

段違い平行棒運動ロボットの研究

関, 隆行 / SEKI, Takayuki

(発行年 / Year)

2008-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2008-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

2007 年度 修士論文

段違い平行棒運動ロボットの研究

A STUDY OF UNEVEN BAR GYMNAST ROBOT

指導教官 高島 俊 教授

法政大学大学院工学研究科

機械工学専攻 修士課程

06R1123 関 セキ 隆行 タカユキ

目次

第1章 序論	1
第2章 本研究について	3
2.1 本研究の目的	3
2.2 本研究の特徴	4
2.3 本研究全体の流れ	6
2.4 本論文の構成	7
第3章 段違い平行棒運動について	8
3.1 はじめに	8
3.2 運動内容	8
3.3 器械の構造	13
3.4 段違い平行棒の握り方	14
3.5 おわりに	15
第4章 段違い平行棒運動ロボットのモデル	16
4.1 はじめに	16
4.2 モデルの構築	16
4.3 剛体3リンクモデルの運動方程式	20
4.4 剛体3リンクモデルのパラメータ設定	24
4.5 シミュレーションに用いる段違い平行棒の高さ・位置設定	25
4.6 おわりに	26
第5章 鉄棒間移動実現条件	27
5.1 はじめに	27
5.2 鉄棒把持可能姿勢および合成重心位置	27
5.3 合成重心軌道と滞空時間の関係	30
5.3.1 飛出合成重心速度	30
5.3.2 滞空時間の算出	33

5.4 技および演技構成による飛付時合成重心範囲の制限.....	36
5.5 移動実現条件.....	39
5.6 おわりに.....	40
第6章 空中姿勢制御.....	41
6.1 はじめに.....	41
6.2 空中姿勢制御問題の定式化.....	41
6.3 角運動量保存則.....	43
6.4 姿勢角の定義.....	45
6.5 慣性モーメント変化と宙返りによる回転量の関係.....	50
6.6 制御可能回転量範囲.....	51
6.7 目標関節軌道生成法.....	53
6.7.1 評価関数.....	53
6.7.2 チェビシェフ多項式による関節軌道の近似.....	56
6.7.3 境界条件を満たす正規直交基底係数の決定法.....	57
6.7.4 目標関節軌道生成法の有効性.....	59
6.8 おわりに.....	66
第7章 コンピュータシミュレーションによる検証.....	67
7.1 はじめに.....	67
7.2 シミュレーション方法.....	67
7.3 シミュレーションの流れ.....	68
7.4 制御系設計.....	70
7.4.1 PD 制御系.....	70
7.4.2 計算トルク法.....	71
7.5 シミュレーション結果.....	73
7.5.1 鉄棒間移動実現条件の判別と関節軌道生成結果.....	73
7.5.2 シミュレーション結果および考察.....	73
7.6 おわりに.....	85
第8章 結論.....	86
8.1 本研究の成果.....	86
8.2 今後の課題.....	87
謝辞.....	88

発表論文	89
参考文献	90
付録	93
付録 A . 3リンクモデルのラグランジュ法による運動方程式の導出.....	93
付録 B . 角運動量保存則.....	106
付録 C . 合成重心まわりの慣性モーメントと関節軌道の関係.....	108
付録 D . チェビシェフ多項式.....	110
付録 E . Interactive Physics について	112
主な概要	112
アプリケーション間の通信機能.....	112
データのエクスポート.....	112
入出力ツール	113
グローバルフォース.....	113
単位系の制御	113
式言語	113
付録 F . MATLAB ソースプログラム	114

第1章 序論

現在、様々な機能を持った機械が日常にあふれている。そんな中で「ロボット」という言葉を聞いて人々は何を想像するだろうか。もともと「ロボット」は1920年に作家カレル・チャペックによって生み出された。その後、SFの中でロボットは人間のような形をして、人間の命令に従うというイメージが作られた。現代の人々も同じように人型を想像するのではないだろうか。

ロボットは、様々な工学分野において研究が行われ、様々な用途に適したロボットが開発されてきた。工場・建設・医療など整備されている限られた環境で使用されるロボットから、レスキュー現場・宇宙・海洋・原子力など、人間の手が及ぶことのできない環境で使用されるロボットなどである。特に産業ロボットの研究・開発では、多くのロボットが実用化され、ロボティクスの発展に大いに貢献しているといえる。これらのロボットは、無駄な機能を省かれたロボットが主流であり、人間の指令に従い、ある目的のための機能や性能を追求し、高機能・高性能化が実現されている。

しかし、近年は、産業用ロボットのように、人間の生活環境からかけ離れた環境で、ある1つの目的を実現するロボットの研究とは別に、日本の少子高齢化の影響もあり、人間社会のあらゆる局面での利用が期待されるロボットの研究・開発が盛んに進められている。特に、多くの研究機関でヒューマノイドロボットについての研究が盛んに行われている。今現在においては、本田技研工業株式会社が開発した「ASIMO」や独立行政法人 産業技術総合研究所が開発した「HRP」等をはじめとした、ヒューマノイドロボットがメディアなどの表舞台に立ち、話題を呼んでいる。こうしたヒューマノイドロボットを作るということは、人類が長らく夢見てきた未来の科学技術の一つであり、ロボットの研究が進めば、介護ロボットやお手伝いロボットなど、人間の生活環境に入ってくるロボットが開発され、人間とロボットの協調社会が実現されるはずである。

このような期待のもと、「ロボット＝実用」が絶対のように論じられることがあるが、SONYが販売した、AIによって制御され、20個の関節をもち、人間と簡単なコミュニケーションをとることができる「AIBO」のように、それまでマーケットとしては、成り立つかが未知であったアミューズメント性をもったロボットの未来が開けている現状もある。このため、エンタテインメントロボットに着手したメーカーも増えてきている。このように、今後は人間社会での感性といった分野や、人間と共存することによる新たな課題、文化の違いによる問

題など新たな分野への展開もみられるだろう。

人間の行う特殊な運動を模したエンタテインメント・アミューズメントロボットの開発では、投球、スキー、ゴルフスイング、鉄棒運動やトランポリン運動のスポーツにおける動作を実現するロボットや、楽器を演奏するロボット、人間のように声を発生するロボットなど多種多様である。これらのロボットの研究の目的は、アミューズメント性に加え、複雑な人間や動物の運動をロボットによって実現させることにより、人間および動物の動作原理、必要な物理量と運動の制御手法を見出し、その工学的応用を可能にすることでもある。

本研究では、人間の行う特殊な運動であり、高度かつ熟練を必要とする人間の動作を研究の対象にしているものであり、運動学の意味において鉄棒運動の拡大であると考えられる段違い平行棒運動を取り上げている。段違い平行棒演技は、2本の鉄棒間を移動するために、空中局面での運動が必要である。空中局面での姿勢制御と、空中に固定された2点間の移動を実現することができ、過去に行われた鉄棒運動における振動運動、倒立動作や回転運動の研究成果と融合することができれば、これまで以上にアミューズメント性をもったロボットを開発することができると考えている。

また、段違い平行棒運動の飛び移り動作は、ブラキエーション運動のように、空中での移動に手段として、応用することが可能であろう。そして、器械体操にみられる自由落下中の空中姿勢問題は、角運動量保存則に支配された運動であり、非駆動関節を有するアクロボットの運動であるため、宇宙空間用ロボットマニピュレータの無重力空間における姿勢制御と同様な問題をもっている。したがって、段違い平行棒運動ロボットについて研究することは、アミューズメント性を増すと共に、今後のロボットの開発に対して貢献できるものであり、その価値は大いに見出せるだろう。

第2章 本研究について

2.1 本研究の目的

本研究は、女子の体操競技である段違い平行棒運動を対象として、人間が演技を行っている際の回転運動や振動運動や空中動作を解析し、段違い平行棒運動のような空中に固定されたバーに対しての運動においても、自由かつスムーズな運動を可能とするロボットの開発、および車輪などの回転運動や振動動作などに加え、空中局面での宙返り、ひねり動作や着地動作などの、人間でも熟練を必要とする高度な運動が可能なアミューズメント性を持った運動ロボットの開発を目的とする研究である。器械体操は、日常生活で行っているような運動と比べると、長期にわたる練習が絶対であり、人間の行える究極な動作の1つであると考えられる。

鉄棒運動と段違い平行棒運動の運動を比較すると、段違い平行棒運動の大きな特徴は、空中に固定された2本の鉄棒間を自由に移動し、演技を構成する点である。これまでの鉄棒運動に関する研究では、3リンクロボットに対して、鉄棒を握った状態での、振り出し動作、け上がり動作、あふり動作、車輪動作、や浮支持回転、浮腰支持回転、足裏支持回転等、そして倒立動作などについての研究がなされ、ロボットでこれらの運動が実現されてきた。しかしながら、段違い平行棒演技には、2本の鉄棒間を移動するための空中局面での運動が必要とされるが、この運動に向けての研究はまだなされていない。

そこで、本研究では、空中局面において宙返りを行う移動技を実現するための空中姿勢制御手法を確立し、鉄棒運動の制御手法との融合により、アミューズメント性を持ったロボットを開発することを目指すものである。

2.2 本研究の特徴

これまで高度で熟練を必要とする鉄棒運動に関する研究では、手先がバーから離れない回転運動、振動運動や倒立動作¹⁾²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾から、男子の鉄棒競技で行われるバーに再び戻る宙返り⁶⁾⁷⁾やコバチ(後方2回宙返り懸垂)⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾、着地動作¹¹⁾といった空中演技についての姿勢制御についての研究が行われてきた。これらの空中運動に関する研究は、系全体として角運動量が保存され、非ホロノミックな拘束条件下での姿勢制御問題となる。このため、近年鉄棒運動の空中姿勢制御に限らず、フリーフライングロボットの運動制御に関する研究が盛んに行われている。例えば、トランポリン運動における宙返りに関する研究¹²⁾、エアリアルスキーロボットを用いた研究¹³⁾¹⁴⁾¹⁵⁾¹⁶⁾¹⁷⁾¹⁸⁾、ねこひねりに関する研究、飛び込みに関する研究、宇宙ロボットの研究などである。しかし、これらの空中運動に関する研究は、空中に固定されたある支点到に制御対象が確実に移動するような位置の拘束条件も考慮しての議論がなされている研究ではない。

空中に固定された異なる支点到に移動する運動に関する研究についていえば、連続ブラキエーション¹⁹⁾²⁰⁾についての研究が行われている。しかし、ブラキエーション運動は、手先位置を拘束条件としての運動計画問題となるが、空中局面を伴わず、角運動量保存による非ホロノミックな拘束条件における運動計画問題ではない。

したがって、段違い平行棒運動における動作は、上記の研究で用いられている動作とは異なる2つの要素がある。1つ目は、段違いに並行に設置された2本のバーから構成される器械を使用するため、空中に固定された2点間の移動という、強い拘束を持った運動が必要なことである。2つ目は、非ホロノミックな拘束となる角運動量保存則をシステムの拘束条件として、目標とする初期姿勢・最終姿勢、および目標とする宙返り回転量を実現し、バーからロボットが落下しないようにするために、姿勢制御が厳密に行われる必要があることである。

