

### 物理的・工学的実情と整合のとれたシステム モデリングの研究

KITAMORI, Toshiyuki / 北森, 俊行

---

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学工学部研究集報 / 法政大学工学部研究集報

(巻 / Volume)

34

(開始ページ / Start Page)

19

(終了ページ / End Page)

25

(発行年 / Year)

1998-03

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00003799>

# 物理的・工学的実情と整合のとれたシステムモデリングの研究

北 森 俊 行\*

## Dynamical System Modelling Conformable to Physical and Engineering Actualities

Toshiyuki KITAMORI

### Abstract

Proposed in this paper is an integral-type state equation expression, which allows us to model ambiguous physical dynamical systems full of parasitic elements. The expression is conformable to the physical and engineering actualities especially in the identification of dynamics and the design of control systems.

### § 1 はじめに

制御対象は一般に物理的システムである。われわれはその物理的システムにおける現象を観測して、そのシステムの動特性を同定（計測）する。動特性の数式モデル表現のうえで解析や設計を行うが、設計、実現した制御系を性能評価するにはその制御系の応答という現象を観察する。したがって、現象に始まり、現象に終わるので、制御工学的には現象と整合性のよい数式モデル表現が重要である。制御理論における基本的動特性表現である状態方程式は現象との整合性がよくない。そこでそれに代わる積分型状態方程式表現を導入し、その有用性を示す。

### § 2 物理的・工学的状況と数式モデル表現との整合性

情報のみで完結する工学は別であるが、一般的に工学は物質やエネルギーの関わる物理現象と関係を持っている。しかしシステムの解析や設計は数式モデル上で行うことによって物理的制約から解放された自由な計算が可能になる。これが工学的方法の大きな強みであるが、数式モデルや数学的解析が先行する

---

\*システム制御工学科

と、物理的・工学的現象との接点で思いがけない不都合を招き入れてしまうことがある。

物理的システムには数式モデルに記述し切れない寄生的な要素が充満していて、正確に記述すれば次数が無限大あるいは連立偏微分方程式になるのであろうが、そのような寄生的要素を無視した近似でほとんど間に合っている。これは寄生的要素を考慮に入れようと無視しようとその数式モデル上で模擬される現象に差が見られないことを意味している。そうであるならば区別ができない現象に対応する数式モデル表現も連続的につながっているべきである。数式モデル表現が不連続であると、区別できない現象データから不連続的に異なる2つ以上の表現を決定(同定, 計測)しなければならなくなるが、これは不可能なことだからである。

動特性に基づく過渡現象が減衰すれば静特性で記述できる状況になる。また過渡現象が十分速やかに減衰すれば動特性を無視して静特性で解析や設計を行うことができる。静特性だけで扱うか、動特性まで考えるべきかは程度問題であり、明確な境界はない。したがって数式モデル表現においても静特性表現と動特性表現との間の連続性が成立っていなければならない。

ほとんどの物理現象は非線形であるが、動作範囲が十分狭ければ線形近似が成り立つ。逆に、動作範囲が広がれば次第に非線形性が現象に現れてくる。このようになめらかにつながった現象があるとすれば、数式モデル表現も連続的につながっていなければならない。

実在する物理的・工学的状況に対して数式モデル表現はひとつの近似表現にすぎないから、これは無数に存在して構わない。しかし現象が“連続”的であるならば数式モデル表現も“連続”的でなければならない。

### § 3 状態方程式表現と現象との不整合性

制御理論における状態方程式は

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

$$y = Cx + Du \quad (2)$$

と書かれる。ここで、 $x$ ,  $u$ ,  $y$  はそれぞれ  $n$ ,  $r$ ,  $p$  個の成分からなる列ベクトルで、状態変数, 入力変数, 出力変数,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  はそれぞれ  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $p \times n$ ,  $p \times r$  の行列で、システム行列, 入力行列, 出力行列, 直達行列である。

