グラフのArtin L-関数と符号理論

MATSUDA, Shuzo / HIRAMATSU, Toyokazu / 松田, 修三 / SAITO, Seiken / 平松, 豊一 / 斎藤, 正顕

(出版者 / Publisher)
法政大学工学部
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学工学部研究集報 / 法政大学工学部研究集報
(巻 / Volume)
43
(開始ページ / Start Page)
7
(終了ページ / End Page)
12
(発行年 / Year)
2007-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00003747

グラフのArtin L-関数と符号理論

斎藤正顕・松田修三・平松豊一

THE ARTIN L-FUNCTIONS OF GRAPHS AND CODING THEORY

Seiken SAITO, Shuzo MATSUDA and Toyokazu HIRAMATSU

グラフの Artin L-関数と符号理論

THE ARTIN L-FUNCTIONS OF GRAPHS AND CODING THEORY

斎藤正顕*, 松田修三**, 平松 豊一**
Seiken SAITO, Shuzo MATSUDA and Toyokazu HIRAMATSU

R. Koetter et al. show that pseudo-codewords of a cycle code are given as the exponential vectors of monomials which appear in the Taylor expansion of the edge zeta functions of the associated graph. On the other hand, as a generalization of edge zeta functions, the edge Artin L-functions are defined by H. M. Stark and A. Terras by using a graph covering Galois theory. In this paper, we study connections between pseudo-codewords of cycle codes and the edge Artin L-functions of graphs which define the cycle codes. In particular, we show that the lost psuedo-codewords by normal covering are appear as the exponential vectors of monomials of the product of the edge L-functions of the associated graph of cycle codes and graph coverings.

Key Words **:** *Cycle codes, psuedo-codewords, LDPC codes, edge Artin L-functions*

1. Introduction

本論文では, まず, H. M. Stark と A. Terras による有限グラフのゼータ関数及び Artin L-関数についての一連の論文 [7], [8], [9] における辺 Artin L-関数についての研究について survey し, 次に, グラフを使って定義される cycle codes の pseudo-codewords とグラフの辺ゼータ関数の関係について述べた R. Koetter et al. の論文 [5] を紹介し, グラフの辺 Artin L-関数と cycle codes の pseudo-codewords との関連を研究する.

2. 有限グラフの辺ゼータ関数

$X = (V, E)$ を連結な rank ≥ 1 で次数 1 の頂点をもたないグラフとする. 辺は有向で, 以下のように番号付けをする:

$$e_1, e_2, \ldots, e_n,\ e_{n+1} = e_1^{-1}, \ldots,\ e_{2n} = e_n^{-1}.$$

始点と終点を共有する辺の列

$$C = a_1 a_2 \cdots a_s, \quad (a_i \in \{e_1^{\pm 1}, \ldots, e_n^{\pm 1}\})$$

を path といい, $\nu(C) = s$ を長さという. a_1 の始点と a_s の終点が一致する path を cycle という. cycle C に対して, その同値類を $[C]$ と表す:

$$[C] := \{a_1 a_2 \cdots a_s,\ a_2 a_3 \cdots a_s a_1,\ \ldots,\ a_s a_1 \cdots a_{s-1}\}.$$

cycle $P = a_1 a_2 \cdots a_s$ が

- backtrackless とは $a_{i+1} \neq a_i$ $(\forall i)$,
- tailless とは $a_s \neq a_1^{-1}$,
- primitive とは $P = D^m$ となる $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ と path D がない,

ときをいい, 上の三つを満たす $[P]$ を prime という.
X の path $C = a_1 a_2 \cdots a_s$ に対し, 複素変数 $w_{a_i a_j}$ の単項式

$$N_E(C) := w_{a_1 a_2} w_{a_2 a_3} \cdots w_{a_{s-1} a_s} w_{a_s a_1}$$

を C の edge norm という.