そこで、本研究では新たな空中姿勢制御手法の提案を行う。具体的には、まず段違い平行棒運動ロボットを運動の特性から演技を十分表現できる剛体3リンクでモデル化する。鉄棒を確実に把持するためには、姿勢とその姿勢から導出される系の合成重心位置が問題となる。また、空中に飛び出し、空中動作後(滞空時間後)にバーを確実に把持することができる範囲に合成重心が到達するためには、バー離脱時の合成重心速度も問題となる。そこで、鉄棒間の移動を実現するための移動実現条件を示した。空中姿勢制御においては、合成重心まわりの慣性モーメントを操作して姿勢制御し、適切な姿勢でバーに到達するための空中姿勢方法を提案する。合成重心まわりの慣性モーメント変化の時間

関数の逆数の時間積分値が，系全体の回転量と角運動量の商に等しくなる．また，合成重心まわりの慣性モーメント変化の時間関数は，関節角の時間関数から与えられる．このことから，合成重心まわりの慣性モーメント変化の時間関数の逆数の時間積分値が系全体の回転量と角運動量の商に等しくなる関節角の時間関数を導出し，この時間関数に関節角を追従させる制御手法を考える．しかし，ロボットモデルが2関節を有するため，系全体の宙返り角と角運動量の商の値を満たす関節角の時間関数を解析的に一意に決定することができない．そのため，関節角に同相運動拘束・逆相運動拘束を与え，解析的に導出することがあるが，本研究では人間の自由な動きを再現するために，関節角に拘束条件は与えない手法を考える．関節角の時間関数を有限次元の正規直交基底の一次結合で近似し，商の値との誤差を最小にするように設定した評価関数を最小にし，かつ境界条件を満たすような正規直交基底係数を導出する最小化問題として扱う手法で生成する．本研究では，正規直交基底としてチェビシェフの多項式を用いている．また，評価関数を最小にする正規直交基底係数の探索には，準ニュートン法（BFGS法）を適用する．

本報告では，これらの提案する制御手法の有効性を検証するため，高棒内向き懸垂 - 後方宙返り下移動 - 低棒浮支持（パク宙返りと呼ばれ，高棒から低棒へ移動する空中局面で宙返りを行う技）で，剛体3リンク段違い平行棒運動ロボットモデルに対してコンピュータシミュレーションを行った．

2.3 本研究全体の流れ

本研究の全体の流れとしては、以下のようにになっている。(Fig.2-1)
 本論文での実施事項は、破線で囲まれた部分である。

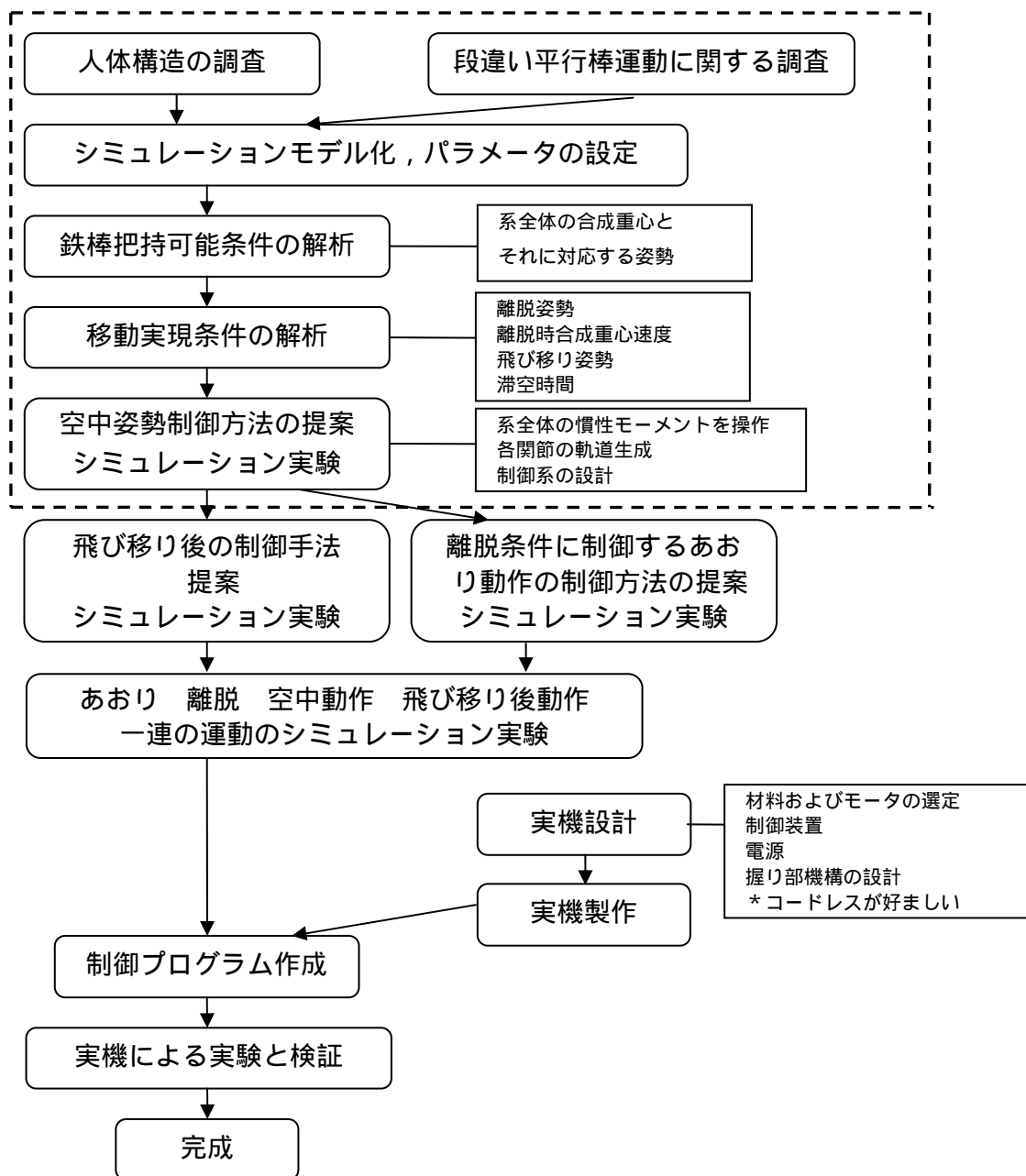


Fig.2-1 A flow of a study of uneven bar gymnast robot

2.4 本論文の構成

本論文では、まず段違い平行棒演技に関する調査を行い、演技内容を把握した。次に、段違い平行棒運動ロボットを剛体3リンクでモデル化し、鉄棒を把持することが可能な、鉄棒把持時の姿勢と合成重心位置との関係を示した。そして、このモデルに対して、鉄棒間の移動を実現するための移動実現条件を示した。さらに、合成重心まわりの慣性モーメントを操作して空中局面の姿勢を制御する空中姿勢制御手法の提案を行い、コンピュータシミュレーションにより、提案する制御手法の有効性を検証する。

まず、第3章において、本研究の対象運動である段違い平行棒演技の運動内容・ルール・器械の構成について述べる。得られた調査内容をもとに、本論文では運動の解析、ロボットにより運動を実現させるためのモデル化・目標軌道の生成・空中姿勢制御手法の提案を行う。

次に、第4章では段違い平行棒運動ロボットのモデルを構築し、運動方程式を導出する。このモデルに対して、運動解析、姿勢制御手法の検討を行う。

第5章では、ロボットモデルに対して、バーを確実に把持することができる姿勢と合成重心位置範囲を示し、ロボットがバーから飛び出し、空中動作後にこの範囲に到達するための鉄棒間移動実現条件を示す。

そして、第6章では、空中局面において決められた宙返り回転量を実現し、目標とする姿勢でバーに飛びつくための空中姿勢制御手法の提案を行う。空中でのロボットの運動は角運動量が保存され、非ホロノミックな拘束条件下で運動を行う。そこで、合成重心まわりの慣性モーメントを操作して姿勢を制御する手法を提案する。

最後に、第7章で提案する空中姿勢制御手法の有効性を検証するため、ロボットに実現させる目標演技を「高棒内向き懸垂 - 後方宙返り下移動 - 低棒浮支持」とし、コンピュータシミュレーションを行った結果を報告する。

第3章 段違い平行棒運動について

3.1 はじめに

段違い平行棒運動を実現するロボットの開発において、ロボットへの入力値を設定し、コンピュータシミュレーション、実機設計・製作やロボットでの実験を行っていくときに、実際に人間が段違い平行棒運動をどのようにして行っているかを視覚的に捉え、分析していくことは非常に重要になってくる。そのため、段違い平行棒運動の動作を分析していくには、段違い平行棒運動の動作を理解しなければならない。そこで本章では、段違い平行棒の運動内容および器械の構造について示すことにする。

3.2 運動内容

段違い平行棒運動は、鉄棒運動と同様、バーに対して正面を向いて行われる運動である。2本のバーに関しては、高さの高いバーを一般に高棒、低いほうのバーを低棒と呼び、高棒と低棒を段違いに2本平行に並べた構造になっている。以前使用されていたバーの断面形状は楕円形であったが、近年は円形となっており、段違い平行棒は男子の鉄棒種目に相当する競技であると考えられている。

しかし、段違い平行棒演技は、鉄棒演技とは違い、技のバリエーションとして、2本のバーの間を移動する空中局面を伴う技がある。これが、段違い平行棒運動の大きな特徴である。段違い平行棒運動を動力的にみても、バーを把持した状態での回転運動・振動運動と、空中局面を伴う運動として捉えることができ、物理的に異なる2つの運動で構成されている。

空中に浮いている状態では、運動量と角運動量が保存され、盛んに研究されている宇宙用マニピュレータと同じ非ホロノミックな拘束を受ける運動を行う。非ホロノミックな拘束条件下の運動では、リンク系の姿勢角は関節角の時間的な履歴に依存するという大変興味深く、重要な問題が存在する。このように近年注目され、研究が盛んに行われている問題が、段違い平行棒運動の空中局面を伴う技での姿勢制御に含まれている。

次に、演技の内容と構成を示すことにする。演技は多様性に富んだ以下に示した運動の分類から構成されなければならない。そして以下の分類から、ひねりや宙返り、手の握り換えまたは離し、とびを伴った技で構成されなければならない。また、演技全体はスムーズに連続して実施されなければならない。演技が止まるような、技と技の間が不連続になる構成であってはならない規制があ

