二元配分問題のアルゴリズム

古林, 隆 / FUKUMA, Toshiko / KOBAYASHI, Takashi / 福馬, 敏子

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
Bulletin of the Technical College of Hosei University / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
39
(開始ページ / Start Page)
39
(終了ページ / End Page)
42
(発行年 / Year)
2003-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00003777

二元配分問題のアルゴリズム

AN ALGORITHM FOR TWO-WAY DISTRIBUTION PROBLEM

古林 隆*，福馬敏子*

Takashi KOBAYASHI and Toshiko FUKUMA

Given a finite set, there is the distribution problem that is to assign integers to subsets of its partition under the constraints of their total and subtotals, where the objective is to minimize the sum of differences between the assigned integer and the proportion related to size for each subset.

The problem for a one-way partitioned finite set arises in the case of assigning numbers of members to electoral districts of the House member election, and some algorithms have been proposed. Here, we consider a two-way distribution problem which is to obtain an optimal distribution for a two-way partitioned finite set. It arises when fellowship candidates are partitioned by departments and regions. We transform it into a capacitated Hitchcock type transportation problem, and obtain an optimal solution.

Key words *two- way distribution problem, Hitchcock type transportation problem, algorithm.*

1. はじめに

議員選挙における定数配分のように，有限集合がいくつかの集合に分割されているときに，それぞれの大きさ（人数）を考慮して，各集合への配分数を決定したいことがある．各集合の大きさに比例させることが合理的であるが，比例配分数は，整数になるとは限らないから，配分数を決定するのが問題になる．議員定数配分については，配分方法がいろいろ提案されている[3]が，これは，全体集合（全有権者）が一つの分割基準（選挙区），すなわち，一元で分割されている場合である．

ここでは，全体集合が二種類の分割基準により，二重に分割されている場合の配分数を決定する二元配分問題をとりあげる．これは，奨学金の受給者の応募で，学科別，出身地域別に，受給者数を決定したいときなどに生ずる．

まず，この問題を数理計画問題として定式化し，次に，変数の変換により，ヒッチコック型輸送問題に変形し，最適解を求めるアルゴリズムを提案する．

2. 二元配分問題

全体集合が，第一の分割基準により，A_1，A_2，$\cdots A_{n1}$ の n_1 項目に分割され，第二の分割基準により，B_1，B_2，$\cdots B_{n2}$ の n_2 項目に分割されているものとする．

$A_i B_j$（$i=1,2\cdots\cdots,n_1$，$j=1,2\cdots\cdots,n_2$）の大きさを f_{ij} とし，

$$f_{i0}=\sum_j f_{ij} \quad (i=1,2\cdots\cdots,n_1)\ , \tag{1}$$

$$f_{0j}=\sum_i f_{ij} \quad (j=1,2\cdots\cdots,n_2)\ , \tag{2}$$

$$f_T=\sum_i f_{i0}=\sum_j f_{0j} \tag{3}$$

とする．

ここで総配分数を S とし，$S<f_T$ とする．

さらに，

$$r=S/f_T \ (<1)\ , \tag{4}$$

$$P_{ij}=rf_{ij}\ ,\ P_{i0}=rf_{i0}\ ,\ P_{0j}=rf_{0j}\ ,$$
$$(i=1,2\cdots\cdots,n_1,\ j=1,2\cdots\cdots,n_2) \tag{5}$$

とする．

$A_i B_j$ への配分数を X_{ij} とすると，条件は次のように表される．

$$X_{i0}=\sum_j X_{ij} \quad (i=1,2\cdots\cdots,n_1)\ , \tag{6}$$

$$X_{0j}=\sum_i X_{ij} \quad (j=1,2\cdots\cdots,n_2)\ , \tag{7}$$

$$\sum_i X_{i0}=\sum_j X_{0j}=S\ , \tag{8}$$

$$X_{ij}=[P_{ij}] \ or \ [P_{ij}]+1$$

* 経営工学科

$$(i=1,2\cdots\cdots,n_1,\quad j=1,2\cdots\cdots,n_2)\ ,\tag{9}$$

$$X_{i0}=[P_{i0}]\ \ or\ \ [P_{i0}]+1\qquad (i=1,2\cdots\cdots,n_1)\ ,\tag{10}$$

$$X_{0j}=[P_{0j}]\ \ or\ \ [P_{0j}]+1\qquad (j=1,2\cdots\cdots,n_2)\ .\tag{11}$$

ここで，$[X]$はXをこえない最大整数を表すものとする．次に，最小化したい目的関数を

$$Z=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}g_{ij}(X_{ij})+\mu\left(\sum_{i=1}^{n_1}g_{i0}(X_{i0})+\sum_{j=1}^{n_2}g_{0j}(X_{0j})\right)\tag{12}$$

