

### M/D/s/Nの残余保留時間分布に関する基礎的研究

TANAKA, Hiroshi / YOSHIDA, Yutaka / 吉田, 裕 / 田中, 大志

---

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

Bulletin of the Faculty of Engineering, Hosei University / 法政大学工学部  
研究集報

(巻 / Volume)

36

(開始ページ / Start Page)

13

(終了ページ / End Page)

17

(発行年 / Year)

2000-03

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00003788>

## M/D/s/Nの残余保留時間分布に関する基礎的研究

田中 大志 吉田 裕

## A Basic Study on Remaining Holding Time Distributions in M/D/s/N

Hiroshi TANAKA and Yutaka YOSHIDA

## Abstract

A traffic model M/D/s/N has not been theoretically analyzed and has been done only by discrete approximation. To explore its analysis, it seems to be important to analyze basically its remaining holding time distributions. This report describes the characteristics of correlation coefficients among remaining holding time distributions in M/D/s/N, discrete approximation analysis of steady state probabilities of M/D/s/N using remaining holding time distributions and an analysis of remaining holding time distribution function in M/D/1/N.

## 1. はじめに

保留時間一定・複数回線待ち行列のうち系内呼数制限無限の M/D/s は理論的な厳密解析が行われているが、系内呼数制限有限の M/D/s/N の理論的厳密解析は現在行われていない。M/D/s/N の離散近似解析が行われているのみであり<sup>[1]</sup>、解析の進展、精度向上には残余保留時間分布の解析が必要と思われる。そこで本論文では残余保留時間の相関係数を検討し、残余保留時間分布の独立性を調べるとともに、残余保留時間分布を用いた M/D/s/N の離散近似解析を行う。また将来の M/D/s/N 解析に応用できる可能性のある M/D/1/N の残余保留時間分布の理論的解析を行う。

## 2. M/D/s/N トラヒックモデル

呼は到着率  $\lambda$  で系にポアソン到着し、先着順に  $s$  本の回線のどれかを一定時間保留した後、退去する。系の対称性のため複数回線空き状態の場合、呼は等確率で回線を保留する。系内呼数制限は  $N$  で、系内呼数が  $N$  のとき到着した呼は呼損となる。

## 3. 残余保留時間分布の相関係数

M/D/s/N の残余保留時間分布の解析には複数回線間の残余保留時間分布の独立性が問題となる。各回線間の残余保留時間の相関係数から独立性について検討する。

呼生起時に保留状態である 2 回線の残余保留時間を  $X_1, X_2$  とすると、相関係数  $r(X_1, X_2)$  は次式から計算できる<sup>[3]</sup>。 $\mu, \sigma$  はそれぞれ  $X$  の平均値、標準偏差。ここで  $\rho=0$  は独立の必要条件である。

$$r(X_1, X_2) = \frac{E[X_1 X_2] - \mu_1 \mu_2}{\sigma_1 \sigma_2}$$

シミュレーションによる残余保留時間から 2 回線間の残余保留時間の相関係数を求め、相関係数

を図1に示す。相関係数は回線当たり呼量および系内呼数により異なり、回線当たり呼量が小さいときは全般的に相関係数が小さくなる。

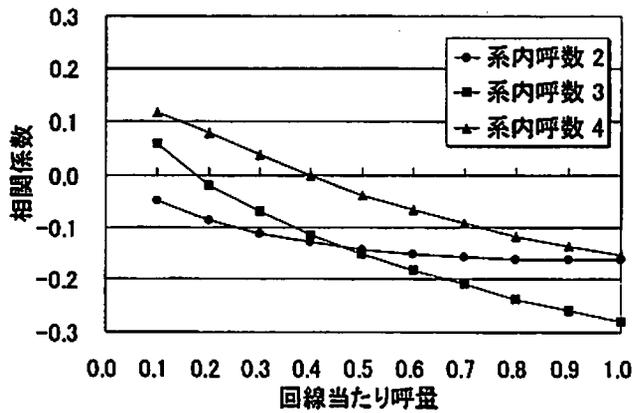


図1 M/D/2/4の相関係数

#### 4. 残余保留時間分布を用いた M/D/s/N の離散近似

ここで残余保留時間分布が独立であると仮定し、シミュレーションによる任意時刻における残余保留時間分布を離散近似し、M/D/s/Nの近似解析を行い、シミュレーション値と比較する。