る．各要素には，技の内容によって，難度点が与えられており，競技の採点に影響する．

回転系と振動系の技

- 後方車輪
- 前方車輪
- 棒下振り出しと浮支持回転
- 浮腰回転 前方 / 後方
- 足裏支持回転 前方 / 後方

空中局面を伴う技

- 高棒からとんで低棒に移動．または低棒からとんで高棒に移動
- 切り返しを伴うとび
- とび越し
- ヘヒト
- 宙返り

最後に，演技の採点について示すことにする．ただし，本研究における段違い平行棒演技の調査の目的は，運動の特性，内容や構成を理解し，これらの内容から，ロボットの制御手法を構築することであるため，演技の採点方法については，簡単に示すこととし，詳細な採点方法・点数については器械体操に関する文献を参照していただきたい．段違い平行棒演技の採点は，跳躍板またはマットを踏み切った時点から始まり，スコアは，技の難度点・要求グループ技・組み合わせ点（独創的で高度な技の組み合わせを成功させたことによって与えられる）からなる「A スコア」と，演技の実施・組み立て・芸術的表現の減点法によって採点される「B スコア」の合計からなる．したがって，技の難度だけを追求するだけでなく，演技の美しさも要求される．図3 - 1 に減点対象となる主な動作を示す．本研究では，Table.3-1，Table3-2 の減点対象となる動作を考慮した上で，運動の解析，ロボットにより運動を実現させるためのモデル化・目標軌道の生成・制御手法の提案を行わなければならない．逆に，人間は減点対象となる動作を行うことにより，姿勢を安定させようとしていると考えられるため，これらの動作をロボットに行わせることにより，ロボットの姿勢を制御することができると考えられる．したがって，これらの動作は，段違い平行棒運動ロボットを開発するために，重要な要素となるであろう．

要求グループ技

- 棒を移動する空中局面を伴う技（高棒から低棒または低棒から高棒へ移動する空中局面を伴う技）
- 空中局面を伴う技（同一棒を再び握る空中局面を伴う技）
- 倒立を経過する技（車輪や浮支持回転倒立など）
- 棒に近い技（ただし，空中局面を伴う技，振り上げ倒立は除く）
- 終末技（鉄棒から飛び出し，マットに着地するまでの技）

Table.3-1 Motions of deduction of points of uneven bar gymnastics

実 施 欠 点	
	- 腕の曲がり，または脚の曲がり
	- 脚または膝の開き
	- ひねりを伴う技での脚の交差
	- 技の高さが不十分
	- 抱え込み，屈伸，伸身姿勢が不正確
	- 伸身姿勢を保てない
	- 開脚が不十分
	- 正確さ（それぞれのうんどうの始まりと終わりの身体の位置が正確． 運動の角局面が完全にコントロールされている．）
演技全体を通して	
	・ 足，身体，胴体の姿勢がゆるむまたは不正確
	・ 柔軟性に欠ける
	・ スピードや迫力が欠ける
	・ 技の大きさが不十分
着地での欠点（終末技を含むすべての技）	
	- 直線方向から外れる
	- 着地で脚が離れる
	- 平均を保つための動き
	・ 余分な腕の動き
	・ 平均を保つための余分な状態の動き
	・ 余分なステップ，わずかなとび
	・ 非常に大きなステップまたはとび（1 mを目安）
	・ 姿勢の欠点
	・ 深いしゃがみ立ち
	・ 器械もたれていないが，手や脚が触れる．
	・ マット上や器械に片手または両手をつく
	・ マットに膝または尻をつく
	・ 落下または器械にもたれる

Table.3-2 Motions of deduction of points of uneven bar gymnastics

実 施 欠 点
- 3回目の助走または開始技を実施せず跳躍板に触れる
- 握りの調整
- 足が器械をかする
- マットをかする
- 足が器械にあたる
- 足がマットにあたる
- 倒立に到達する前に前後に脚が開く
- 技のひねり終了が不正確
- 演技全体のリズムが不良
- 倒立局面でのひねりのリズムが不良
- 空中局面を伴う技の高さが不十分
- 運動の振幅が不十分
- け上がりや後ろ振りで身体の伸ばしが不十分
- 中間振動
- 振幅の大きさ（前振り，または後ろ振りが水平以上）
- 後ろ振り上げの大きさ不十分
- 技術技量（演技全体を通しての専門的技術）

3.3 器械の構造

器械の構造は、前節で述べているように、高棒と低棒を段違いに2本平行に並べた構造になっている。ここでは、器械の寸法、材質等について示すことにする。

高棒の高さは、マットより2300mmで、低棒の高さはマットより1500mmである。また、2本の鉄棒間の直線距離は、1300～1800mmであり、選手は演技の構成によって、この範囲内で自由に距離を変更することが可能である。バーの直径は、40mmである。バーの素材はFRP製で、強度が高められている。また、バーの表面の素材は木製で、持ちやすく、滑りにくく、吸収性が良くなっており、木製の高弾性が生かされている。

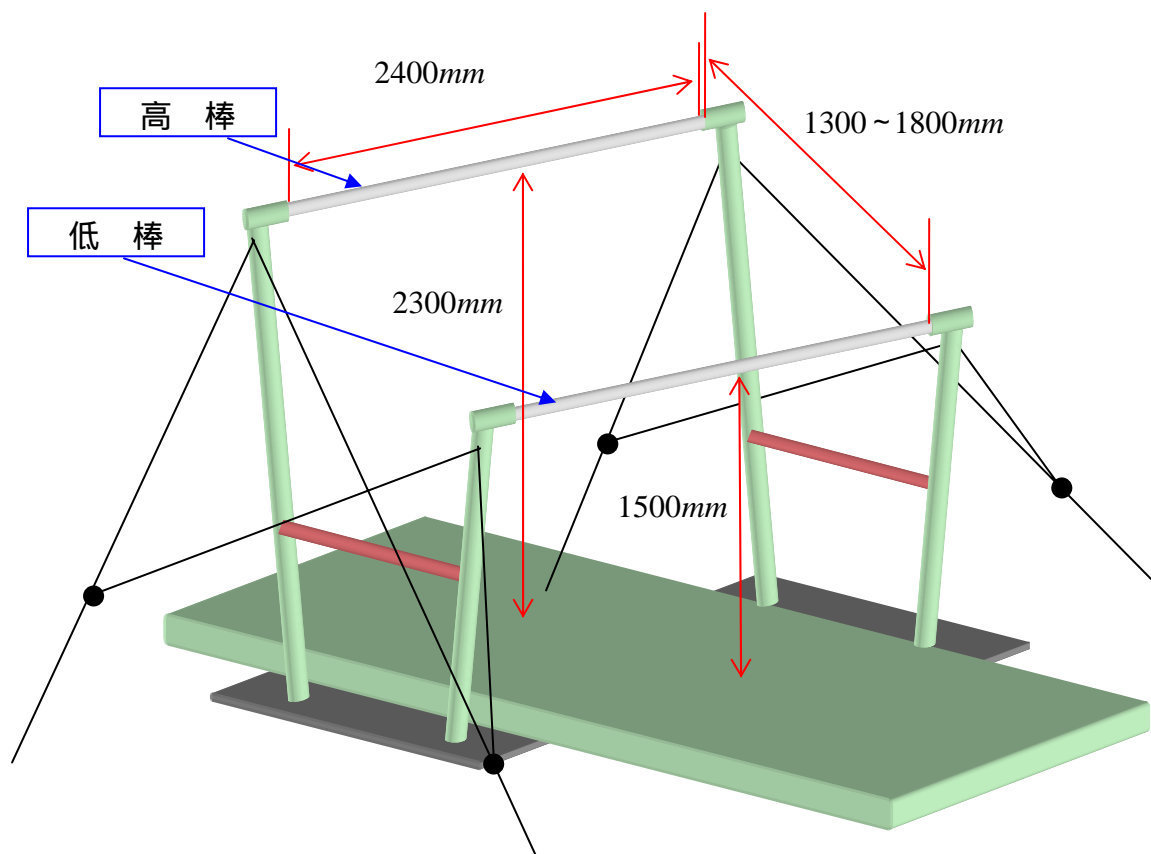
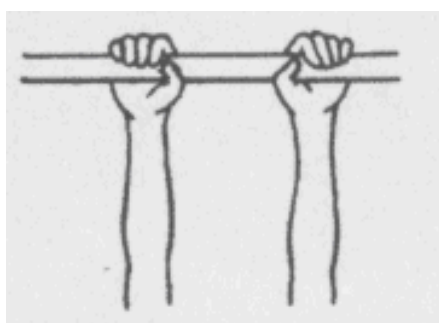


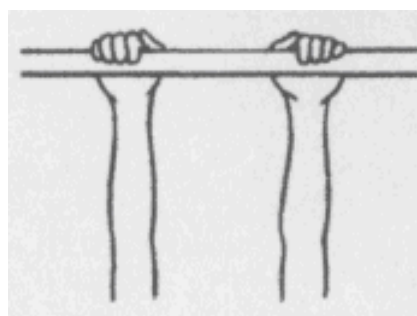
Fig.3-1 A structure of uneven bar

3.4 段違い平行棒の握り方

段違い平行棒の特徴は鉄棒の握り方にも現れている。男子競技の鉄棒でもそうであるが、一般的に私たちが鉄棒を行うときは、親指は他の4本の指と相対し、バーを閉じ込める握り方をする。しかしながら、段違い平行棒では、手首のかえしがスムーズに行えるようにすることと、女子の手のサイズが、バーの直径40mmに対して小さいとの理由から、親指を人差し指横に置き、棒を挟み込む握り方をする。この違いを Fig.3-2 に示す。



**Fig.3-2-1 A method of grabbing
a horizontal bar**



**Fig.3-2-1 A method of grabbing
a uneven bar**

3.5 おわりに

本章では、器械体操の採点規則をもとに、段違い平行棒演技の運動形態を示した。段違い平行棒運動は、大きく以下の3つの運動から構成されている。車輪や振り出し、支持回転からなる「回転系と振動系の技と、鉄棒間の移動、とび越し、宙返りなどからなる「空中局面を伴う技」である。特に、本研究の対称である空中局面を伴う技は、運動量と角運動量が保存され、非ホロノミックな拘束を受ける運動であり、拘束条件下での運動制御手法の提案となる。また、回転系や振動系の運動に関しては、高島らの提案する鉄棒運動の制御手法を大いに利用することが可能となるであろう。

次に、採点に関して、段違い平行棒演技のみだけではなく、体操競技全般に関することだが、体操競技は演技の難度だけでなく、演技の実施・組み立て・芸術的表現も採点の対象となる。最も芸術的表現という部分は、アミューズメントロボットを研究・開発する上では、重視しなければならない点であると考えられる。したがって、本研究でのロボットのモデル化、技実現のための関節軌道の生成および制御系の設計では、減点対象となる運動を考慮して行う必要がある。逆に、減点となる運動は、人間が技を失敗させないために行っている動作であると捉えることもでき、姿勢の安定化のために利用することもできるであろう。

最後に、器械の構造は、コンピュータシミュレーションでの鉄棒の位置の設定や、開発するロボット用の段違い平行棒の製作の参考にする。また、握り方に関しては、ロボットの設計・製作で最も重要となる握り部機構の設計・製作の行程で参考とする。

