

撞球は量子力学のべールを暴けるか(1)固有エネルギーの統計的性質

HIROOKA, Hajime / 広岡, 一

(出版者 / Publisher)

法政大学工学部

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学工学部研究集報 / 法政大学工学部研究集報

(巻 / Volume)

39

(開始ページ / Start Page)

23

(終了ページ / End Page)

26

(発行年 / Year)

2003-03

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00003775>

撞球は量子力学のボールを暴けるか

I. 固有エネルギーの統計的性質

BILLIARD COULD TAKE OFF THE VEIL OF QUANTUM MECHANICS — STATISTICAL PROPERTIES OF EIGENENERGIES

広岡 一

Hajime HIROOKA

Despite the very success of quantum mechanics during the last century and the dawn of quantum information processing age, such as quantum computer and quantum cryptography, we can not still know quantum mechanics in reality, particularly the origin of the probabilistic interpretation. The studies of quantum chaos have rearoused our interest in semiclassical considerations, called postmodernism in quantum mechanics.

Key Words : Quantum chaos, Billiard problem, Wyle formula of Spectra, Statistics of energy spectra.

1. はじめに

「神はサイコロ遊びをしない、ただそのようにみえるに過ぎない。」これはアインシュタインがコペンハーゲン学派の量子力学の確率的解釈を批判して述べた言葉として有名である。物質やエネルギーに関する物理学の最も基本的法則にかかわらず、我々がまさに知り得ないことがあることで量子力学は成り立っているともいえる。原子以下の粒子においては、速度と位置、質量とエネルギーなどを各瞬間に正確に知ることを禁じている、ただ確率的な知識を持ちうるに過ぎない。量子的な対象においては真にただ確率的実体だけが存在するのだろうか、それとも量子力学の根底にさらに隠れた現実が存在し、そこでは全てが古典力学におけるように決定論的に決まるが、我々の無知が確率的認識を生み出しているのだろうか。

この問題は「隠れた次元」とか「隠れた変数」と呼ばれ、アインシュタイン以来しばしば話題になってきたが、20世紀の量子力学の現実的成功は、その基礎に関する漠然とした不安を多くの理論物理学者の心の片隅に押しやってしまうことになった。しかし1980年代古典力学系におけるカオスの認識は再びこの問題に我々を直面させることになる。古典力学系も長時間にわたる時間発展においては予測可能ではない。古典力学の決定論的本質は無限の観測精度を前提としている。ハイゼンベルグの不確定性原理が古典力学系にもかかわりうるのである。古典力学系では僅かな初期条件の差をもつ2つの軌道がその後の発展において指数関数的に分離してゆく。このようなカオス軌道を生じる非可積分系での性質は、量子力学にいかにか反映されるのだろうかという興味は1980年代頃から、「量子カオス」という名で多くの研究がなされてきた。量子力学では $\hbar \rightarrow 0$ の極限で古典力学との対応

原理が存在する。量子力学は極限では古典的なカオスを表しうるのだろうか。古典的な軌道のカオスは半古典論で量子化されうるのだろうか。量子的なカオスというもの存在するのだろうか。

2 撞球問題と波動

図1は、2つの大小の円に囲まれた領域でのビリヤードを表している。外側と内側の円の表面で完全反射を繰り返す。このように2円が同心円の時には反射角は常に一定である。力学的には角運動量が保存され積分系である、

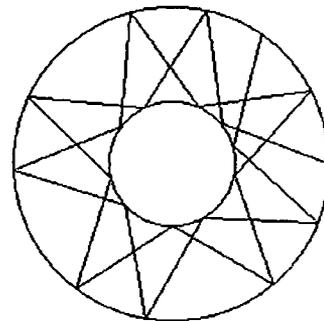


図1 同心円に囲まれた領域の撞球運動、

これに対し、図2は内側の小円をずらして、離心円になると(中心のずれ $d=0.2$ 、ただし外円の半径は1、内円の半径は0.4である)同じ条件右端から出発した軌道の様子を描いていたものであるが、カオス軌道とよばれるものを生じる。このことは図3のように、図2と初期の発射角を100分の1度(20度と20.01度)だけ変えて同じ回数衝突を繰り返したときの軌道との相異からも知りうる。

