存性

(1)式のような非線形システムのダイナミックスはパラメータや初期条件に依存する。パラメータの変化にともない、X、Y の挙動は一定の値（不動点）におちついたり、ともに過度的時間後には死滅したり、不規則周期的挙動（カオス）をする。これはパラメータによる解の分岐といわれる。(1)式のダイナミックスに関して解析的に知りうることは不動点 $X_n=f(X_n, Y_n)$、$Y_n=g(X_n, Y_n)$ の存在とその安定性に関してである。式(1)では

$$\alpha:(0,0) \qquad \beta:\left(1-\frac{1}{a},0\right) \qquad \gamma:\left(c\left(\frac{1}{b}-1\right),1-\frac{1}{a}-c\left(\frac{1}{b}-1\right)\right)$$

の3個の不動点が存在し、この不動点がどのようなパラメータ範囲で安定、すなわち、解がこの不動点に漸近するかを知る。ここでは計算機実験の結果として、パラメータが a =3.9、c =0.4の場合に b の変化に対する挙動が与えられるが、このときには $0<b<0.349776$ では捕食者 Y は死滅し、被食者Xだけが生存する状態が安定である。a =3.9であるから、Y が死滅する迄の過度的時間後にはロジスティック方程式の研究から良く知られている不規則な個体数の年次変化（カオス）を与える。（Fig. 1、b =0.2における X、Y の個体数変化）

また、$0.414473<b<0.699552$ の範囲では上に与えた不動点 γ が安定であり、ほとんど全ての初期状態に対し、両者がある一定値をとる状態に落ち着くことがわかる。しかしこれらの b の範囲以外でのダイナミックスを解析的に知ることは困難な問題であり、計算機が用いられる。b の変化に対してダイナミックスがどのような定常状態をとるかを Fig. 2 (a) (b) に与えている。横軸に b を、縦軸に n = 3000以後の n =5000までの2000点の x_n(a)、y_n(b) がプロットされている。

上で与えた b の値の範囲では理論的に予測されるように Y が死滅し、X がロジスティック方程式に従うカオス挙動をすることや、X、Y が共にそれぞれある一定値をとることがわかる。しかし非線形システムの複雑さの特徴はこれ以外の範囲にある。

Fig. 3、4 に $b>0.699552$ の範囲での Fig. 2 のより詳細な様子および（X、Y）空間での写像を示す。図4 (a) b =0.71 (b) b =0.78のように準周期的挙動、多周期的窓、そして b =0.8以上では (c) b =0.8、(d) d =0.82におけるようなカオス的挙動といった非線形の2次元写像の普遍的性質を示している。