第4章 段違い平行棒運動ロボットのモデル

4.1 はじめに

本章では，段違い平行棒運動ロボットの運動解析と姿勢制御方法を提案するにあたり，段違い平行棒運動ロボットをモデル化する．人間には，非常に多くの関節が存在するが，空中における運動を十分に表現でき，段違い平行棒演技の特性から比較的単純化したモデルを構築した．モデルを構築する人間の部位と，コンピュータシミュレーションに使用する各リンクのパラメータを示す．

4.2 モデルの構築

本研究では，段違い平行棒運動の空中における運動，バーを掴んだ状態での回転運動，倒立動作を充分表現でき，比較的単純化するため，人間の体を，腕部，胴体，脚部の3つに分け，2次元平面内に拘束された剛体3リンクでモデルを構築した．モデルを構築する際には，解析の簡便性を考慮し，モデルを可能な限り単純化することが望ましく，基礎的な現象を十分に再現できる骨格系の主要機能のみとすることが必要となってくる．

人間の体には肩，股，肘や膝をはじめとして，かなり多くの関節があり，構造が複雑で自由度が大きい．実際の人間は，非常に多くの関節を同時に動作させることにより運動を行っている．そこで，人間と同様に，すべての関節・部位を考慮してモデルを構築しようとした場合，モデルは非常に複雑になる．しかし，ほとんどの段違い平行棒演技では，肘と膝は伸ばされたままであり，これらの関節を曲げての演技は減点対象となる．このため，段違い平行棒運動を解析し，ロボットで実現させるためには，肘，膝の関節を考慮せず，肩関節と股関節のみを考慮すれば良く，人間の構造を単純化したモデルを構築することができる．

また，開脚・ひねりといった運動を扱わなければ，運動は2次元平面内のある運動に絞られる．したがって，以下の9つの仮定のもと，Fig.4-1に示すような，剛体3リンクモデルとした．

肘および膝は，曲がらない関節とし，上腕と前腕，上腿と下腿を，それぞれ一つの剛体とする．

モデルを構築する各部位は，左右の腕，頭部と胴体，左右の脚は合体させ，それぞれ剛体 1 リンクとした，腕部，胴体，脚部の 3 リンクとし，第 1 リンク，第 2 リンク，第 3 リンクに相当する．

各リンクの密度は一定とする．

鉄棒と掌との間には，摩擦は無いものとする．

運動は，2次元平面内のみとする．

各リンクは，ジョイント（肩関節，股関節）で結合されている．

各関節には，工業用アクチュエータが取り付けられており，トルクを発生する

粘性減衰は無視する．

運動中の空気抵抗などの外力は無視できるものとする．

ここで，モデル化に使用した各記号は以下の通りである．

- (x, y) : 第 1 リンクの先端の座標（手先の座標） (m)
- l_i : 各リンクの長さ (m)
- l_{gi} : 各リンクの支点から重心までの長さ (m)
- m_i : 各リンクの質量 (kg)
- θ_i : θ_1 は第 1 リンクの絶対角度 (rad)
 θ_2 は第 1 リンクと第 2 リンクの相対角度 (rad)
 θ_3 は第 2 リンクと第 3 リンクの相対角度 (rad)
- I_i : 各リンクの重心を通る X-Y 軸に鉛直な軸（Z 軸）に平行な軸回りの慣性モーメント (kgm^2)

ただし，添え字の i はリンクの番号を表す ($i=1\sim 3$)

また，座標系は以下のように定める．

OXY 座標系は， x 軸は右向きを正， y 軸は上向きを正とする．
 $O'X'Y'$ 座標系は OXY 座標系に対して回転がなく平行移動したものである．

最後に，開脚・ひねりといった運動を扱わず，2次元平面内での運動を扱うため，左右の腕部，左右の脚部を合体したが，3次元空間での運動を考えたときには，左右の腕，左右の脚の各部位は，ひねり運動に影響を与えるため，合体することはできない．したがって，今後3次元空間での運動を実現していくためのモデル化では，左右の腕，胴体，左右の脚の最低5リンクでモデルを構築する必要があると考えられる．

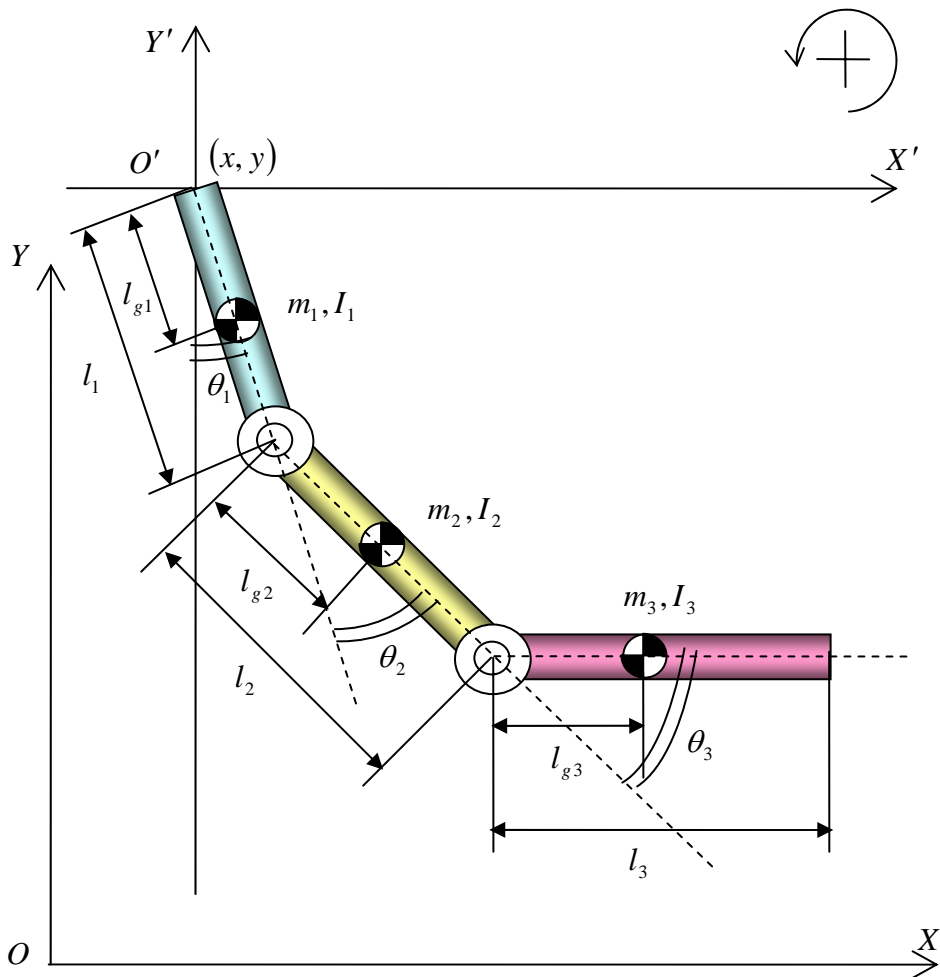


Fig.4-1 Three-link model of the uneven bar gymnast robot

4.3 剛体3リンクモデルの運動方程式

段違い平行棒運動ロボットの動力的な特性を解析することは、運動の制御手法の提案、コンピュータシミュレーション、性能評価などにおいて重要である。本節では、4.2で構築した、段違い平行棒運動ロボットの剛体3リンクモデルに対する運動方程式を導出する。

運動方程式の導出方法としては、*Newton-Euler*法、*Lagrange*法の2つが一般的である。本論文では、*Lagrange*法により運動方程式を導出した。ロボットの高速度化、高精度化の要求で、運動方程式を実時間で制御入力の計算に使用する場合には、必要計算量の少ない点から、*Newton-Euler*法で導出されることがある。しかし、*Lagrange*法は、力学的エネルギーに関係したラグランジュ関数という概念を用い、ロボットの運動に対する各種力学的パラメータの影響解析的に調べるのに適しており、スカラー量の形式的な演算で、複雑な系の運動方程式が得られる。

Fig.4-1において、 $x, y, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ を一般化座標に取る。*Lagrange*法により剛体3リンクモデルの運動方程式を導出すると、運動方程式は次式で与えられる。導出には、数式処理システムである *Mathematica* を使用し、具体的な導出課程は、付録を参照されたい。*Mathematica* 上の計算では、歪対称行列を用いて、導出した運動方程式が正確であることを確認している。

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + g(q) = D\tau \quad (4-1)$$

ここで、 q は一般化座標を表わし、 $M(q)$ は 5×5 慣性行列、 $h(q, \dot{q})$ は5次コリオリ力、遠心力ベクトル、そして、 $g(q)$ は重力項ベクトルを表わしている。また、 D は 5×2 トルク係数行列であり、 τ は2次関節駆動トルクベクトルである。各ベクトル、行列の詳細を以下に示す。

$$q = [x \quad y \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$m_{12} = 0$$

$$m_{13} = (m_1 l_{g1} + m_2 l_1 + m_3 l_1) \cos \theta_1 + (m_2 l_{g2} + m_3 l_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{g3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{14} = (m_2 l_{g2} + m_3 l_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{g3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{15} = m_3 l_{g3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{21} = m_{21}$$

$$m_{22} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$m_{23} = (m_1 l_{g1} + m_2 l_1 + m_3 l_1) \sin \theta_1 + (m_2 l_{g2} + m_3 l_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{24} = (m_2 l_{g2} + m_3 l_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{25} = m_3 l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$m_{31} = m_{13}$$

$$m_{32} = m_{23}$$

$$m_{33} = m_1 l_{g1}^2 + (m_2 + m_3) l_1^2 + m_2 l_{g2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{g3}^2 + (2m_2 l_1 l_{g2} + 2m_3 l_1 l_2) \cos \theta_2 \\ + 2m_3 l_1 l_{g3} \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2m_3 l_2 l_{g3} \cos \theta_3 + I_1 + I_2 + I_3$$

$$m_{34} = m_2 l_{g2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{g3}^2 + (m_2 l_1 l_{g2} + m_3 l_1 l_2) \cos \theta_2 + m_3 l_1 l_{g3} \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ + 2m_3 l_2 l_{g3} \cos \theta_3 + I_2 + I_3$$

$$m_{35} = m_3 l_{g3}^2 + m_3 l_1 l_{g3} \cos(\theta_2 + \theta_3) + m_3 l_2 l_{g3} \cos \theta_3 + I_3$$

$$m_{41} = m_{14}$$

$$m_{42} = m_{24}$$

$$m_{43} = m_{34}$$

$$m_{44} = m_2 l_{g2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{g3}^2 + 2m_3 l_2 l_{g3} \cos \theta_3 + I_2 + I_3$$

$$m_{45} = m_3 l_{g3}^2 + m_3 l_2 l_{g3} \cos \theta_3 + I_3$$

$$m_{51} = m_{15}$$

$$m_{52} = m_{25}$$

$$m_{53} = m_{35}$$

$$m_{54} = m_{45}$$

$$m_{55} = m_3 l_{g3}^2 + I_3$$

$$\mathbf{h} = [h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4 \quad h_5]^T$$