##### 4.1 離散近似モデル

保留時間を  $n$ 、任意時刻  $t$  における系内呼数を  $k(t)$  とする。 $k(t)=0$  のとき、 $t$  から保留時間終了時刻  $t+n$  までの生起呼数を  $m$  とする。 $k(t)<s$  のとき、 $t$  から最初の呼退去時点直前の時刻  $x_1$  までの生起呼数を  $m_0$ 、 $i$  番目の呼退去時点直前の時刻  $x_i$  から  $x_{i+1}$  間の生起呼数を  $m_i (1 \leq i \leq j-1)$ 、 $x_j$  から  $t+n$  までの生起呼数を  $m_j$  とする。同様に  $k(t) \geq s$  のとき、 $x_i$  から  $x_{i+1}$  間の生起呼数を  $m_i (1 \leq i \leq s-1)$ 、 $x_s$  から  $t+n$  までの生起呼数を  $m_s$  とする。任意時刻における系内呼数  $j$ 、残余保留時間  $x_i$  である確率を  $r_j(x_i)$  とする。

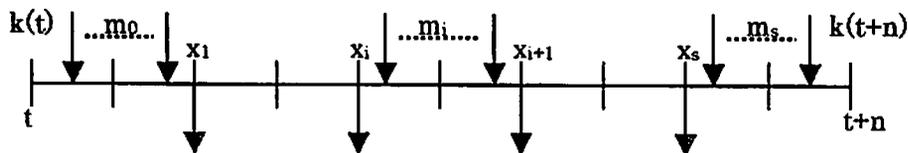


図2 離散近似モデル(例:  $k(t) \geq s$  のとき)

##### 4.2 状態遷移確率と定常状態確率

状態が  $k(t)=j$  から  $k(t+n)=k$  に遷移するのは各退去時刻間の生起呼数が次式を満たす組み合わせの場合のみであり、その時の遷移確率を  $p(m_0, \dots, m_i, \dots)$  とすると、次式を満たす全組み合わせに対する遷移確率の和が状態遷移確率  $P\{k(t+n)=k | k(t)=j\} = P(k|j)$  となる。

$k(t)=0$  のとき

$$k(t+n) = k = \min\{m, N\}$$

$k(t)=j < s$  のとき

$$k(x_1) = \min\{1 + m_0, N\}$$

$$k(x_i) = \min\{k(x_{i-1}) + m_{i-1} - 1, N\}$$

$$(i = 2, \dots, j)$$

$$k(t+n) = k = \min\{k(x_j) + m_j - 1, N\}$$

$k(t)=j \geq s$  のとき

$$k(x_1) = \min\{1 + m_0, N\}$$

$$k(x_i) = \min\{k(x_{i-1}) + m_{i-1} - 1, N\}$$

$$(i = 2, \dots, s)$$

$$k(t+n) = k = \min\{k(x_s) + m_s - 1, N\}$$

M/D/2/4,  $n=10$  を例に状態遷移確率の方程式の一部を示す。残余保留時間の離散分布を用いる場

合、退去呼が2以上ならば複数の呼の退去時刻が同時となる場合( $x_i=x_{i+1}=\dots$ )とならない場合を考慮する必要がある。(例中  $P(2|2)$ の  $p(0,2)$ と  $p(0,0,2)$ など)

$$P(k|j) = \frac{(\lambda n)^k}{k!} e^{-\lambda n} \quad (j=0, k \leq 3), (j=1, k \leq 2)$$

$$P(3|1) = p(0,3) + p(1,2) + p(2,1) + p(3,0) + p(4 \dots \infty, 0)$$

$$= \frac{(\lambda n)^3}{3!} e^{-\lambda n} + \sum_{x_1=1}^n \left\{ 1 - \sum_{m_0=0}^3 \frac{(\lambda x_1)^{m_0}}{m_0!} e^{-\lambda x_1} \right\} e^{-\lambda(n-x_1)} r_1(x_1)$$

$$P(k|2) = \sum_{x_1=1}^n \frac{(\lambda n)^k}{k!} e^{-\lambda n} r_2^2(x_1) + 2 \sum_{x_1=1}^n \sum_{x_2=x_1+1}^n \frac{(\lambda n)^k}{k!} e^{-\lambda n} r_2(x_1) r_2(x_2) \quad (k=0,1)$$

$$P(2|2) = p(0,2) + p(1,1) + p(2,0) + p(0,0,2) + p(1,0,1) + p(2,0,0) + p(0,1,1) + p(0,2,0) + p(1,1,0)$$

$$+ p(3 \dots \infty, 0) + p(3 \dots \infty, 0, 0)$$

$$= \sum_{x_1=1}^n \frac{(\lambda n)^2}{2!} e^{-\lambda n} r_2^2(x_1) + 2 \sum_{x_1=1}^n \sum_{x_2=x_1+1}^n \frac{(\lambda n)^2}{2!} e^{-\lambda n} r_2(x_1) r_2(x_2)$$

$$+ \sum_{x_1=1}^n \left\{ 1 - \sum_{m_0=0}^2 \frac{(\lambda x_1)^{m_0}}{m_0!} e^{-\lambda x_1} \right\} e^{-\lambda(n-x_1)} r_2^2(x_1) + 2 \sum_{x_1=1}^n \sum_{x_2=x_1+1}^n \left\{ 1 - \sum_{m_0=0}^2 \frac{(\lambda x_1)^{m_0}}{m_0!} e^{-\lambda x_1} \right\} e^{-\lambda(n-x_1)} r_2(x_1) r_2(x_2)$$