定義 (Edge Zeta Function)

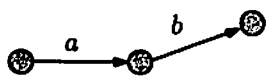
$$\zeta_E(w, X) := \prod_{[P]} (1 - N_E(P))^{-1}.$$

ここに $[P]$ は X の prime をわたる. 次に注意:

$$\zeta_E(w, X)|_{w_{ab} = u} = \zeta_V(u, X).$$

$2|E| \times 2|E|$ 行列 $W = (W_{ab})$ $(a, b \in \{e_1^{\pm 1}, \ldots, e_{|E|}^{\pm 1}\})$ の成分を次で定義する:

$$W_{ab} := \begin{cases} w_{ab} & a \neq b^{-1} \text{ かつ } a \text{ が } b \text{ に feed している}, \\ 0 & \text{それ以外}, \end{cases}$$



a が b に feed

*大学院システム工学専攻
**工学部

W は X の edge matrix と呼ばれる.

定理 (Determinant Formula)

$$\zeta_E(w,X)^{-1} = \det(I - W).$$

edge zeta 関数は X の向き付けによらず決まることに注意する.

3. グラフの被覆

(1) Graph Theoretic Galois Theory

以下, covering map は unramified とする.

- 有向グラフ Y が有向グラフ X の directed graph covering とは, Y の近傍から X の近傍へ向きを保って 1 対 1 に移す covering map $\pi : Y \to X$ が存在するときをいう.
- 無向グラフ Y が無向グラフ X の covering とは, X に任意に向き付けをした後, $\pi : Y \to X$ が directed covering となるような, Y の向き付けが可能なときをいう. X の covering Y は X の向き付けとは独立に定まることに注意する.
- Y が X の **d-sheeted covering** とは, $|\pi^{-1}(x)| = d$ $(\forall x \in X)$ のときをいう.
- Y が X の d-sheeted **normal** covering とは, $\pi \circ \sigma_i = \pi$ をみたす d 個のグラフ自己同型 $\sigma_i : Y \to Y$ $(i = 1, \ldots d)$ が存在するときをいう. このとき, 集合 $G(Y/X) := \{\sigma_1, \ldots, \sigma_d\}$ を Galois group という.
- $G(Y/X) \ni g$ は X の木の d 個のコピーの置換になっている. g による X の像 $g(X) =: (X, g)$ を sheet g という (Riemann 面の理論に倣っている).
- 群 $G(Y/X)$ は sheets 上可移である.
- $x \in X,\, g, h \in G(Y/X)$ に対し $g \circ (x, h) = (x, gh)$.

$Y/X, Y/\widetilde{X}$ かつ $\widetilde{X}/X$ (covering) のとき, $\widetilde{X}$ が Y/X の中間グラフ **(intermediate graph)** とは, $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ のときをいう. ここに, $\pi : Y \to X$, $\pi_2 : Y \to \widetilde{X}$, $\pi_1 : \widetilde{X} \to X$ は射影とする. normal covering 及び中間グラフの例は図 1 を参照せよ.

Y/X を Galois 群 G の unram. normal covering とし,

$$\begin{aligned} &\pi : Y \to X, \\ &\pi_2 : Y \to \widetilde{X}, \quad \pi_2' : Y \to \widetilde{X}', \\ &\pi_1 : \widetilde{X} \to X, \quad \pi_1' : \widetilde{X}' \to X, \end{aligned}$$

を（辺の向きを保った）射影とする. このとき graph 同型 $i : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ が存在して, $\pi_1 = \pi_1' \circ i$ ならば, $\widetilde{X}$ と $\widetilde{X}'$ は共役という (図 2). さらに $\pi_2' = i \circ \pi_2$ のとき, 中間グラフは同値と定義する: $\widetilde{X} \sim \widetilde{X}'$.