この表現における問題点のひとつを Fig.1 の簡単な動的システムを例にして示す。まず現象を観察する。ここで現象とは物理的にわれわれの目に触れる、時間的に変化する様相である。Fig.2 では  $C_4 = C_6 = 1\mu\text{F}$ ,  $L_3 = 10^6\text{H}$  とし、 $C_2$  を  $1\mu\text{F}$  から 1桁ずつ小さくした場合と  $C_2 = 0$  の場合のステップ

応答をとっている。この実験から判るように、 $C_2$ の値が小さくなるとステップ応答曲線が $C_2=0$ の場合に近づいていく。 $C_2$ が他の支配的な $C_4$ や $C_6$ に比べて2桁小さくなると $C_2=0$ の場合と区別がつかなくなっている。ステップ応答と言う現象は $C_2 \rightarrow 0+$ のとき“連続”であるということが出来る(物理的システムであるから $C_2 \geq 0$ としておく)。

ところでこのシステムの状態方程式は

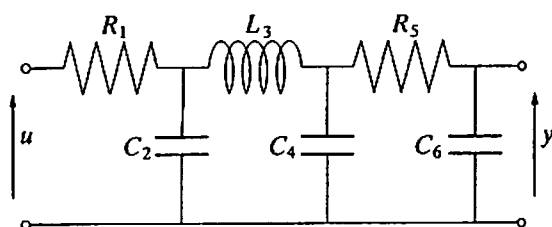


Fig. 1 簡単な動的システムの例

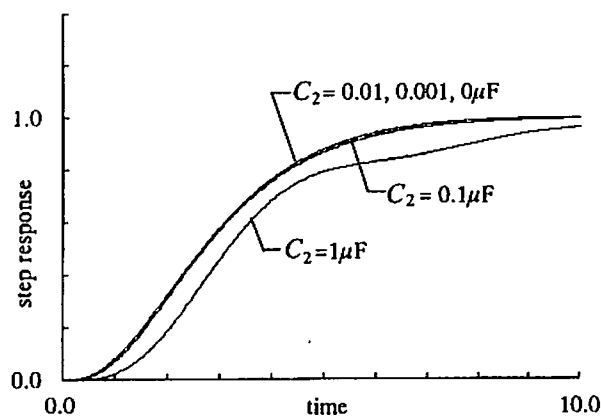


Fig. 2 エネルギー蓄積要素  $C_2$  のステップ応答への影響

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/C_2 R_1 & -1/C_2 & 0 & 0 \\ 1/L_3 & 0 & -1/L_3 & 0 \\ 0 & 1/C_4 & -1/C_4 R_5 & 1/C_4 R_5 \\ 0 & 0 & 1/C_6 R_5 & -1/C_6 R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/C_2 R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

となる。ここで、 $C_2$ 、 $C_4$ 、 $C_6$ に発生する逆起電力を状態変数成分 $x_1$ 、 $x_3$ 、 $x_4$ に、また $L_3$ に流れる電流を $x_2$ に選んである。

この状態方程式表現で $C_2 \rightarrow 0+$ とすると、システム行列と入力行列で $C_2$ の関与している第1行の要素の絶対値が無限大に発散する。その他の要素は不変である。そして $C_2=0$ の場合にはシステム行列の第2行第2列の要素が0から $-R_1/L_3$ へ、また入力行列の第2行の要素が0から $1/L_3$ へ不連続的に跳躍するのである。状態方程式は状態変数の線形変換によって無数の記述があるが、このような不連続性は消えない。

#### § 4 積分型状態方程式表現

通常の状態方程式表現における上述の意味での不連続性を解消するために積分型の状態方程式表現を導入する(以下では通常の状態方程式を微分型とよんで積分型と区別する)。これは

$$\int_0^t \dot{x}_I dt = A_I x_I + B_I u - x_I^{(-1)} \quad (5)$$

$$y = C_I x_I + D_I u \quad (6)$$

の形になる。

Fig.1 のシステムについてこれを求めると(状態変数の積分の初期値を省略して)