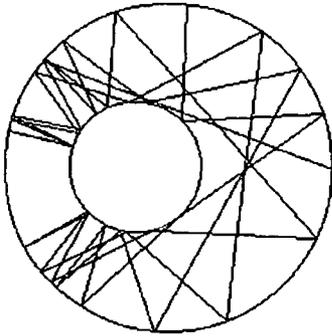


図 2 中心のずれた 2 円の間での撞球の例

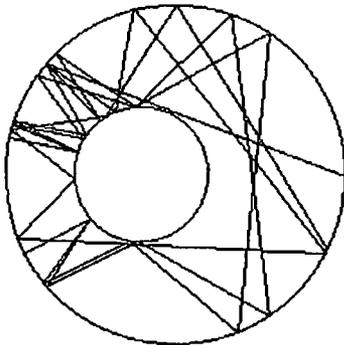


図 3 図 2 と同じであるが、右端の初期発射が 1/100 度異なるときの軌道

中心のずれた 2 円にはさまれた領域の撞球問題については詳しい研究がなされているので参照されたい¹⁾。撞球問題は微分系とことなり軌道の幾何学的イメージも容易なことから古典系のカオスの研究に有効なモデルを与えてきた。

この撞球問題に対する量子力学波動関数 ψ は

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -H\psi, \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad \text{in 領域 } \Omega$$

境界上では $\psi = 0$ で与えられる。ここでは定常状態についての議論に限ることになると、定常状態に対するシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E\psi$$

の固有値 E_n および波動関数 ψ_n が 2 円に囲まれた領域 Ω の変化といかに関係するかしらべる。領域 Ω の変化は内円と外円の中心のずれ d で与えられる。この問題はまたこのような境界を持つ膜の振動とも関連する。波動方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi$$

の定常解 $\psi = \varphi(\vec{r})e^{i\omega t}$ に対し

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) = \lambda \varphi(\vec{r}) \quad \text{ここで } \lambda = \frac{\omega^2}{2c^2} \text{ である。}$$

定常的な量子状態も膜の振動もともにラプラス方程式

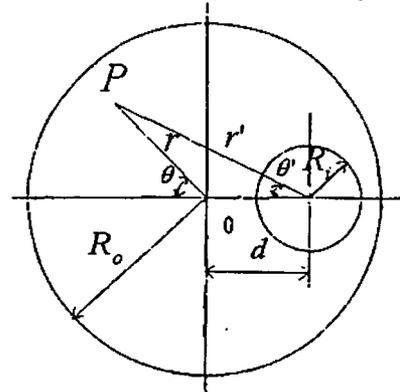
$$(\Delta + E_n)\varphi_n = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\varphi_n = 0 \quad \text{on the boundary of } \Omega.$$

で与えられる。かつてヘルムホルツはラプラス方程式の固有値問題に関心をもった。「膜の形の変化を固有振動からいかに聞き分けることができるだろうか」ということであつたが、20 世紀後半我々はまたこの問題を量子カオスで思い出させられることになった。

3 固有値、固有関数の計算

ここでの固有値、固有関数の計算には境界の形状を考慮して、図のように外円、内円の中心から 2 つの極座標 (r, θ) 、 (r', θ') をとることにする。



2次元の波動方程式を極座標 (r', θ') で表すと

$$\left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r'^2} + \left(\frac{1}{r'} \right) \frac{\partial w}{\partial r'} + \left(\frac{1}{r'^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta'^2} \right\} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

定常解 $U(r', \theta')$ に対しては

$$w(r', \theta', t) = U(r', \theta') \sin kt$$

$$U = U_s + U_a$$

$$U_s = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_{sn} J_n(kR') + B_{sn} Y_n(kR')\} \cos n\theta'$$

$$U_a = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_{an} J_n(kR') + B_{an} Y_n(kR')\} \sin n\theta'$$

U_s 、 U_a はそれぞれ 2 円の中心を結ぶ線に対称、反対称な振動に対応する。

また、変数 R, θ と R', θ' の間には次の関係がある。

$$R \cos \theta + d = R' \cos \theta'$$

$$R \sin \theta = R' \sin \theta'$$

U_s, U_a は 2 円の境界上で $R=R_0$ (外円の半径 R_0 はここでの計算では 1 とする) および $R'=R_i$ (内円の半径 R_i) で 0 の条件をみたすものとする。同心円の時には

例えば、対称な振動に対しては

$$A_{sn} J_n(H_{nm} R_o) + B_{sn} Y_n(H_{nm} R_o) = 0$$

$$\therefore B_{sn} = A_{sn} \cdot B'_{sn}, \quad B'_{snm} = -\frac{J_n(H_{nm} R_o)}{Y_n(H_{nm} R_o)}$$

ここで H_{nm} は方程式

$$D_n^0 = \begin{vmatrix} J_n(H_{nm} R_i) & Y_n(H_{nm} R_i) \\ J_n(H_{nm} R_o) & Y_n(H_{nm} R_o) \end{vmatrix} = 0$$

の m 番目の根である。同心円でないときはベッセル関数の加法定理 (Additional Theorem) を用いて、 U_s の対しては境界条件 $(U_s)_{R=R_o} = 0, (U_s)_{R=R_i} = 0$ から

$$A_{-m} J_m(H) + \sum_{n=0}^{\infty} [B_{-n} Y_n(H) (J_{-n}(Hd) + (-1)^n J_{n-m}(Hd))] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [A_{-n} J_n(HR) (J_{-n}(Hd) + (-1)^n J_{n-m}(Hd))] + B_{-m} Y_m(HR) = 0$$