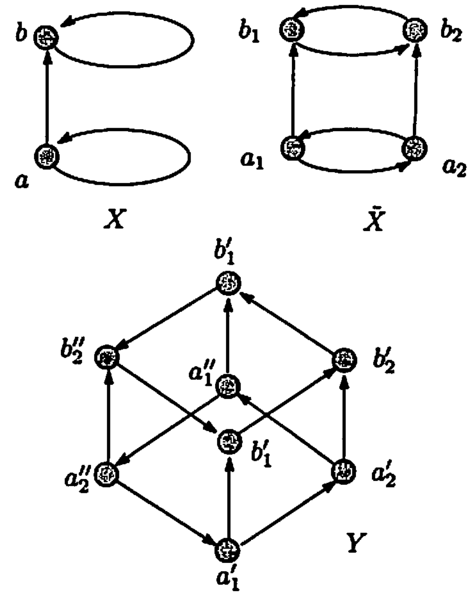


図 1: Y/X : C_4-cover,　$Y/\widetilde{X}$: C_2-cover

定理 (Galois の基本定理) Y/X を Galois 群 $G = G(Y/X)$ の unram. normal covering とする.

(1) G の部分群 H に対し $H = G(Y/\widetilde{X})$ となる中間グラフ $\widetilde{X}$ が存在する. これを $\widetilde{X}(H)$ とかく.

(2) $\widetilde{X}$ を Y/X の中間グラフとすると, G の部分群 $H = H(\widetilde{X})$ があって, $G(Y/\widetilde{X}) = H$ となる.

(3) Y/X の 2 つの中間グラフ $\widetilde{X}, \widetilde{X'}$ に対して,

$$\widetilde{X} \sim \widetilde{X'} \Longleftrightarrow H(\widetilde{X}) = H(\widetilde{X'}).$$

(4) $H(\widetilde{X}(H)) = H$, $\widetilde{X}(H(\widetilde{X})) = \widetilde{X}$ が成り立つ. i.e., $\widetilde{X} \leftrightarrow H$ (1 対 1).

(5) $\widetilde{X}_1 \leftrightarrow H_1$, $\widetilde{X}_2 \leftrightarrow H_2$ のとき

$$\widetilde{X}_1 \text{ が } Y/\widetilde{X}_2 \text{ の中間グラフである} \Longleftrightarrow H_1 \subset H_2.$$

定理　Y/X を Galois 群 G の normal covering とし, $\widetilde{X}$ を中間グラフとする. 射影 $\pi_1 : \widetilde{X} \to X$ により, $\widetilde{X}$ も X の covering になる. このとき,

$$\widetilde{X}/X \text{ が normal covering} \Longleftrightarrow H \text{ は } G \text{ の正規部分群}.$$

(2) Graph Theoretic Hibert Theory

d-sheeted normal covering Y/X $(\pi : Y \to X)$ において, $[D]$ を Y の prime とすると, $[\pi(D)]$ は backtrackless, tailless であるが, 一般に primitive ではない.

$$\pi(D) = C^f, \quad ([C] \text{ は } X \text{ の prime})$$

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[dr, "\pi_2'"] & \\ \widetilde{X} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \widetilde{X}' \arrow[dl, "\pi_1'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

図 2: グラフの共役と同値

のとき, $[D]$ は $[C]$ 上の prime といい, f を Y/X に関する $[D]$ の剰余次数 (residual degree) という.

$[C]$ 上 Y の prime $[D]$ の個数を g とすると,

$fg = d$ （Y/X は unram. covering より $e=1$ に注意）

が成り立つ.

また $\sigma \in G(Y/X)$ に対し, $[\sigma \circ D]$ を $[C]$ 上 $[D]$ と共役な prime という.

Y/X : unram. normal d-sheeted covering, $G(Y/X) = G$ とする.

X の path p に対して, 始点が sheet 1 上にあるような lifting $\widetilde{p}$ が一意的に存在する. このとき, $\widetilde{p}$ の終点が sheet γ 上にあるとき, **normalized Frobenius 自己同型写像** $\sigma(p) \in G$ を $\sigma(p) := \gamma$ と定義する.