$$\int_0^t \begin{bmatrix} \dot{x}_{I1} \\ \dot{x}_{I2} \\ \dot{x}_{I3} \\ \dot{x}_{I4} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -C_2 R_1 & 0 & -C_2 R_1 & -C_2 R_1 \\ 0 & 0 & L_3 & L_3 \\ -C_4 R_1 & -C_4 & -C_4 R_1 & -C_4 R_1 \\ -C_4 R_1 & -C_6 & -C_6 R_1 & -C_6(R_1 + R_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{I1} \\ x_{I2} \\ x_{I3} \\ x_{I4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2 \\ 0 \\ C_4 \\ C_6 \end{bmatrix} u \quad (7)$$

$$y = \begin{bmatrix} -R_1 & -1 & -R_1 & -(R_1 + R_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{I1} \\ x_{I2} \\ x_{I3} \\ x_{I4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u \quad (8)$$

を得る。ここで、 $C_2$ 、 $C_4$ 、 $C_6$  に流れ込む電流を状態変数成分  $x_{I1}$ 、 $x_{I3}$ 、 $x_{I4}$  に、また  $L_3$  に現れる逆起電力を  $x_{I2}$  に選んである。

この表現では  $C_2 \rightarrow 0+$  のとき、システム行列と入力行列の第1行が消え、状態変数成分  $x_{I1}$  はゼロになる。したがってシステム行列および出力行列の第1列は不要になる。他の部分はまったく変化しない。その結果が  $C_2 = 0$  のときの積分型状態方程式になる。このようにこの表現では現象の連続性と数式モデル表現の連続性との整合がとれている。

## § 5 静特性と動特性の連続性

静特性は時間的変化の消えた状態である。積分型状態方程式表現では被積分項がゼロのとき時間的変化が消える。したがってそのとき  $\dot{x}_I = 0$  であり、入出力関係は

$$y = D_I u \quad (9)$$

である。すなわち、積分型では直達項が静特性を与え、動特性はそれに状態変数を介して加算されるわけである。そして状態変数  $x_I$  がゼロに近づくと連続的に動的状況が静的状況に近づく。

微分型では式 (1) の左辺をゼロとおき、 $A^{-1}$  をとって  $x$  を解くという過程が必要で、式 (1)、(2) か

ら動特性部分を消すということでは得られない。この意味で静特性と動特性を連続的には表現できていない。

## § 6 制御系設計に必要な基本的計算

制御系を設計する方程式を解く際には2つの要素の直列接続, 並列接続, そして各要素の逆要素の計算が必要になる。直列接続, 並列接続の計算は微分型, 積分型いずれの状態方程式表現でも容易である。しかし逆要素を表現するには直達行列の逆行列が必要になるので, それが正方で行列式がゼロでないことが必要になる。この条件が積分型状態方程式表現では通常の制御対象について成立し, 微分型では通常の制御対象について成立しない (Fig.1の例についても式(4)と式(8)から明らか)。そして  $D_I^{-1}$  が存在すれば積分型状態方程式表現では

$$\int_0^t \mathbf{x}_I dt = (A_I - B_I D_I^{-1} C_I) \mathbf{x}_I + B_I D_I^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{x}_I^{(-1)} \quad (10)$$

$$\mathbf{u} = -D_I^{-1} C_I \mathbf{x}_I + D_I^{-1} \mathbf{y} \quad (11)$$

である。

## § 7 伝達関数の原点周りの展開

工学的状況と整合性のよい制御系設計法に部分的モデルマッチング法 [1, 2] がある。この方法では伝達関数の原点周りの情報が必要であるが, 積分型状態方程式表現はこれとも整合している。微分型状態方程式表現は無窮遠点周りの情報を得るのに都合がよいが, これでは工学的状況にあった制御系設計には不便である。

ラプラス変換を用いて積分型状態方程式から伝達関数行列を求め, リゾルベントを展開すると

$$G(s) = C_I \left( \frac{1}{s} I - A_I \right)^{-1} B_I + D_I \quad (12)$$

$$= D_I + C_I B_I s + C_I A_I B_I s^2 + C_I A_I^2 B_I s^3 + \dots \quad (13)$$

を得る。これは  $G(s)$  のマクローリン展開に対応し, インパルス応答行列のモーメント系列表現, 分子系列表現などよんでいる。

そして積分型状態方程式表現では通常  $D_I^{-1}$  が存在するから, モーメント系列表現の逆すなわち分母系

列表現 (見やすくするため添字の  $I$  を省略して)

$$G(s)^{-1} = D^{-1} - D^{-1}CBD^{-1}s - D^{-1}C(A - BD^{-1}C)BD^{-1}s^2 - D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^2BD^{-1}s^3 - \dots \quad (14)$$