$$\begin{aligned} h_1 = & -\left\{ (m_1 l_{g1} + m_2 l_2 + m_3 l_1) \sin \theta_1 + (m_2 l_{g2} + m_3 l_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_1^2 \\ & - \left\{ (m_2 l_{g2} + m_3 l_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_2^2 \\ & - \left\{ m_3 l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_3^2 \\ & - \left\{ (2m_2 l_{g2} + 2m_3 l_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) + 2m_3 l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & - \left\{ 2m_3 l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ & - \left\{ 2m_3 l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2 = & \left\{ (m_1 l_{g1} + m_2 l_2 + m_3 l_1) \cos \theta_1 + (m_2 l_{g2} + m_3 l_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{g3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_1^2 \\ & + \left\{ (m_2 l_{g2} + m_3 l_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{g3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_2^2 \\ & + \left\{ m_3 l_{g3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_3^2 \\ & + \left\{ (2m_2 l_{g2} + 2m_3 l_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) + 2m_3 l_{g3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & + \left\{ 2m_3 l_{g3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ & + \left\{ 2m_3 l_{g3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_3 = & -\left\{ (m_2 l_1 l_{g2} + m_3 l_1 l_2) \sin \theta_2 + m_3 l_1 l_{g3} \sin(\theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_2^2 \\ & - \left\{ m_3 l_2 l_{g3} \sin \theta_3 + m_3 l_1 l_{g3} \sin(\theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_3^2 \\ & - \left\{ (2m_2 l_1 l_{g2} + 2m_3 l_1 l_2) \sin \theta_2 + 2m_3 l_1 l_{g3} \sin(\theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & - \left\{ 2m_3 l_2 l_{g3} \sin \theta_3 + 2m_3 l_1 l_{g3} \sin(\theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ & - \left\{ 2m_3 l_2 l_{g3} \sin \theta_3 + 2m_3 l_1 l_{g3} \sin(\theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_4 = & \left\{ (m_2 l_1 l_{g2} + m_3 l_1 l_2) \sin \theta_2 + m_3 l_1 l_{g3} \sin(\theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_1^2 \\ & - \left\{ m_3 l_2 l_{g3} \sin \theta_3 \right\} \dot{\theta}_3^2 \\ & - \left\{ 2m_3 l_2 l_{g3} \sin \theta_3 \right\} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ & - \left\{ 2m_3 l_2 l_{g3} \sin \theta_3 \right\} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_5 = & \left\{ m_3 l_2 l_{g3} \sin \theta_3 + m_3 l_1 l_{g3} \sin(\theta_2 + \theta_3) \right\} \dot{\theta}_1^2 \\ & + \left\{ m_3 l_2 l_{g3} \sin \theta_3 \right\} \dot{\theta}_2^2 \\ & + \left\{ 2m_3 l_2 l_{g3} \sin \theta_3 \right\} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{g} = [g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4 \quad g_5]^T$$

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = \{m_1 + m_2 + m_3\}g$$

$$g_3 = \{(m_1 l_{g1} + m_2 l_1 + m_3 l_1) \sin \theta_1 + (m_2 l_{g2} + m_3 l_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\}g$$

$$g_4 = \{(m_2 l_{g2} + m_3 l_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\}g$$

$$g_5 = \{m_3 l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\}g$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

4.4 剛体3リンクモデルのパラメータ設定

モデルパラメータの設定にあたっては、実験環境を考慮して、女子の平均体重・身長³の1程度に設定することにした。

まず、各リンクの長さについては、人体の各部位の長さの3分の1の長さとして算出した。

次に、各リンクの質量に関しても、実際の人間の体重を基に導出したが、両腕の重さを平均体重の10パーセント、両足の重さを平均体重の40パーセント、そして残りの重さを、頭部と胴体の重さを合わせた重さとし、それぞれ3分の1の重さを算出した。

さらに、各リンク重心まわりの慣性モーメントの導出に関しては、各リンクの形状が直方体であるとし、直方体の幅を、太ももの太さの2分の1として導出した。

以上で述べた導出方法により算出した各リンクのパラメータおよびリンク名を Table.4-1 に示す。

Table4-1 Parameter of the uneven bar gymnast robot model

	<i>1st link</i>	<i>2nd link</i>	<i>3rd link</i>
<i>Region of human body</i>	<i>Arm</i>	<i>Body</i>	<i>Leg</i>
<i>Mass m_i (m)</i>	0.1820	0.9090	0.7270
<i>Length l_i (m)</i>	0.2230	0.1600	0.2670
<i>Distance from joint to center of gravity l_{gi} (m)</i>	0.1115	0.0800	0.1335
<i>Moment of inertia I_i (kgm²)</i>	0.00088	0.00256	0.00482

4.5 シミュレーションに用いる段違い平行棒の高さ・位置設定

シミュレーションに用いる段違い平行棒の高棒と低棒の，絶対座標系における位置および鉄棒間距離を設定する．

段違い平行棒の高棒と低棒の，絶対座標系における位置および鉄棒間距離の設定においても，段違い平行棒運動ロボットのモデルのパラメータ設定と同様に，Fig.4-1 に示した実際の競技で規定されている段違い平行棒の寸法の3分の1と設定することにした．また，高棒の中心を絶対座標系の原点と一致させている．

設定した高棒と低棒の絶対座標系に対する位置を，Fig.4-2 に示す．

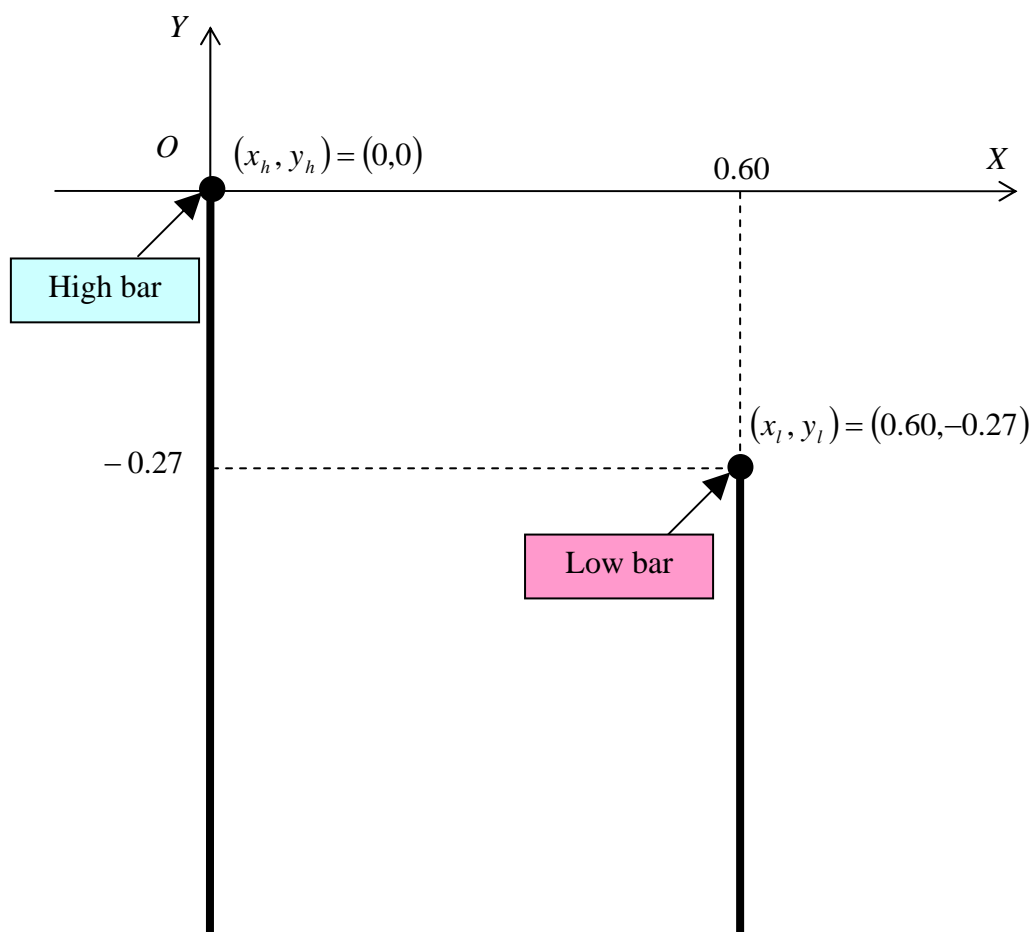


Fig.4-2 Positions of high bar and low bar

4.6 おわりに

構築した段違い平行棒運動ロボットのモデルは，空中における運動を十分に表現でき，比較的単純化したモデルとするため，段違い平行棒運動の特性から人間の構造を簡略化し，関節は肩関節と股関節の2関節とした．また，左右の腕を合体させた腕部，胴体，左右の脚を合体させた脚部からなる剛体3リンクとして，モデル化を行った．本モデルを動作させるためには，肩関節と股関節に対して2つのモータを使用する．

次に，モデルのパラメータは，女子の平均体重および身長のおよそ3分の1程度に設定した．また，各リンクを全て直方体（2次元では長方形）で構成し，密度を一定としたことで，各リンクの重心位置はリンクの中央としている．そして，各リンクの合成重心まわりの慣性モーメントの算出は，長方形の慣性モーメントの導出式を使用した．

以上のように設定した本段違い平行棒運動ロボットのモデルは，以降に示す空中姿勢制御手法の提案，関節軌道や関節角速度軌道の生成，コンピュータシミュレーションにおいて使用する．

第5章 鉄棒間移動実現条件

5.1 はじめに

段違い平行棒運動は，運動学において鉄棒運動の拡張として考えることができる．このため，段違い平行棒運動は，バーを握った状態での運動と空中局面での運動に分けられる．本研究では後者の運動を実現することを目的とした研究であるが，空中に飛び出す瞬間と，再びバーを掴む際の状態は前者の運動と考えることもできる．そこで，この章ではまず鉄棒を確実に把持するためには，ロボットの姿勢と合成重心位置が問題となることから，これらの関係を示す．

次に，空中において合成重心は絶対座標系に対して放物運動をする．そのため，空中動作後に鉄棒を把持することが可能な合成重心位置に達するためには，バーから離脱する瞬間の合成重心速度が問題となる．そこで，鉄棒間の移動を実現するための初期合成重心速度，滞空時間の条件を含んだ移動実現条件を示す．

5.2 鉄棒把持可能姿勢および合成重心位置

空中に飛び出し，空中動作後にバー（高棒あるいは低棒）を確実に把持することができるか否かは，バーを握ろうとする際のロボットの姿勢と，その姿勢に対応した合成重心位置の関係によって決定される．そこで，鉄棒把持可能姿勢および合成重心範囲の解析を行う．