C を X の prime とし, 始点 (終点) を a とする. D を C 上 Y の prime とし, (a, μ) をその始点 (終点) とする. C の π^{-1} による lifting を $\widetilde{C}$ とすると, path $\widetilde{C}$ の始点は (a, μ) で, その終点を (a, ν) とする. このとき, **Frobenius 自己同型写像を**

$$[Y/X, [D]] = [Y/X, D] = \nu\mu^{-1}$$

で定義する. $[Y/X, [D]]$ は同値類 $[D]$ の代表元 D の選び方によらないことに注意する.

命題 (Frobenius 写像の性質)

- $[Y/X, D]$ の位数は f.
- $\tau \in G$ に対し, $[Y/X, \tau \circ D] = \tau [Y/X, D] \tau^{-1}$.
- $Z(D) := \{\tau \in G : [\tau \circ D] = [D]\}$ を D の Y/X に関する分解群という. 次が成り立つ:

$$Z(D) = \langle [Y/X, D] \rangle .$$

4. 有限グラフの辺 Artin L-関数

定義 (Edge L-Function)　Y/X を normal unram. covering, $G(Y/X) = G$, $\rho : G \to \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ を $d = d_\rho$ 次複素表現とする. $w_{a,b}$ $(a, b \in E \cup E^{-1})$ を複素変数とし $|w_{a,b}|$ が十分小さいとき

$$L_E(w, \rho, Y/X) := L_E(w, \rho)$$

$$:= \prod_{[C]} \det\left(I - \rho([Y/X, [D]])\, N_E(C)\right)^{-1},$$

ここに, 積は X 上の prime $[C]$ をわたり, $[D]$ は $[C]$ 上の任意の (Y の) prime とする. また, $N_E(C)$ は C の edge norm とする.

定理 ($L_E(w, \rho, Y/X)$ の計算)　表現 ρ の次数を d とし, block form で書かれているとする. W_ρ を以下で定義される $2|E|d$ 次正方行列とする:

$$W_\rho := \left(w_{ij} \cdot \rho(\sigma(e_i)) \right)_{e_i, e_j \in E \cup E^{-1}}$$

(ここに $\sigma(p)$ は normalized Frobenius 自己同型写像). このとき,

$$L_E(w, \rho, Y/X) = \det(I - W_\rho)^{-1}.$$

ここに, I は $2|E|d$ 次単位行列とする.

定理 (spec. edge zeta の分解)　unram. covering Y/X に対し, $\widetilde{W}$, W を対応する edge matrix とする. Y の辺 $\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j \in \widetilde{E} \cup \widetilde{E}^{-1}$ に対応する $\widetilde{W}$ の成分が $\widetilde{w}_{ij}$ のとき, それに w_{ij} を代入した行列を W_{spec} とする:

$$W_{spec} := \widetilde{W}|_{\widetilde{w}_{ij} = w_{ij}}$$

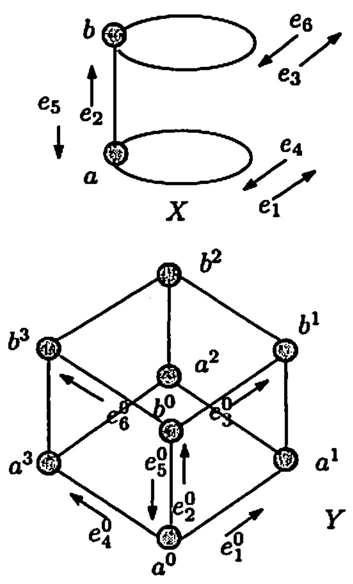
すると, Y/X が normal のとき,

$$\zeta_E(\widetilde{w}, Y)|_{\widetilde{w}_{ij} = w_{ij}} = \det(I - W_{spec})^{-1}$$

$$= \prod_{\rho \in \hat{G}} L_E(w, \rho, Y/X)^{d_\rho},$$

ここに $\hat{G}$ は G の既約ユニタリ表現類全体とする.