($m = 0, 1, 2, \dots$)

の連立方程式が得られる。 m, n を N までとると

$$G_s \begin{vmatrix} A_{s0} \\ B_{s0} \\ A_{s1} \\ B_{s1} \\ \vdots \\ A_{sN} \\ B_{sN} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

G_s は $2N \times 2N$ の行列である。 $|G_s| = 0$ を満たす Π が固有値を与える。

4 固有エネルギーの揺らぎの統計とワイルの公式

固有エネルギー E_n や波動関数 ψ_n が d を変えるとどのようになるかが、各 d に対して 300 レベルにわたって計算される。これは $N=50$ に対して求めうるレベル数である。より高いレベルの計算には N を増す必要がある。

例えば、表 1 は同心円 ($d=0$) のときの振動数を低い方から順に並べたときの 100 番目あたりの 10 個の固有振動 H_{nm} を表している。1 列目は n を、2 列目は m を表す。積分可能な系における量子数に対応する。振動における角度 θ 方向および半径 r 方向のノーダルライン (振幅 $\Psi = 0$) の個数に対応している。ビリヤードの形状の変化とエネルギー固有値の関係を総体的に捉えるには、スペクトルの統計的性質に注目するのが便利である。エネルギー E_i を小さい順にならべたときのエネルギー E_i までの累積個数を $N(E_i)$ とする。

Table 1 同心円 $d=0, R_0=1, R_i=0.4$ の固有振動数

3	5	31.7609983933
15	3	31.8143037967
26	0	31.8458872786
4	5	32.0350911226
22	1	32.2105871069
5	5	32.3850108439
12	4	32.4514164715
6	5	32.8090209632
19	2	32.8222206434
27	0	32.9111538050

エネルギー E_i の密度はエネルギーとともに異なるので、統計性には密度を一定にする必要がある。エネルギー E 迄の平均エネルギー準位数はワイルの公式から与えられる。

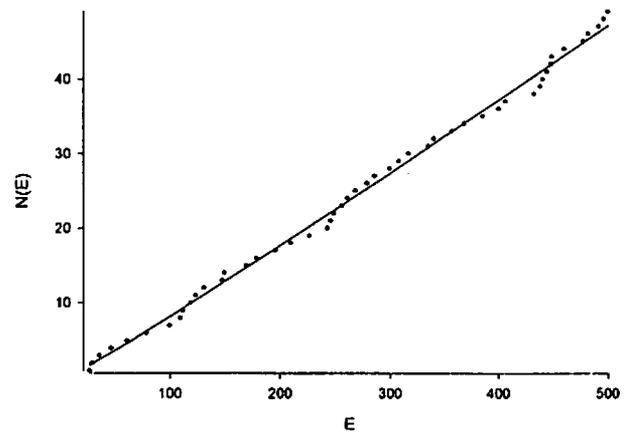


図 4 固有エネルギー E と $N(E)$ の関係 ($d=0$)、実線はワイルの式を表している。

エネルギー E 以下の平均の固有エネルギー数 $\bar{N}(E)$ は

$$\bar{N}(E) = \bar{N}_s + \bar{N}_a = \frac{1}{4\pi} (SE - L\sqrt{E} + C)$$

と与えられる。ここで S はビリヤードの領域 Ω の面積 $S = \pi(R_o^2 - R_i^2)$ であり、 L はこの領域を囲む周閉の長さ $L = 2\pi(R_o + R_i)$ 、 C は定数を表す。2 円の中心を結ぶ線に対して形状は対称であるから、この線に対称な固有状態 N_s と反対称な固有状態 N_a に分けられる。反対称な振動に対しては中心を結ぶ線上で $\Psi = 0$ であるから、ここに境界がある場合に対応する。したがって

$$\bar{N}_a = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{S}{2} E - L\sqrt{E} + C_a \right)$$

$$L' = \frac{L}{2} + 2(R_o - R_i)$$

であり、

$$N_s = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{S}{2} E - (L - L') \sqrt{E} + C_s \right)$$

ここで議論される形状の変化、内円のずれに対してはこの量は不変である。また C_A と C_S はグラフから π 、 3π を知るが、これは軌道のマスロフ指数に関する。

図 4 は $d = 0$ のときの 50 番目までのエネルギー準位と \bar{N}_s を表している。より高いエネルギー準位に対してもワイルの公式が非常に良くあてはまることが見出される。 $d = 0.4$ のときの 200 番目のエネルギー準位から 50 個の準位に対しては以下のようなものである。