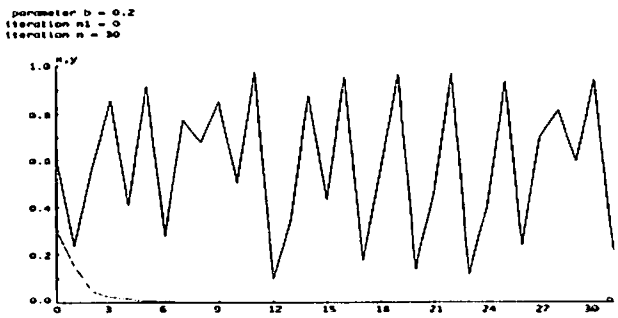

Fig. 1　時系列　b =0.2

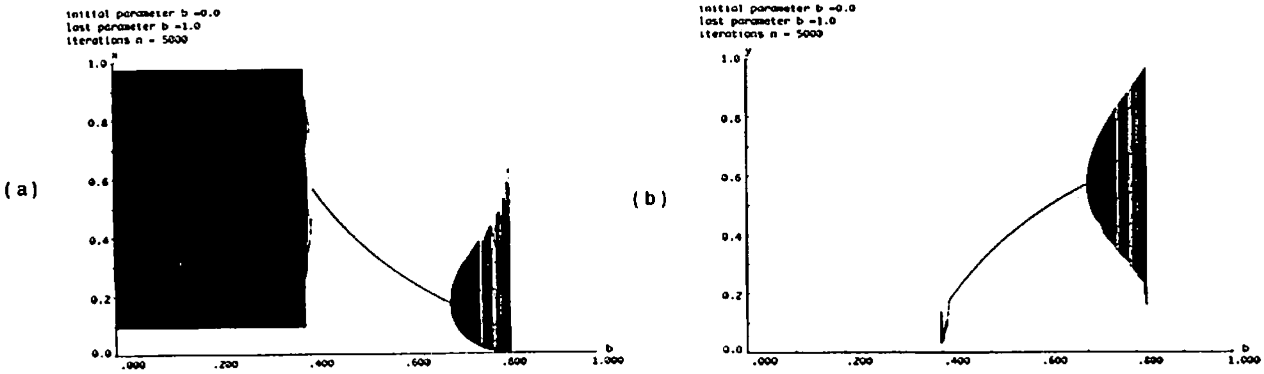

Fig. 2　X，Y の定常軌道

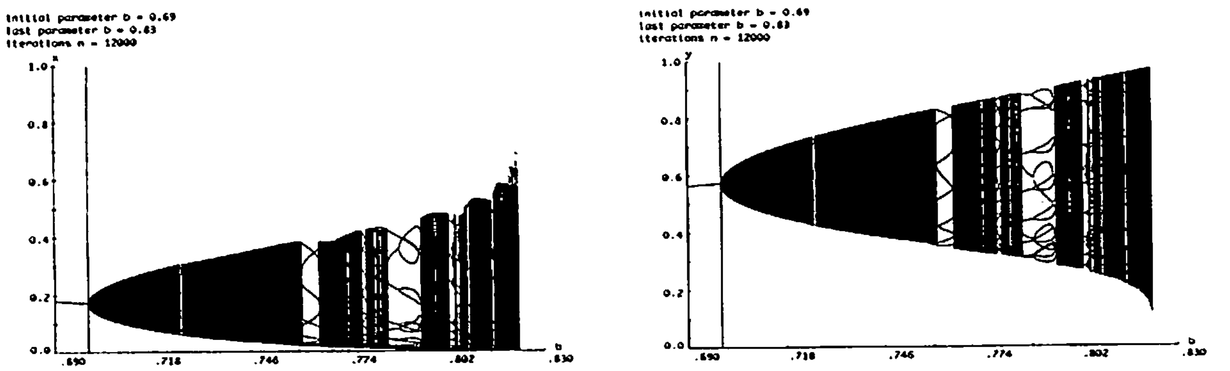

Fig. 3　X，Y の定常軌道拡大

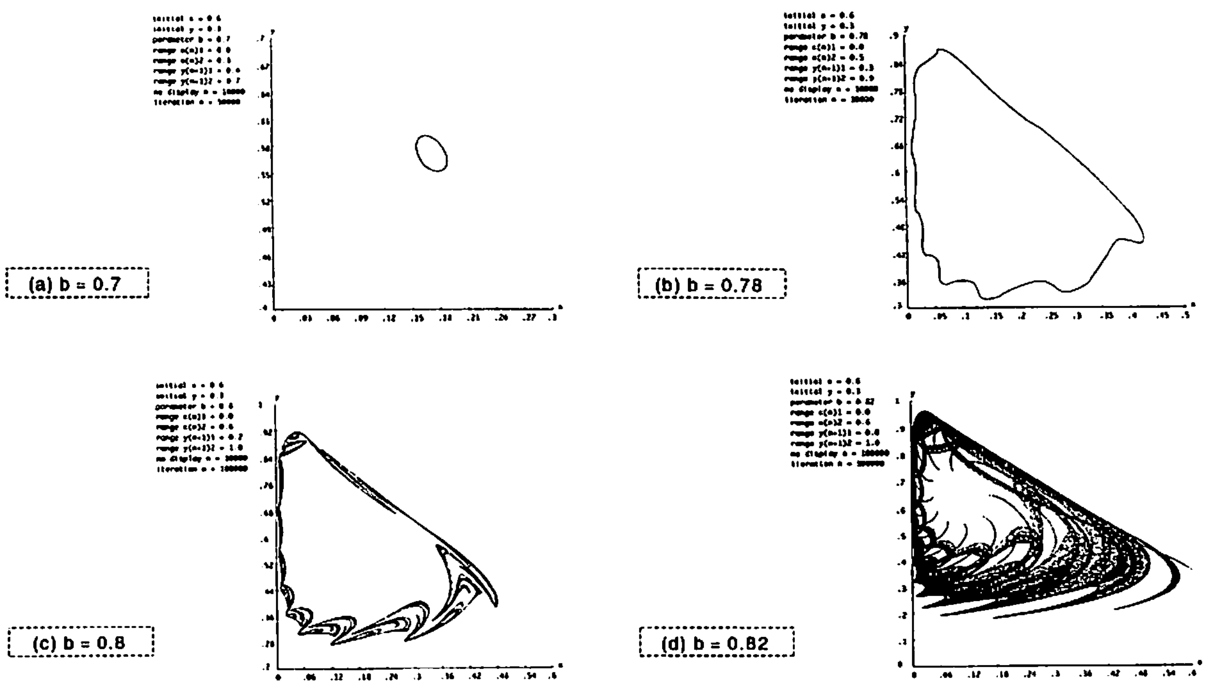

Fig. 4　X，Y 空間写像

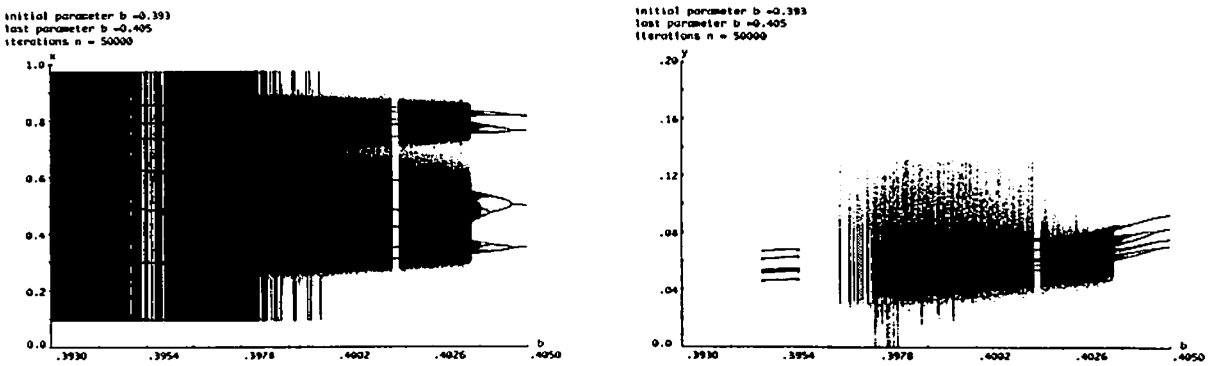

Fig. 5　X，Y の定常軌道拡大

この周期──→準周期──→周期──→・・──→カオスへの分岐に 1 次元写像の倍周期分岐にみられるような普遍的性質が存在するかなどこの領域における興味もあるが、しかしここでとりあげた系でより特徴的な現象は残された0.349776＜ b ＜0.414473の範囲である。

3）過度的カオス

Fig. 2 と同様 n ＝3000後の0.39＜ b ＜0.42における X、Y の定常状態の変化が図 5 に示される。

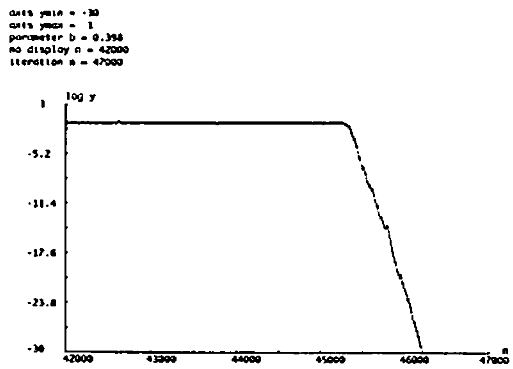

Fig. 6　n に対する log Y（ b ＝0.398)

注目すべきことは b ＝0.398付近では b の僅かな変化に対して Y の死滅、生存が入り組んでいる。ここではYが最終的に死滅するときにでも Fig. 6 にみるように非常に長く生存している過度的現象後に死滅する。

Fig. 6 では n ～45500迄は Y の不規則な変化をする準定常状態ともいえる状態が生じるが、それ以後で急速に死滅に向かう。Fig. 5 では生存しているようにみえても n が10000以上もこのような準安定状態が続いた後に死滅することがある。この近傍ではYが死滅するか永久に生存しているかは n をどこまで計算するかによっており、計算結果から断定するのは困難である。この過度的カオス(Transients chaos) とよばれる現象についての詳細は他の機会にする。

ある種のウイルスが非常に長い潜伏期間をもったり、恐竜が突然滅亡したりした現象はこんな過度的カオスに関係するのかもしれない。ここではなんの外部的原因もなく長期間続いた安定にみえる状態が突然に変化する。カオスにおける真の予測不可能性がここにある。このような 2 次元差分系においても“カオスの緑”と呼ばれている複雑性の萌芽を見い出しうることを報告とする。

1）早間　慧，生物物理109(1980)，p.57-65.