例



上で Y/X は 次を Galois 群にもつ 4-sheeted normal cover である:

$$G = G(Y/X) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}.$$

normalized Frobenius 自己同型は,

$$\sigma(e_1) = \bar{1}, \quad \sigma(e_2) = \bar{0}, \quad \sigma(e_3) = \bar{1},$$
$$\sigma(e_4) = \bar{3}, \quad \sigma(e_5) = \bar{0}, \quad \sigma(e_6) = \bar{3}.$$

G の既約ユニタリ表現は, 全て 1 次元で,

$$\chi_a(b) = i^{ab} \quad (a, b \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}).$$

よって付随する Artin L-関数は次のようになる:

$$L_E(w, \chi_j, Y/X)^{-1} = \det(I - W_{\chi_j}) \quad (j = 0, 1, 2, 3).$$

ここに,

$$W_{\chi_0} = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{23} & 0 & 0 & w_{26} \\ 0 & 0 & w_{33} & 0 & w_{35} & 0 \\ 0 & w_{42} & 0 & w_{44} & 0 & 0 \\ w_{51} & 0 & 0 & w_{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{65} & w_{66} \end{vmatrix},$$

$$W_{\chi_1} = \begin{vmatrix} iw_{11} & iw_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{23} & 0 & 0 & w_{26} \\ 0 & 0 & iw_{33} & 0 & iw_{35} & 0 \\ 0 & -iw_{42} & 0 & -iw_{44} & 0 & 0 \\ w_{51} & 0 & 0 & w_{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -iw_{65} & -iw_{66} \end{vmatrix},$$

$$W_{\chi_2} = \begin{vmatrix} -w_{11} & -w_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{23} & 0 & 0 & w_{26} \\ 0 & 0 & -w_{33} & 0 & -w_{35} & 0 \\ 0 & -w_{42} & 0 & -w_{44} & 0 & 0 \\ w_{51} & 0 & 0 & w_{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -w_{65} & -w_{66} \end{vmatrix},$$

$$W_{\chi_3} = \begin{vmatrix} -iw_{11} & -iw_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{23} & 0 & 0 & w_{26} \\ 0 & 0 & -iw_{33} & 0 & -iw_{35} & 0 \\ 0 & iw_{42} & 0 & iw_{44} & 0 & 0 \\ w_{51} & 0 & 0 & w_{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & iw_{65} & iw_{66} \end{vmatrix}.$$

5. Cycle codes の擬符号語と Artin L-関数

(1) Cycle codes

graph $X = (P, E)$ ($|E| = n$) の cycle code とは, 次で定義される $\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間である:

$$C_X := span\{char(\Gamma) : \Gamma = a_1 a_2 \cdots a_s \text{ は } X \text{ の単純 cycle}\}.$$

ここに, n 次元ベクトル $char(\Gamma) = (c_1, \ldots, c_n)$ は次で定義され, cycle Γ に対する特性ベクトルと呼ばれる:

$$c_i := \begin{cases} 1, & e_i \text{ が } \Gamma \text{ に含まれるとき}, \\ 0, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

注意 cycle が単純 (simple) とは, 自己交差しない, 即ちその cycle 上の頂点が高々二辺に共有されるときをいう.

X の各辺 e_j 上に始点 $i(e_j)$ 終点 $t(e_j)$ と異なる頂点 q_j をとって出来る 2 部グラフを $T(X)$ とおく. つまり $T(X)$ は, 二つの頂点集合 P 及び $Q := \{q_j : j = 1, \ldots, |E|\}$ と辺集合 $E_T := \{(i(e_j), t(e_j)) : e_j \in E\}$ から定義されるグラフとする. $T(X)$ の作り方から頂点集合 Q の各元 q_j に対しその次数は 2 であることに注意する. 従って, X の辺 e_j と $T(X)$ の頂点 q_j は一対一に対応するので, 以降同一視する. すなわち, $T(X)$ は頂点集合 P, E と辺集合 E_T からなる 2 部グラフとする (図 3 参照).