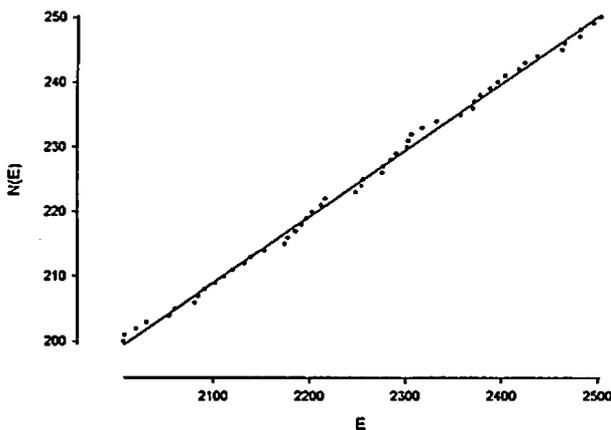


図 5 $d=0.4$ のときの対称振動に対する $N(E)$ vs E

5 エネルギー準位の統計

このワイルの公式を用いてエネルギースペクトルの間隔の分布などの統計的性質を議論しよう。スペクトルを $E_{i,\alpha} \mapsto \varepsilon_{i,\alpha}$ 、 $\varepsilon_{i,\alpha} = \bar{N}_\alpha(E_{i,\alpha})$

によって写像する (α は対称 s 、反対称 a を表す)。この写像はスペクトル $\{E_i\}$ をレベル密度が一様で近接レベル間の間隔の平均が 1 となるようなスペクトル $\{\varepsilon_i\}$ に変換する。中心のずれ d に対する古典力学系における軌道の相異がこのスペクトルにどのように反映されるかは、例えば隣接レベルの間隔

$$x_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$$

の分布 $p(x)$ に表れる。図 6、図 7 に $d = 0$ 、 $d = 0.4$ のときの分布 $p(x)$ が示されている量子スペクトルの間隔の分布には、古典系の積分可能系とカオスをもつような非積分系の間には普遍的な相異が存在する。前者はポアソン分布 $p(s) = \exp(-s)$ を、後者はウイグナー分布

$$p(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4}\right)$$

を示す。これは後者ではレベル間の反発によるものであり、カオス軌道の分岐などと密接な関係をもつことがしめされるが、波動関数と軌道との関係などの詳細に関する議論は次回にする。

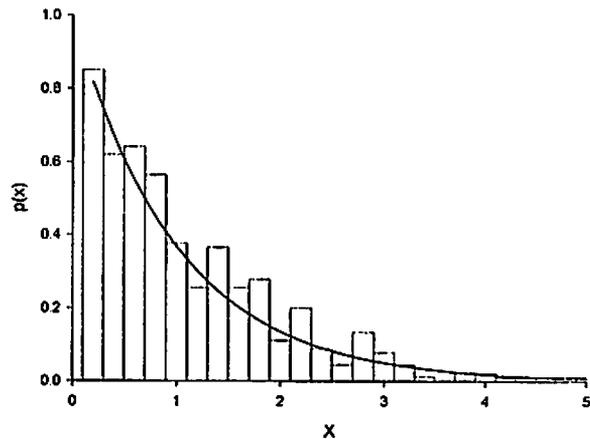


図 6 $d = 0$ のときの対称振動に対する間隔の分布 $P(x)$ 、レベル数は 430 個。実線はポアソン分布。

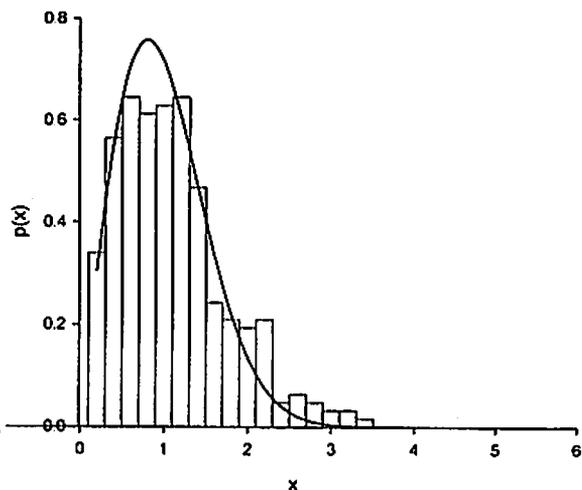


図 7 $d = 0.4$ 、対称振動の間隔分布。実線はウイグナー分布を表す。レベル数 310 個。

ピリアードの図示や波動の計算プログラムの作成を行った研究室の坂本隆、山田清己君に感謝する。

参考文献

1) N.Saito, H.Hirooka, J.Ford, F.Vivaldi, G.H.Walker. : Numerical Studies of Billiard Motion in Annulus Bounded by Non-Concentric Circles, Physica 5D, pp273-286, 1982.