鉄棒支持時の合成重心位置は，式(5-1)に示すように，第1リンクの絶対角 θ_1 と第1リンクと第2リンクおよび第2リンクと第3リンクの相対角 θ_2, θ_3 により与えられる．

$$\mathbf{r}_G = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_b + \left(\frac{m_1 l_{g1} + m_2 l_1 + m_3 l_1}{M} \right) \sin \theta_1 + \left(\frac{m_2 l_{g2} + m_3 l_2 + m_3 l_{g3}}{M} \right) \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ + \left(\frac{m_3 l_{g3}}{M} \right) \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y_b - \left(\frac{m_1 l_{g1} + m_2 l_1 + m_3 l_1}{M} \right) \cos \theta_1 - \left(\frac{m_2 l_{g2} + m_3 l_2 + m_3 l_{g3}}{M} \right) \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ - \left(\frac{m_3 l_{g3}}{M} \right) \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

ただし，

- r_G : 合成重心ベクトル (m)
 (x_b, y_b) : バー（高棒あるいは低棒）の中心位置 (m)
 $M = m_1 + m_2 + m_3$: リンクの全質量 (kg)

鉄棒支持状態で，バー中心から合成重心までの距離が最大になる状態を考える．このときの姿勢は， $\theta_2 = \theta_3 = 0$ である．つまり全身が伸ばされ，リンクが直線になった状態である．このときの，合成重心の軌跡は式(5-2)となる．例として，バーの中心位置を低棒の中心位置 $(x_b, y_b) = (0.60, -0.27)$ に設定したときの軌跡を Fig.5-2 に示す．

$$(x_G - x_b)^2 + (y_G - y_b)^2 = \left(\frac{m_1 l_{g1} + m_2 (l_1 + l_{g2}) + m_3 (l_1 + l_2 + l_{g3})}{M} \right)^2 \quad (5-2)$$

次に，鉄棒支持状態で，バー中心から合成重心までの距離が最小になる状態を考える．この状態は，距離が最大となる状態を考える場合とは異なり，状態を最も屈曲させた状態がこの条件であるかどうかは明確ではない．そこで，相対角の範囲を $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi, 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$ として，数式処理システムである *Mathematica* の組み込み関数である *NMinimize* を使用して，姿勢とその姿勢におけるバー中心から合成重心までの距離の導出を行った．この導出結果を以下に示し，例として最大となる場合と同様にバーの中心位置を低棒の中心位置 $(x_b, y_b) = (0.60, -0.27)$ に設定したときの軌跡を Fig.5-3 に示す．

$$\text{姿勢： } 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi \text{ rad}, \theta_2 \cong 3.14159 \cong \pi \text{ rad}, \theta_3 \cong 0 \text{ rad} \quad (5-3)$$

バー中心からの距離： 0.05447 m

解析結果に関して，空中動作後に鉄棒支持状態で，導出したバー中心から合成重心までの距離が最小になる状態で鉄棒を握ろうとすることは，実際の演技の映像からも確認されず，衝撃や演技の連続性から考えても，空中動作後にバーを握る状態としては不適切であると考えられる．したがって，式(5-2)で表わされる合成重心軌跡の少しでも内側に，滞空時間後の合成重心が到達すれば，関節角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の組み合わせにより，バーを掴むことが可能である．そして，空中姿勢制御において，再びバーを掴もうとした時の姿勢が，式(5-3)のような演技において不適切な状態と考えられる姿勢にならないように設定する必要がある．

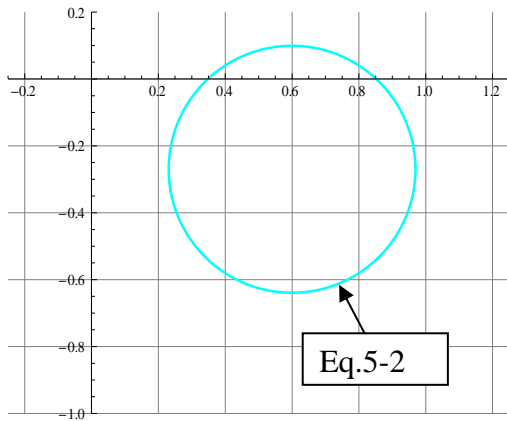


Fig.5-2 The trajectory of the center of mass for the robot to grab the low bar which distance from bar center to mass center is maximum distance

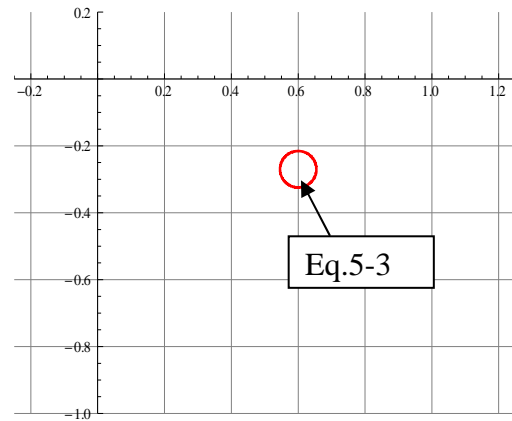


Fig.5-3 The trajectory of the center of mass for the robot to grab the low bar which distance from bar center to mass center is minimum distance

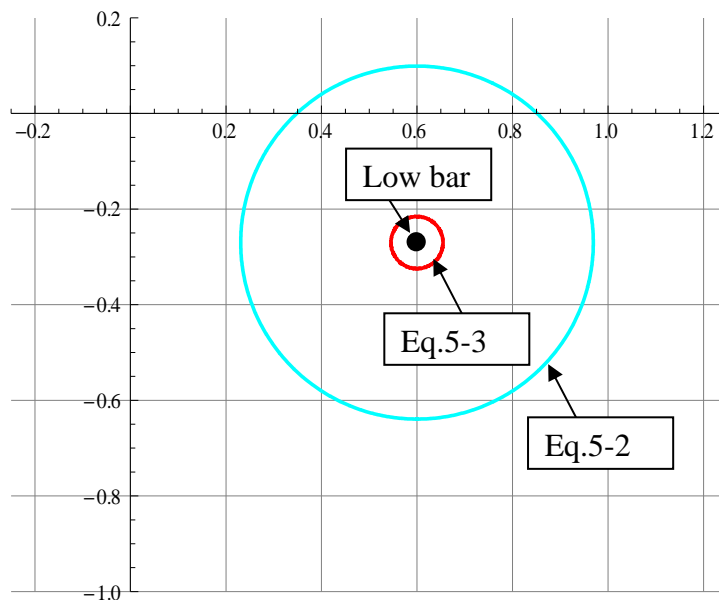


Fig.5-4 The trajectory of the center of for the robot to grab the low bar

5.3 合成重心軌道と滞空時間の関係

鉄棒把持可能な合成重心範囲は5.2で示したように、式(5-2)で表される円の軌跡の内側である。したがって、空中局面を伴う移動技を実現させるためには、滞空時間後にこの範囲に合成重心が到達していなければならないことになる。この条件を実現するためには、鉄棒を放す際の姿勢・関節角速度・合成重心速度、飛び移る際の姿勢、滞空時間が問題となる。そこで、これらの関係を導く。

5.3.1 飛出合成重心速度

飛び出す際の合成重心速度（初期合成重心速度）は、バーから飛び出す際の姿勢・角速度から次のように表される。

まず、飛び出す際の姿（初期姿勢）、関節角速度（初期角速度）と飛び出す方のバーの位置を次のように表すと、各リンク重心の初期速度は、式(5-5)のように表される。

$$\begin{aligned} \text{初期姿勢} & : \theta_0 = [\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03}] \quad (\text{rad}) \\ \text{初期角速度} & : \dot{\theta}_0 = [\dot{\theta}_{01}, \dot{\theta}_{02}, \dot{\theta}_{03}] \quad (\text{rad/sec}) \\ \text{飛出バー位置} & : r_{0b} = (x_{0b}, y_{0b}) \quad (m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第1リンク初期重心速度 } \dot{S}_{01} & = [\dot{S}_{01x}, \dot{S}_{01y}]^T \\ \dot{S}_{01} & = \begin{bmatrix} \dot{S}_{01x} \\ \dot{S}_{01y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{0b} + l_{g1} \dot{\theta}_{01} \cos \theta_{01} \\ \dot{y}_{0b} + l_{g1} \dot{\theta}_{01} \sin \theta_{01} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-4-1)$$

$$\begin{aligned} \text{第2リンク初期重心速度 } \dot{S}_{02} & = [\dot{S}_{02x}, \dot{S}_{02y}]^T \\ \dot{S}_{02} & = \begin{bmatrix} \dot{S}_{02x} \\ \dot{S}_{02y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{0b} + l_1 \dot{\theta}_{01} \cos \theta_{01} + l_{g2} (\dot{\theta}_{01} + \dot{\theta}_{02}) \cos(\theta_{01} + \theta_{02}) \\ \dot{y}_{0b} + l_1 \dot{\theta}_{01} \sin \theta_{01} + l_{g2} (\dot{\theta}_{01} + \dot{\theta}_{02}) \sin(\theta_{01} + \theta_{02}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-4-2)$$

$$\begin{aligned} \text{第3リンク初期重心速度 } \dot{S}_{03} & = [\dot{S}_{03x}, \dot{S}_{03y}]^T \\ \dot{S}_{03} & = \begin{bmatrix} \dot{S}_{03x} \\ \dot{S}_{03y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{0b} + l_1 \dot{\theta}_{01} \cos \theta_{01} + l_2 (\dot{\theta}_{01} + \dot{\theta}_{02}) \cos(\theta_{01} + \theta_{02}) \\ \quad \quad \quad + l_{g3} (\dot{\theta}_{01} + \dot{\theta}_{02} + \dot{\theta}_{03}) \cos(\theta_{01} + \theta_{02} + \theta_{03}) \\ \dot{y}_{0b} + l_1 \dot{\theta}_{01} \sin \theta_{01} + l_2 (\dot{\theta}_{01} + \dot{\theta}_{02}) \sin(\theta_{01} + \theta_{02}) \\ \quad \quad \quad + l_{g3} (\dot{\theta}_{01} + \dot{\theta}_{02} + \dot{\theta}_{03}) \sin(\theta_{01} + \theta_{02} + \theta_{03}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-4-3)$$

よって，初期合成重心速度 $V_{0G} = [V_{x0G}, V_{y0G}]^T$ は次式のようになる．

$$V_{0G} = \begin{bmatrix} V_{x0G} \\ V_{y0G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 \dot{S}_{01x} + m_2 \dot{S}_{02x} + m_3 \dot{S}_{03x}) / M \\ (m_1 \dot{S}_{01y} + m_2 \dot{S}_{02y} + m_3 \dot{S}_{03y}) / M \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

また，初期合成重心速度方向は次のようになる．

$$\theta V_{0G} = \tan^{-1} \left(\frac{V_{y0G}}{V_{x0G}} \right) \quad (5-6)$$

以上のように，飛び出し時の初期合成重心速度は，飛び出し時の姿勢（初期合成重心速度）と関節角速度（初期関節角速度）によって決定される．この初期合成重心速度で空中に飛び出したときに，鉄棒把持可能範囲に到達するか判断することが，鉄棒移動実現条件の1つとなる．