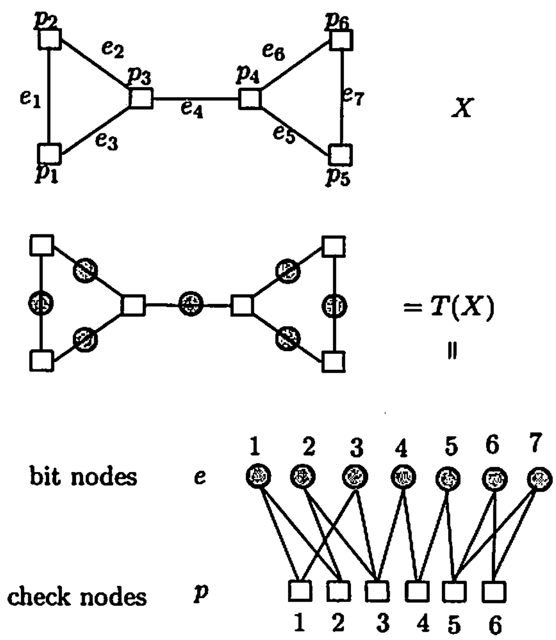


図 3: X と $T(X)$

$T(X)$ を $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ を変数ノード (variable nodes), X の頂点集合 $P = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$ をチェックノード (check nodes) とする 2 部グラフとみるとき, cycle code C_X は Tanner graph $T(X)$ により定義される (LDPC)

符号になる．$T(X)$ により定義される C_X の検査行列を H_X とかく．また, $T(X)$ に対し, もとの X をその **normal graph** という ([1]). どの変数ノードの次数も 2 である Tanner graph T から変数ノードを辺とみなした (normalize) 新しいグラフを X とするとき, T で定義される符号 は cycle code C_X となる ([5]).

グラフ X とその cycle code C_X のパラメータの対応を以下の表にまとめておく：

C_X	$X=(P,E)$
長さ n	辺の個数 $\|E\|$
検査行列 H_X	(無向 graph の) 接続行列
最小 Hamming 距離 d	最短の cycle の長さ (girth)

また, X が平面 (planar) グラフ ならば, Whitney の定理 ([3] Theorem 4.6.3) より,

$$C_{X^\perp} = (C_X)^\perp$$

が成り立つ．ここに, $X^\perp$ は X の双対グラフ, $C^\perp$ は線形符号 C の双対符号とする．

また, MacLane による定理 ([3] Theorem 4.5.1) より,

$$X \text{ が平面的} \Longleftrightarrow \mathcal{C}(X) = C_X.$$

ここに, $\mathcal{C}(X)$ は, X の cycle space とする．

注 一般のグラフ X に対しては, C_X は $\mathcal{C}(X)$ の部分空間である．

よって, X が平面的ならば, [3] Theorem 1.9.6 より,

$$k = r = |E| - |P| + 1$$

である．ここに, $k := \dim C_X$ は C_X の情報 bit 数, r は X の基本群の rank である．

さて, M を正整数とし, グラフの (normal とは限らない) unramified covering の列

$$Y = X_n/\cdots/X_1/X_0 = X,$$
$$(X_{i+1}/X_i \text{ は unram. } M_i\text{-sheeted cover})$$