を求めることができる。これは逆要素表現 (10), (11) から容易に導くことができる。

これらの展開表現 (13), (14) における  $s$  の  $n$  次の項の係数は  $n$  個の物質やエネルギー蓄積要素の容量パラメータの相乗積の和になる。したがって高次の項の係数になるほど寄生的な物質やエネルギー蓄積要素の、値の小さい容量パラメータが因数として多く含まれ、係数全体としても小さい値になる。そしてこのような項は現象にはほとんど影響しない。したがって近似の次数を適当に選べる表現になっていて、目的に応じた近似数式モデルとして使うことができる。

部分的モデルマッチング法ではこの表現を使って設計公式を導く [1, 2] ののであるが、さらにはこれの非線形への連続的拡張もできる。その表現上で設計した例 [6] を Fig.3 に示す。同図には比較のために Isidori の厳密な線形化法 [5] による設計結果も示す。Isidori の方法は微分型状態方程式の非線形への拡張表現で階数が確定しているという前提の理論であり、本論とはまったく反対の立場に立つものである。この設計結果からは本数式モデル表現の効果は明瞭である。

### § 8 お わ り に

通常の状態方程式表現について、物理的・工学的状況と不整合である意味を明らかにし、それに代わる積分型状態方程式表現を提案して、動特性の同定や制御系の設計によく整合していることを明らかにした。

なお、本研究に対して1994年度法政大学特別研究助成金制度の助成を受けた。動特性解析、制御系設計のシミュレーション実験に有効に活用できたことを記して謝意を表したい。

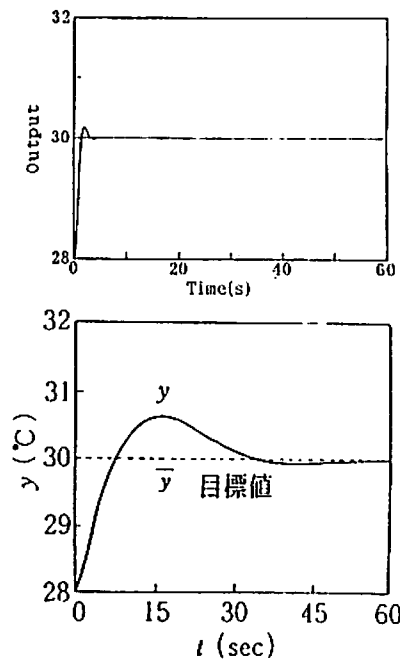


Fig.3 非線形制御系の設計例 (上: 表現(14)の非線形への拡張表現に基づく設計例, 下: Isidori の方法による設計例)

## 参 考 文 献

- 1) 北森俊行：制御対象の部分的知識に基づく制御系の設計法，計測自動制御学会論文集，15, No. 4, 549-555 (Aug., 1979)
- 2) 森 泰親・重政 隆・北森俊行：異なるサンプリング周期を有するサンプル値非干渉制御系の設計法，計測自動制御学会論文集，20, No. 4, 300-306 (April, 1984)
- 3) 北森俊行：物理的システムとの整合性を考慮した状態方程式表現，計測自動制御学会第16回制御理論シンポジウム資料，95-100 (June, 1987)
- 4) T. Kitamori: Integral Type State Equation Expression Conformable to Physical Systems, Preprints of China-Japan Joint Symposium on Systems Control Theory and Its Application, Hangzhou, China, 99-102 (Jan., 1989)
- 5) A. Isidori: Nonlinear Control Systems, 2nd ed., Springer-Verlag (1989)
- 6) 松岡卓郎・初鹿一夫：多項式表現による非線形制御系設計法の研究，法政大学工学部電気工学科計測制御専攻1994年度卒業論文 (March, 1995)