ただし，合成重心速度の設定においては，次のような難点がある．鉄棒運動の支点まわりの回転運動の場合，合成重心の水平方向速度と鉛直方向速度は，独立に決定することができない．ある1つの物体を投げるとき，物体に与える水平方向と鉛直方向の力は，独立に与えることが可能であるため，物体の水平方向速度と鉛直方向速度を個別に制御することができ，指定した時間後に物体をある位置に到達させることは容易である．しかし，鉄棒運動のような回転運動のような場合，合成重心速度は，姿勢と関節の角速度によって決定されるため，どちら一方の速度成分を目標とする速度に設定すれば，もう一方の速度成分の値も変化してしまう．したがって，空中に飛び出し，滞空時間後に合成重心が5.2の鉄棒把持可能合成重心範囲に到達するように，滞空時間と到達位置から初期関節角と関節角速度を設定することは困難である．また，ある合成重心速度を満たす，関節角と関節角速度の組み合わせは無数に存在することも難点である．これらの問題を解決ための初期姿勢と初期角速度の決定手法は，第7章7.3で示している．

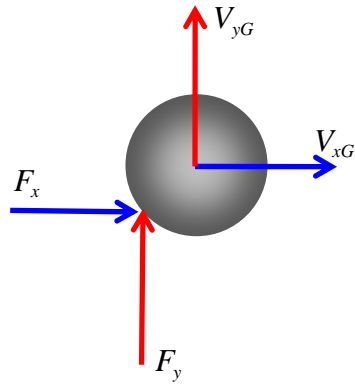


Fig.5-5-1 A object velocity of center of gravity

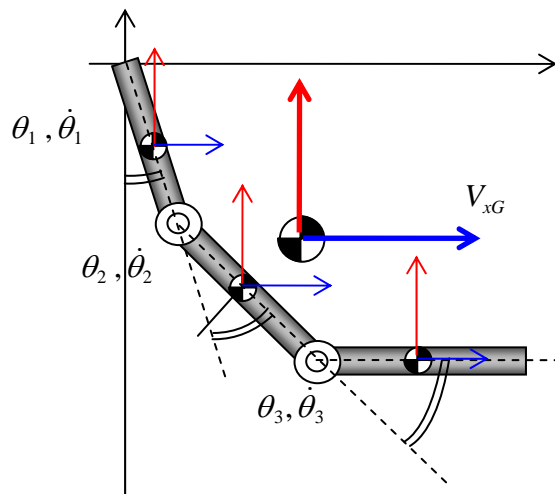


Fig.5-5-2 A velocity of center of gravity on a bar

5.3.2 滞空時間の算出

バーからバーへの移動における滞空時間は、初期合成重心位置ベクトル・速度ベクトルから与えられる合成重心の時間関数と、飛び移った際の姿勢（最終姿勢）から与えられる飛び移るバーの中心位置から合成重心位置への距離を半径とする円の軌跡の2つから導出することが可能である。滞空時間の算出方法は以下のようなになる。

まず、空中局面での合成重心の軌跡は放物線を描き、滞空時間後の合成重心位置はバーから飛び出した瞬間の初期位置ベクトル・初期速度ベクトルから時間の関数として式(5-7)のように与えられる。

$$\mathbf{r}_{fG} = \begin{bmatrix} x_{fG} \\ y_{fG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0G} + V_{x0G} \cdot t_f \\ y_{0G} + V_{y0G} \cdot t_f - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_f^2 \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

ここで、

$$t_f \quad : \text{滞空時間 (sec)}$$

$$\mathbf{r}_{0G} = [x_{0G}, y_{0G}]^T : \text{初期合成重心位置 (m)}$$

$$\mathbf{r}_{fG} = [x_{fG}, y_{fG}]^T : \text{最終合成重心位置 (m)}$$

である。

次に鉄棒に飛び移った際の最終合成重心位置は、バーに飛び移った際の姿勢（最終姿勢）と飛び移ったバーの中心位置から次式のように与えられる。

$$\mathbf{r}_{fG} = \begin{bmatrix} x_{fG} \\ y_{fG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{fGb} + a_1 \sin \theta_{f1} + a_2 \sin(\theta_{f1} + \theta_{f2}) + a_3 \sin(\theta_{f1} + \theta_{f2} + \theta_{f3}) \\ y_{fGb} - a_1 \cos \theta_{f1} - a_2 \cos(\theta_{f1} + \theta_{f2}) - a_3 \cos(\theta_{f1} + \theta_{f2} + \theta_{f3}) \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

ただし、

$$\mathbf{r}_{fGb} = [x_{fGb}, y_{fGb}]^T : \text{飛び移ったバーの中心位置 (m)}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{fj} = [\theta_{f1}, \theta_{f2}, \theta_{f3}]^T : \text{最終姿勢 (rad)}$$

ここで、

$$a_1 = \frac{m_1 l_{g1} + m_2 l_1 + m_3 l_1}{M}, \quad a_2 = \frac{m_2 l_{g2} + m_3 l_2}{M}, \quad a_3 = \frac{m_3 l_{g3}}{M}$$

式(5-8)より，飛び移ったバーから最終合成重心への距離を半径とする合成重心の円の軌跡は式(5-9)のようになる．

$$\begin{aligned} & (x_{yfG} - x_{yfb})^2 + (y_{yfG} - y_{yfb})^2 \\ & = \{a_1 + a_2 \cos \theta_{yf2} + a_3 \cos(\theta_{yf2} + \theta_{yf3})\}^2 + \{a_2 \sin \theta_{yf2} + a_3 \sin(\theta_{yf2} + \theta_{yf3})\}^2 \end{aligned} \quad (5-9)$$

そして式(5-7)，式(5-9)より式(5-10)が得られる．

$$\begin{aligned} & \left\{ (x_{0G} + V_{x0G} \cdot t_f) - x_{yfb} \right\}^2 + \left\{ \left(y_{0G} + V_{y0G} \cdot t_f - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_f^2 \right) - y_{yfb} \right\}^2 \\ & = \{a_1 + a_2 \cos \theta_{yf2} + a_3 \cos(\theta_{yf2} + \theta_{yf3})\}^2 + \{a_2 \sin \theta_{yf2} + a_3 \sin(\theta_{yf2} + \theta_{yf3})\}^2 \end{aligned} \quad (5-10)$$

したがって，滞空時間は式(5-10)の滞空時間に関する4次方程式の解の1つとなる．空中局面での合成重心の軌跡と飛び移ったバーから最終合成重心への距離を半径とする合成重心の円の軌跡の関係を Fig.5-6 に示す．Fig.5-6 からわかるように，滞空時間を導出することは，空中局面での合成重心の軌跡と飛び移るバーから最終合成重心への距離を半径とする軌跡とに交点が存在するかを判別していることにもなり，交点の位置を算出していることと言い換えることができる．つまり，滞空時間に関する4次方程式において，実数解が存在すれば交点が存在し，鉄棒間の移動は可能といえる．実数解が存在しなければ交点が存在していないことを意味し，鉄棒間の移動は不可能である．これが，鉄棒間移動実現条件の1つである．

しかし，鉄棒間の移動実現のためには，2つの軌道の交点の有無に加えて，技の運動内容や演技構成から，交点の位置についても移動実現の条件となる．詳細な交点の条件については，次節で説明する．

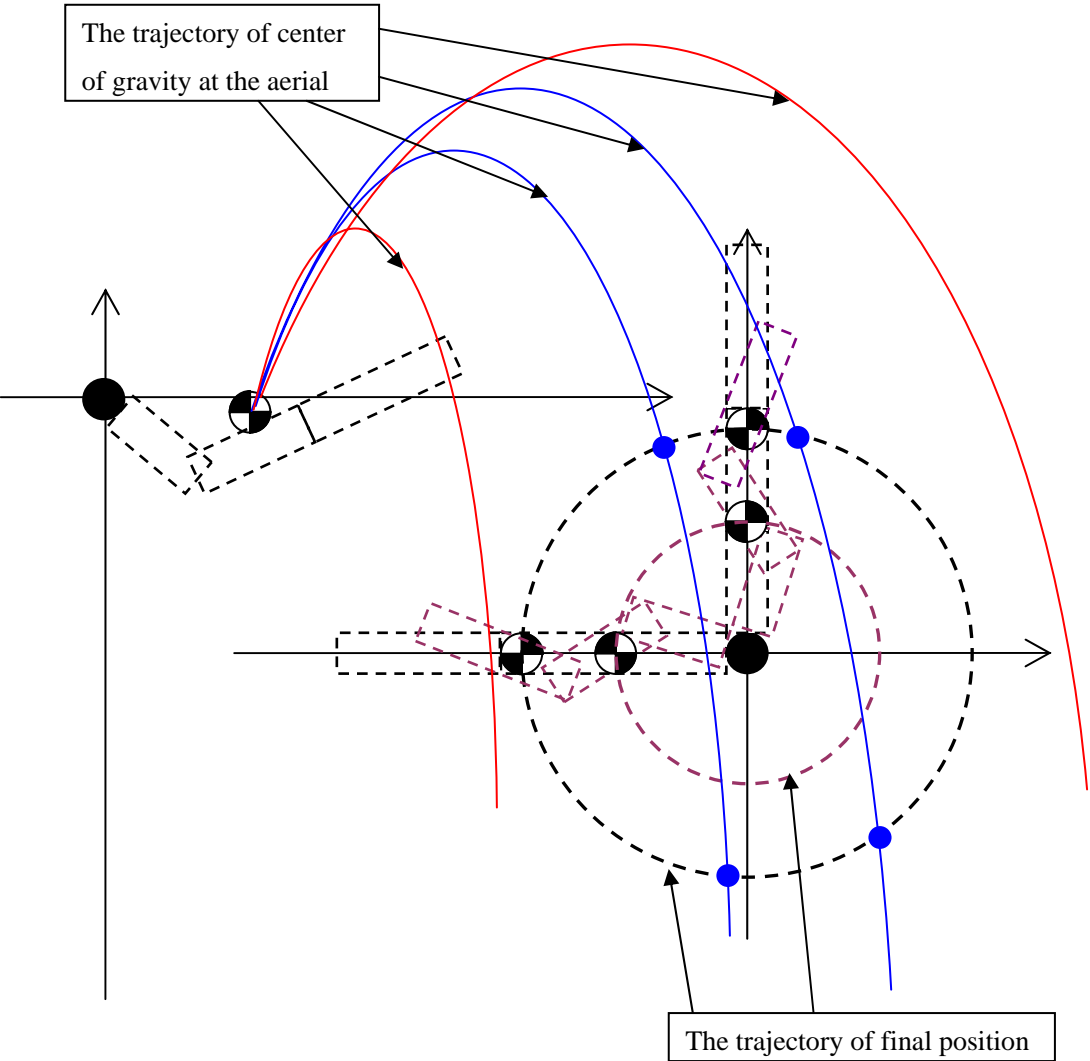


Fig.5-6 The image of points at the intersection of trajectory of center of gravity at the aerial and trajectory of center of mass final position