とする．ここで μ は非負の定数とし，A_i B_jへの配分数とA_i またはB_jへの配分数では μ により重みを変えられるようにした．

$g_{ij}(X)$としては，次のように2通り考える．

$$\text{G1}:\ g_{ij}(X)=\left|X-P_{ij}\right|\ ,\tag{13}$$

G2：

$$g_{ij}(X)=\begin{cases}P_{ij}-[P_{ij}] & (X=[P_{ij}])\ ,\\ 0 & (X=[P_{ij}]+1)\end{cases}$$

$$(i=0,1,2\cdots\cdots,n_1,j=0,1,2\cdots\cdots,n_2,\ i=j=0\text{ を除く．})\ .\tag{14}$$

G1は，式(4)(5)により計算された項目ごとの比例配分数と実際の配分数との絶対偏差の和を最小にすることを意味している．

G2では，g_{ij}をペナルティと考え，配分数が比例配分数を超えたときは，各分割項目に対して望ましいので 0 とした．

3．ヒッチコック型輸送問題への変形

前章で定式化した二元配分問題を，最小費用流問題の一種である容量制限付きヒッチコック型輸送問題[1][2]に変形する．

変数を次のようにおきかえる．

$$U_{ij}=X_{ij}-[P_{ij}]$$

$$(i=1,2\cdots\cdots,n_1,\quad j=1,2\cdots\cdots,n_2)\ ,\tag{15}$$

$$U_{i0}=[P_{i0}]+1-X_{i0}\qquad (i=1,2\cdots\cdots,n_1)\ ,\tag{16}$$

$$U_{0j}=[P_{0j}]+1-X_{0j}\quad (j=1,2\cdots\cdots,\ n_2)\ ,\tag{17}$$

$$U_{00}\ =0$$

とおく．

条件 (6),(7),(8),(9),(10),(11) は次のようになる．

$$\sum_j U_{ij}+U_{i0}=[P_{i0}]-\sum_j[P_{ij}]+1$$

$$(i=1,2\cdots\cdots,n_1)\ ,\tag{18}$$

$$\sum_i U_{ij}+U_{0j}=[P_{0j}]-\sum_i[P_{ij}]+1$$

$$(j=1,2\cdots\cdots,n_2)\ ,\tag{19}$$

$$\sum_i U_{i0}=\sum_i\ [P_{i0}]+n_1-S\ \ ,\tag{20}$$

$$\sum_j U_{0j}=\sum_j\ [P_{0j}]+n_2-S\ \ ,\tag{21}$$

$$U_{ij}\ =0\ \ or\ \ 1$$

$$(i=1,2\cdots\cdots,n_1,\quad j=1,2\cdots\cdots,n_2,\ i=j=0\text{ を除く．})\ .\tag{22}$$

(C_{ij})を次のように定義する．

G1においては，

$$C_{ij}=1-2(P_{ij}-[P_{ij}])$$

$$(i=1,2\cdots\cdots,n_1,j=1,2\cdots\cdots,n_2)\ ,\tag{23}$$

$$C_{i0}=\mu(2(P_{i0}-[P_{i0}])-1)\ (i=1,2\cdots\cdots,n_1)\ ,\tag{24}$$

$$C_{0j}=\mu(2(P_{0j}-[P_{0j}])-1)\ (j=1,2\cdots\cdots,n_2)\ ,\tag{25}$$

$$C_{00}\ =0\ ,$$

G2においては

$$C_{ij}=-(P_{ij}-[P_{ij}])$$

$$(i=1,2\cdots\cdots,n_1,j=1,2\cdots\cdots,n_2)\ ,\tag{26}$$

$$C_{i0}=P_{i0}-[P_{i0}]\qquad (i=1,2\cdots\cdots,n_1)\ ,\tag{27}$$

$$C_{0j}=P_{0j}-[P_{0j}]\qquad (j=1,2\cdots\cdots,n_2)\ ,\tag{28}$$

$$C_{00}\ =0\ .$$

このとき，二元配分問題は，(18),(19),(20),(21),(22)のもとで，目的関数

$$Z_c=\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}C_{ij}U_{ij}=Z-k\tag{29}$$

を最小にすることになる．ここで，kは定数である．

式(18),(19),(20),(21)の係数行列はユニモデュラー行列であるので，式(22)は次式のようにおきかえることができる．

$$0\leqq U_{ij}\leqq 1\qquad (i=0,1,2\cdots\cdots,n_1,j=0,1,2\cdots\cdots,n_2)$$

(30)

(U_{ij} = 0 または 1 を満たす解の中に最適解が存在する.)

したがって，二元配分問題は容量制限つきヒッチコック型輸送問題となる.

4. 実行例

n_1=3, n_2=5 である問題を考える. (f_{ij})を表 4.1 に示す. ここで総数 S は 50 とする.

表 4.1　f_{ij}

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	計
1	42	38	29	65	41	215
2	24	66	36	32	147	305
3	48	59	84	161	128	480
計	114	163	149	258	316	1000

(P_{ij})および([P_{ij}])は表 4.2 と表 4.3 のようになる.