定常状態確率  $P(k)$  ( $0 \leq k \leq N$ )は次の状態方程式および正規化条件式の連立方程式より求まる。

$$P(k) = \sum_{j=0}^N P(k|j)P(j) \quad , \quad \sum_{k=0}^N P(k) = 1$$

#### 4.3 数値解析結果とシミュレーション結果との比較

定常状態確率の数値解析結果とシミュレーション結果および99%信頼区間を  $M/D/2/4$  を表1に示す。数値解析では残余保留時間分布としてシミュレーション値を用いた。呼量小では精度は良好だが呼量の増加に伴い精度は悪化している。これは回線間の残余保留時間分布の独立性がなくなるためと思われる。

表1 計算値とシミュレーション値

呼量		P(0)	P(1)	P(2)	P(3)	P(4)
0.05	Sim値	0.9047	0.0906	4.533e-3	1.508e-4	0.381e-5
	99%区間	0.0001	0.0001	0.017e-3	0.027e-4	0.044e-5
	計算値	0.9047	0.0906	4.550e-3	1.520e-4	1.300e-5
0.1	Sim値	0.8177	0.1645	0.0166	1.113e-3	5.685e-5
	99%区間	0.0001	0.0001	0.0001	0.010e-3	0.337e-5
	計算値	0.8178	0.1645	0.0166	1.109e-3	1.800e-5
0.3	Sim値	0.5346	0.3330	0.1063	0.0226	3.495e-3
	99%区間	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.026e-3
	計算値	0.5348	0.3331	0.1066	0.0223	3.259e-3

### 5. $M/D/1/N$ の残余保留時間分布

次に  $M/D/1/N$ の残余保留時間分布の理論的解析を行う。既知の  $M/G/1/N$ の定常状態および呼の退去時点直後における系内呼数分布を用い、生起呼が遭遇する系内呼数に関する条件付き残余保留時間分布関数を求める。

#### 5.1 呼退去時点直後における系内呼数の定常分布

保留時間を単位時間とする。呼退去時点直後の系内呼数を  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq N-1$ )とすると、過程 $\{\xi\}$ は

隠れマルコフ連鎖である。退去時点直後に系内呼数が  $j$  である定常確率  $\pi_j$  は次式より求められる<sup>[2]</sup>。

$$\pi_{j+1} = \frac{1}{a_0(1)} \left\{ \pi_j - a_j(1)\pi_0 - \sum_{i=1}^j a_{j-i+1}(1)\pi_i \right\} \quad (0 \leq j \leq N-2), \quad \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i = 1$$

ここで時間  $t$  中に  $n$  個の呼がポアソン到着する確率は次式となる。

$$a_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

### 5.2 生起呼数と残余保留時間の同時分布

ある保留時間中の生起呼数を  $\nu$ 、 $n$  番目の呼生起から保留時間終了までの時間を  $\eta_n$  とする。 $n$  番目の呼生起時の残余保留時間が  $x$  以下、保留時間中生起呼数が  $m$  である確率  $P\{\eta_n \leq x, \nu = m\}$  は時間  $(0, 1-x)$  中の生起呼数が  $n-1$  以下、時間  $(1-x, 1)$  中に  $\nu$  個のうち残りの呼が生起する確率であり次式で表される。

$$P\{\eta_n \leq x, \nu = m\} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(1-x)a_{m-i}(x), \quad (0 \leq x \leq 1, m \geq n)$$

### 5.3 呼生起直前の系内呼数

保留時間中、 $n$  番目の呼生起直前の系内呼数を  $\xi_n$  とすると、 $\xi_n$  は  $n$  と直前の退去時点直後の系内呼数  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq N-1$ ) によって定まり、次式で表される。

$$\xi_n = n + \max(\xi - 1, 0), \quad (n \geq 1)$$

系内呼数が  $\xi_n$  ( $1 \leq \xi_n \leq N$ ) となる  $\xi$  と  $n$  の組み合わせは次のようになる。

$\xi_n = j$  ( $1 \leq j \leq N-1$ ) の場合

$$(n, \xi) = (j, 0), (j, 1), (j-1, 2), \dots, (1, j)$$

$\xi_n = N$  の場合

$$(n, \xi) = (N \dots \infty, 0), (N \dots \infty, 1), (N-1 \dots \infty, 2), \dots, (2 \dots \infty, N-1)$$