に対し, Galois の基本定理より (graph 自己同型の不定性を除き) 対応する subgroup の列

$$\{1\} = H_n \subset \cdots \subset H_1 \subset H_0 = G$$

があり, (成分の並べ替えの不定性を除き) 対応する cycle code の列

$$C_Y = C_{X_n}, \ldots, C_{X_1}, C_{X_0} = C_X$$

がある．

(2) Cycle codes の擬符号語

定理 (pseudo-codeword $\omega(\tilde{c})$) Y/X を (normal とは限らない) M-sheeted cover とする．対応する長さ n, Mn の cycle code を C_X, C_Y とする．符号語

$$C_Y \ni \tilde{c} = (\tilde{c}_{1,1}, \ldots, \tilde{c}_{1,M}; \tilde{c}_{2,1}, \ldots, \tilde{c}_{2,M}; \ldots; \tilde{c}_{M,1}, \ldots, \tilde{c}_{n,M})$$

に対し, $\tilde{c}$ に付随する **擬符号語 (pseudo-codeword)**

$$\omega(\tilde{c}) := (\omega_1(\tilde{c}), \omega_2(\tilde{c}), \ldots, \omega_n(\tilde{c})) \in \mathbb{Q}^n$$

とは各成分が次の和で定義される有理数体上のベクトルである：

$$\omega_i(\tilde{c}) := \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \tilde{c}_{i,j} \in \mathbb{Q}.$$

$M\omega(\tilde{c})$ を $\tilde{c}$ に付随する **unscaled pseudo codeword** という．

定義 (基本錐 $K(H)$) C_X を cycle code とし, $H = H_X$ をその検査行列とする．I を H の列番号全体 ($\leftrightarrow$ 変数ノード全体 $\leftrightarrow E$), J を H の行番号全体 ($\leftrightarrow$ チェックノード全体 $\leftrightarrow P$) とする．$j \in J$ に対し, I_j をチェックノード p_j に接続している変数ノード e_i の番号全体とする．H の **基本錐 (fundamental cone)** $K(H)$ とは次の条件をみたすベクトル $\omega \in \mathbb{R}^n$ 全体:

- ω の各成分は非負: $\forall i \in I$, $\omega_i \geq 0$.
- $\forall j \in J$, $\forall i \in I_j$, $\omega_i \leq \sum_{i' \in I_j \setminus \{i\}} \omega_{i'}$

i.e., 各チェックノード p_j とそれにリンクする各変数ノード $e_i \in I_j$ に対して,

(e_i に格納されている符号シンボル値)
$\leq$
(e_i を除いた p_j の周りのシンボル値の和)

(lift of C) $\subset K(H)$ に注意する．

$K(H)$ の性質として次が知られている:

- 基本錐 $K(H)$ の中には C の pseudo-codeword (の正数倍) が稠密に存在する．
- $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in K(H) \cap \mathbb{Z}^n$ が C の unscaled pseudo-codeword であるための必要十分条件は

$$H\omega^t = 0 \quad \text{in } \mathbb{Z}^n.$$

(3) 擬符号語 と Zeta 関数, L-関数の関係

定理 C_X を cycle code, H_X をその検査行列, n を X

の辺の個数とする. $\zeta_E(w,X)=\zeta_E(w_1,\ldots,w_n;X)$ を X の edge zeta function とすると,

$$\text{単項式 } w^{\omega}:=w_1^{\omega_1}\cdots w_n^{\omega_n} \text{ が } \zeta_E \text{ に現れる}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l}(\omega_1,\ldots,\omega_n) \text{ が } C_X \text{ のある } M\text{-cover の}\\ \text{unscaled pseudo-codeword.}\end{array}$$

また, ζ_E の Taylor 展開に現れる単項式の exponent vector によって張られる Newton 多面体は C_X の基本錐 $K(H_X)$ に等しい.