表 4.2　P_{ij}

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	計
1	2.10	1.90	1.45	3.25	2.05	10.75
2	1.20	3.30	1.80	1.60	7.35	15.25
3	2.40	2.95	4.20	8.05	6.40	24.00
計	5.70	8.15	7.45	12.90	15.80	50.00

表 4.3　[P_{ij}]

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	計
1	2	1	1	3	2	10
2	1	3	1	1	7	15
3	2	2	4	8	6	24
計	5	8	7	12	15	

<G 1 を用いたときの結果>

式(23),(24),(25)から計算した(C_{ij})を表 4.4 に示す.

表 4.4　C_{ij}

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	0*
1	0.80	-0.80	0.10	0.50	0.90	0.50
2	0.60	0.40	-0.60	-0.20	0.30	-0.50
3	0.20	-0.90	0.60	0.90	0.20	-1.00
0*	0.40	-0.70	-0.10	0.80	0.60	0.00

ただし, 0* は μ = 1 のときの(C_{i0})，(C_{0j})の値を示す.

μ = 1 とおいたとき，最適解 U_{ij} を表 4.5 に示す. このときの z_c は −4.00 である.

表 4.5　μ =1 のときの U_{ij}

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	0	計
1	0	1	1	0	0	0	2
2	0	0	1	1	0	1	3
3	0	1	0	0	1	1	3
0	1	1	0	0	0	0	2
計	1	3	2	1	1	2	10

式(15),(16),(17)により求めた(X_{ij})を表 4.6 に示す. 表中で下線の部分は P_{ij} を切り上げたことを示している. このとき，k = 10 であるので，Z = 6 となる.

表 4.6　μ =1 のときの X_{ij}

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	計
1	2	$\underline{2}$	$\underline{2}$	3	2	$\underline{11}$
2	1	3	$\underline{2}$	$\underline{2}$	7	15
3	2	$\underline{3}$	4	8	$\underline{7}$	24
計	5	8	$\underline{8}$	$\underline{13}$	$\underline{16}$	50

同様に，μ = 2 とおいた場合の(U_{ij})と(X_{ij})を表 4.7 と表 4.8 に示す.

表 4.7　μ =2 のときの U_{ij}

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	0	計
1	1	1	0	0	0	0	2
2	0	0	1	1	0	1	3
3	0	1	0	0	1	1	3
0	0	1	1	0	0	0	2
計	1	3	2	1	1	2	10

表 4.8　μ =2 のときの X_{ij}

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	計
1	$\underline{3}$	$\underline{2}$	1	3	2	$\underline{11}$
2	1	3	$\underline{2}$	$\underline{2}$	7	15
3	2	$\underline{3}$	4	8	7	24
計	$\underline{6}$	8	7	$\underline{13}$	$\underline{16}$	50

$\mu=0$ のときの (X_{ij}) は，$\mu=1$ のときと一致した．また，$\mu=3, 4, 5$ のときの (X_{ij}) は，$\mu=2$ のときと一致した．

<G 2 を用いたときの結果>

式(26),(27),(28)から計算した係数(C_{ij})を表 4.9 に示す．

表 4.9　$\mu=1$ のときの C_{ij}

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	0*
1	-0.10	-0.90	-0.45	-0.25	-0.05	0.75
2	-0.20	-0.30	-0.80	-0.60	-0.35	0.25
3	-0.40	-0.95	-0.20	-0.05	-0.40	0.00
0*	0.70	0.15	0.45	0.90	0.80	0.00

ただし，0* は $\mu=1$ のときの(C_{i0})，$(C_0)_j$の値を示したものである．

$\mu=1, 2, 3, 4, 5$ としたときの解を求めたところ，G 1 の解と同じであった．

5. おわりに

取り上げた例では，μ の値を変えても，1 以下と 2 以上で配分数が変わるだけであった．一般に，μ の値を変えても，分岐点（配分数が変わる μ の値）はあまり多くならないであろう．μ を大きくすると，(X_{i0})，(X_{0j}) はそれぞれ (P_{i0})，(P_{0j}) の小数部分の大きいほうから切り上げるときの値に一致するようになる．目的関数として，配分者側が小さくしたい「誤差」と被配分者側が小さくしたい「ペナルティ」を考えたが，ほとんどの場合，結果が変わらないと思われる．

ここでは，配分数として，比例配分数の両側の整数しか認めないことにしたが，目的関数として，G 1，G 2 を用いるのであれば，範囲を広げても，目的関数を折線状の分離形凸関数にできるから，同様に最適解を求めることができる[2]

参考文献

1) Ahuja,R.K.etal.: "Applications of Network Optimization", Network Models, Chap.1,Handbooks of OR and MS vol.7, NORTH-HOLLAND,1995.

2) 伊理正夫，古林　隆：ネットワーク理論，日科技連出版，1976.

3) 大山達雄：最適化モデル分析，日科技連出版，1993.