### 5.4 系内呼数に関する条件付き残余保留時間分布関数

保留時間中、 $n$  番目の呼生起時点直前の系内呼数が  $\xi_n = j$  のときの残余保留時間分布関数を  $R_j(x)$  とする。 $R_j(x)$  は上述の  $\xi$  と  $n$  の全組み合わせに対する  $P\{\eta_n \leq x, \nu = m\}$  と  $\pi_j$  から求まり次式で表わされる。

$\xi_n = j$  ( $1 \leq j \leq N-1$ ) の場合

$$R_j(x) = \frac{\pi_0 \sum_{m=j}^{\infty} P\{\eta_j \leq x, \nu = m\} + \sum_{i=1}^j \pi_i \sum_{m=j-i+1}^{\infty} P\{\eta_{j-i+1} \leq x, \nu = m\}}{\pi_0 \sum_{m=j}^{\infty} a_m(1) + \sum_{i=1}^j \pi_i \sum_{m=j-i+1}^{\infty} a_m(1)}$$

$$= \frac{\pi_0 \sum_{l=0}^{j-1} \frac{\{\lambda(1-x)\}^l}{l!} e^{-\lambda} \left\{ e^{\lambda x} - \sum_{m=0}^{j-1-l} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \right\} + \sum_{i=1}^j \pi_i \sum_{l=0}^{j-i} \frac{\{\lambda(1-x)\}^l}{l!} e^{-\lambda} \left\{ e^{\lambda x} - \sum_{m=0}^{j-i-l} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \right\}}{\pi_0 \left( 1 - \sum_{m=0}^{j-1} a_m(1) \right) + \sum_{i=1}^j \pi_i \left( 1 - \sum_{m=0}^{j-i} a_m(1) \right)}$$

$\xi_n=N$  の場合

$$R_N(x) = \frac{\pi_0 \sum_{m=N}^{\infty} \sum_{n=N}^m P\{\eta_n \leq x, \nu = m\} + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i \sum_{m=N-i+1}^{\infty} \sum_{n=N-i+1}^m P\{\eta_n \leq x, \nu = m\}}{\pi_0 \sum_{m=N}^{\infty} \sum_{n=N}^m a_m(1) + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i \sum_{m=N-i+1}^{\infty} \sum_{n=N-i+1}^m a_m(1)}$$

$$\text{分母} = \pi_0 \left\{ \lambda \left( 1 - \sum_{m=0}^{N-2} a_m(1) \right) + (1-N) \left( 1 - \sum_{m=0}^{N-1} a_m(1) \right) \right\} + \sum_{i=1}^l \pi_i \left\{ \lambda \left( 1 - \sum_{m=0}^{N-i-1} a_m(1) \right) + (i-N) \left( 1 - \sum_{m=0}^{N-i} a_m(1) \right) \right\}$$

$$\text{分子} = \pi_0 \left[ \lambda x + e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{N-2} \frac{\{\lambda(1-x)\}^l}{l!} \left\{ e^{\lambda x} (l-N+1) - (\lambda x + l - N + 1) \sum_{m=0}^{N-l-1} \frac{(\lambda x)^m}{m!} - \frac{(\lambda x)^{N-l}}{(N-l-1)!} \right\} \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i \left[ \lambda x + e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{N-i-1} \frac{\{\lambda(1-x)\}^l}{l!} \left\{ e^{\lambda x} (l-N+i) - (\lambda x + l - N + i) \sum_{m=0}^{N-l-i} \frac{(\lambda x)^m}{m!} - \frac{(\lambda x)^{N-l-i+1}}{(N-l-i)!} \right\} \right]$$

### 6. おわりに

M/D/s/N 離散近似解析の進展、精度向上に必要な残余保留時間分布に関するいくつかの検討を行った。M/D/s/N の残余保留時間の相関係数について検討した。その相関係数の特性をふまえて呼量小さい場合についてシミュレーションによる残余保留時間分布を用い、離散近似により定常状態確率を求め、精度の良い結果を得た。これより適切な残余保留時間分布を用い、独立が仮定できる範囲では精度が向上する事が確認できた。また M/D/1/N の残余保留時間分布の理論的解析を行い、系内呼数の条件付き残余保留時間分布関数を示した。今後は残余保留時間の独立性および分布関数について更に検討を行っていく必要がある。分布関数については今回解析を行った M/D/1/N の残余保留時間分布が参考になる可能性がある。

### 参考文献

- [1] 森本,吉田,“系内呼数有限・一定サービス時間待ち行列モデルの離散近似”,電子情報通信学会論文誌,Vol.J80-B-I,No.12,pp943-949,Dec.1997.
- [2] R.B.Cooper, "Introduction to Queuing Theory", pp179-183, Macmillan, New York, 1972.
- [3] 伏見,“確率と確率過程”,pp62,講談社,1987.
- [4] 田中,吉田,“M/D/s/N の残余保留時間分布の検討”,信学ソ大,B-7-24,Sep.1999.