C_X の unscaled pseudo-codeword 全体を U_X とおく. Y/X を M-sheeted cover とし, $\pi:Y\to X$ を covering map とする.

$$\begin{aligned} U_Y \ni \omega &= (\omega_1,\ldots,\omega_{nM})\\ &= (\omega_{1,1},\ldots,\omega_{1,n};\ldots;\omega_{M,1},\ldots,\omega_{M,n}) \end{aligned}$$

に対し, $\pi':U_Y\to U_X$ を次で定義する:

$$\pi'(\omega):=(\sum_{i=1}^{M}\omega_{1,n},\ldots,\sum_{i=1}^{M}\omega_{M,n})$$

とする. つまり, U_Y の元の "射影化"により U_X の元が得られる. $\pi(U_Y)\subset U_X$ が成り立つことに注意する. 以上のことから我々は次を得た:

定理 (主結果)　X の辺の個数を n とし, Y/X $(\pi:Y\to X)$ を normal M-sheeted covering, $G(Y/X)=G$ とする. $\omega\in U_X-\pi'(U_Y)\Longleftrightarrow$ 単項式 w^{ω} が

$$\prod_{1\neq\rho\in\hat{G}} L_E(w,\rho,Y/X)^{d_\rho}=\frac{\det(I_{2n}-W_1)}{\det(I_{2Mn}-W_{spec})}$$

の Taylor 展開に現れる.

証明 (スケッチ) $\pi'(\omega)\in\pi'(U_Y)$ となるための必要十分条件は, $\zeta_E(\widetilde{w},Y)|_{\widetilde{w}_{ij}=w_{ij}}$ に単項式 $w^{\pi'(\omega)}$ が現れることである. これと, $\zeta_E(\widetilde{w},Y)|_{\widetilde{w}_{ij}=w_{ij}}$ の determinant formula, L_E の積への分解,

$$L_E(w,1,Y/X)=\zeta_E(w,X)$$

により主張をえる. ■

上の定理の意味は, M-sheeted covering Y/X をとると, Y の unscaled pseudo codeword を π' で写したものは X の unscaled psuedo codeword になるので, この covering によって codeword の候補である pseudo codewrod が減ることになる. このとき, covering が normal ならば, この covering により失われる unscaled pseudo codeword がグラフの辺 Artin L-関数の積によって記述されることを示している. 更に, それらは具体的に行列式の商として計算することが可能である.

6. 補追

命題 (2 部グラフの cycle code の重さ)　X が 2 部グラフのとき, C_X の任意の符号語の重さは偶数である.

証明 [3] Prop. 1.6.1 より, 2 部グラフは長さが奇数の cycle を持たない. ゆえに, C_X の基底はすべて偶重みである. よって符号語も偶重みとなる. ■

参考文献

[1] G.D. Forney, Jr., *Codes on graphs: normal realizations*, IEEE. trans. on inform. theory, vol. 47 (2001), no.2, pp.520-548.

[2] S.L.Hakimi and J.Bredeson, *Graph-theoretic error correcting codes*, IEEE. trans. on inform. theory, vol. IT-14 (1968), no.4, pp. 584-591.

[3] R. Diestel, Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics **173**, Springer-Verlag New York, 1997.

[4] M. D. Horton, H. M. Stark and A. A. Terras, *What are zeta functions of graphs and what are they good for ?*, preprint.

[5] R. Koetter, C.W. Li, P.O. Vontobel and J.L. Walker, *Pseudo-codewords of cycle codes via zeta functions*, (San Antonio, TX, USA), 2004, pp. 7-12.

[6] R. Koetter and P.O. Vontobel, *Graph covers and iterative decording of finite-length codes*, in Proc. 3rd Intern. Conf. on Turbo Codes and Related Topics, (Brest, France), pp. 75-82, Sept. 1-5 2003.

[7] H. M. Stark and A. A. Terras, *Zeta functions of finite graphs and coverings*, Advances in Math., **121** (1996), 124-165.

[8] H. M. Stark and A. A. Terras, *Zeta functions of finite graphs and coverings II*, Advances in Math., **154** (2000), 132-195.

[9] H. M. Stark and A. A. Terras, *Zeta functions of finite graphs and coverings III*, preprint.