5.4 技および演技構成による飛付時合成重心範囲の制限

5.3において、鉄棒間の移動運動が実現するための条件は、バーから飛び出した瞬間の初期位置ベクトル・初期速度ベクトルから時間の関数として与えられる空中局面での合成重心の軌跡と、最終姿勢から導出される飛び移ったバーから最終合成重心への距離を半径とする合成重心の円の軌跡との間に交点が存在することであることを示した。しかし、滞空時間から計算されるすべての交点で、鉄棒を掴むことが可能であるか、また次の演技に連続して運動を移行できるかといえ、そうではない。鉄棒間の移動運動が実現されるためには、交点の位置も考えなければならない。空中動作からのバーの掴み易さ、次の技への移行の容易さ、バーとリンクの衝突等を考慮して、バーに飛びついた際の合成重心位置に適した範囲を、鉄棒把持可能合成重心範囲から選択肢し、この範囲に交点が存在しているか判断する必要がある。

具体的な合成重心範囲の限定法と、交点の位置の判別法について示す。

まず Fig.5-7 のように、高棒と低棒をそれぞれ中心として、8つの領域に分割する。次に、各領域について以下の4つの項目に関して検討し、鉄棒把持可能合成重心範囲を限定する。そして、限定した領域に交点が存在しているかを判別する。

- 1). 空中局面を伴う技の運動内容
- 2). 空中動作からのバーの掴み易さ
- 3). 次の演技への移行の容易さ・美しさ
- 4). バーとリンクの衝突

交点の座標は滞空時間後の合成重心位置の座標であるため、交点の座標を (x_{ifG}, y_{ifG}) とすると、交点を選択した領域に存在するかは次のような関係から判断することができる。

$$\begin{aligned} \text{Area1 Area5} &: x_{ifG} \geq x_b \text{ かつ } y_{ifG} \geq y_b \\ \text{Area2 Area6} &: x_{ifG} \leq x_b \text{ かつ } y_{ifG} \geq y_b \\ \text{Area3 Area7} &: x_{ifG} \leq x_b \text{ かつ } y_{ifG} \leq y_b \\ \text{Area4 Area8} &: x_{ifG} \geq x_b \text{ かつ } y_{ifG} \leq y_b \end{aligned}$$

ただし、 (x_b, y_b) はバーの中心位置であり、高棒中心位置 (x_h, y_h) あるいは低棒中心位置 (x_l, y_l) である。

例として、空中演技を伴う移動技である「高棒内向き懸垂 - 後方宙返り下移動 - 低棒浮支持」(パク宙返り)について考えてみることにする。

パク宙返りは、高棒から飛び出し、空中局面で後方宙返りを行った後、低棒を掴む技である。したがって、交点が存在しなければならない領域は、Fig.5-7の低棒を中心とする Area5 ~ Area8 におのずと限定される。次に、これら4つの領域について上記の項目を検討する。

Area5: この領域に合成重心が達したときに、バーを掴もうとしても、重心はバーから離れていく移動を示しているため、バーを確実に掴むことは困難であり、離脱してしまう可能性がある。

Area6: この領域では、合成重心速度の水平方向成分が掴もうとするバー側に大きさを持っているため、バーを掴むことは容易であると考えられる。また、あふり動作、け上がりと演技を連続して行える範囲でもある。

Area7: この領域に合成重心が達したときに掴むことは、手先がバーに近づいていくため、バーを掴むことは容易であると考えられる。しかし、バーより下の位置でバーを掴むため、あふり動作を行うことができる期間が短く、スムーズに次の技につなげることができないと考えられる。

Area8: 合成重心がこの領域に達する前に、バーとリンクが衝突するため、この領域でバーを掴むことは不可能である。

以上の考察から、パク宙返りにおいては Area6 の領域内に合成重心が存在しているときにバーを掴むことが理想的であり、Area6 内に空中局面での合成重心の軌跡とバーから最終合成重心への距離を半径とする軌跡の交点が存在しているか判断する。Area6 であるため、条件式は次式のようなになる。

$$x_{fG} \leq x_l \quad , \quad y_{fG} \geq y_l \quad (5-11)$$

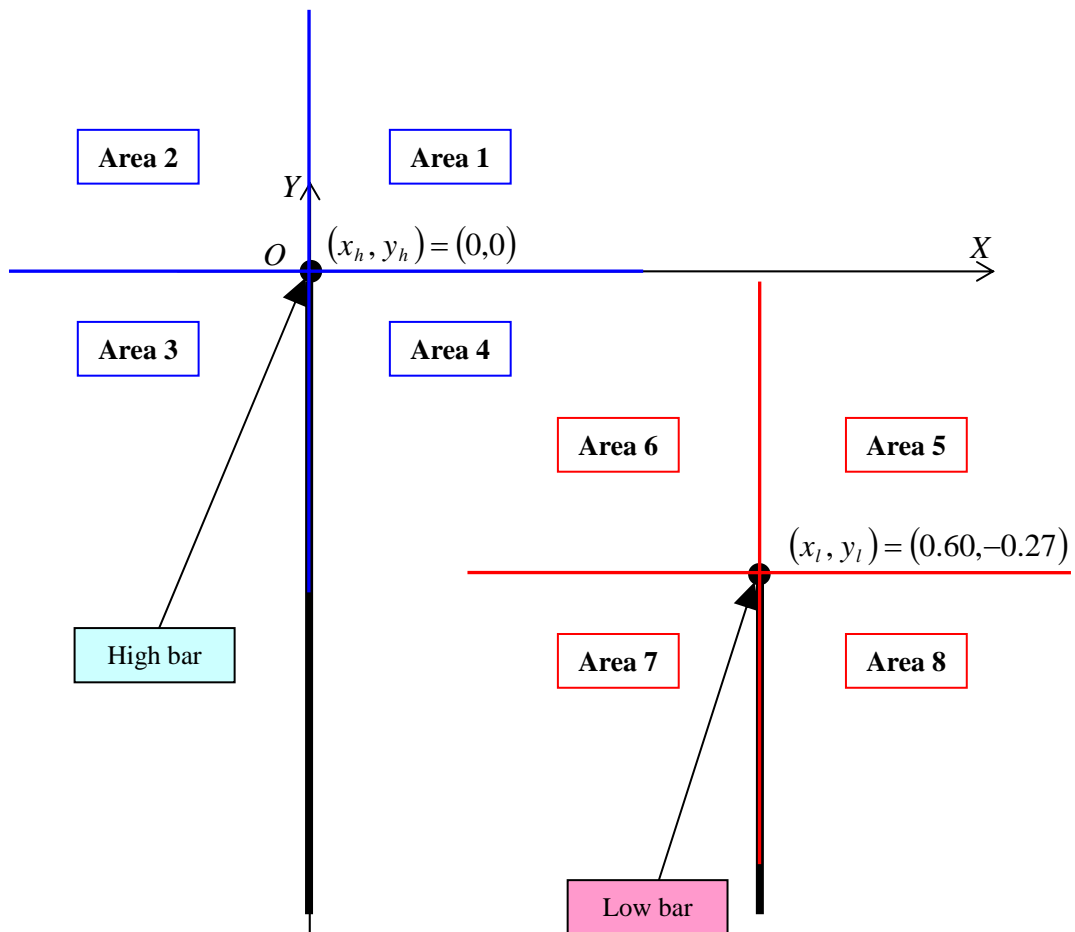


Fig.5-7 Division area used to judge whether the center of gravity position calculated from duration of flight exists at suitable position for realization of moving performance

5.5 移動実現条件

5.2, 5.3, 5.4 で述べた鉄棒間移動実現条件を以下にまとめる。

式(5-10)の滞空時間に関する4次方程式において解が存在し、空中局面での合成重心の軌跡と、飛び移ったバーから最終合成重心への距離を半径とする合成重心の円の軌跡の2つの軌跡に交点が存在することである。交点が存在しなければ移動は不可能である。交点を得られない理由は、バーから飛び出すときの初期合成重心位置と初期合成重心速度が不適切なことである。したがって、初期合成重心位置と初期合成重心速度を決定する初期関節角・関節角速度を交点が存在するように変更すれば良い。

空中局面での合成重心の軌跡と飛び移ったバーから最終合成重心への距離を半径とする合成重心の円の軌跡の2つの軌跡に交点が存在するだけでは移動は実現しない。交点の位置も問題となる。空中動作からのバーの掴み易さ、次の技への移行の容易さ、バーとリンクの衝突等を考慮して、鉄棒把持可能範囲から限定した領域内に交点が1つでも存在しなければならない。鉄棒把持可能範囲から限定した領域内に交点が存在しなければ、やはり初期合成重心位置と初期合成重心速度が不適切であり、初期関節角・関節角速度が問題となる。

以上の2項目が、鉄棒間の移動を可能にする実現条件である。実現条件を満たすかを左右する主な要素は、バーから飛び出すときの初期合成重心位置と初期合成重心速度を決定する、初期関節角度と関節角速度である。

5.6 おわりに

本章では、まず空中動作の初期状態と最終状態であるバーを確実に把持する状態について、姿勢と合成重心範囲を示した。次に、ロボットモデルが滞空時間後に目標とする最終姿勢で、鉄棒把持可能合成重心範囲に到達するための鉄棒間移動実現条件を導いた。

段違い平行棒での空中局面を伴う技を実現させるためには、この鉄棒間移動実現条件下で、空中姿勢制御が厳密に行われる必要がある。そこで、次章では空中姿勢制御手法の提案を行う。

第6章 空中姿勢制御

6.1 はじめに

この章では、段違い平行棒運動における空中局面を伴う技を実現するために空中姿勢制御手法の提案を行う。段違い平行棒運動は、空中に固定された2点間の移動という強い拘束を持った運動であることと、宙返り運動を必要とすることから、空中での姿勢制御が厳密に行われる必要がある。そこで新たな制御手法の提案が求められる。

まず、この章で扱う問題の定式化を行う。次に、角運動量保存則を利用し、合成重心まわりの慣性モーメント変化の時間関数と系全体の姿勢角の関係を導く。そして、合成重心まわりの慣性モーメント変化の時間関数は関節角の時間関数から与えられるため、慣性モーメント変化と回転量の関係を満たす関節角変化を表す時間関数を導出し、この時間関数に関節角を追従させ姿勢を制御する制御手法を提案する。

6.2 空中姿勢制御問題の定式化

本研究の空中局面を伴う移動技において要求される空中姿勢の制御とは、空中局面で決められた回数の宙返りを行い、合成重心位置が鉄棒把持可能位置に到達した際、つまり滞空時間後に目標とする最終姿勢に制御することである。そこで、本研究では空中局面における関節軌道の生成問題を検証する。

段違い平行棒運動において、バーから飛び出した瞬間から、系の合成重心は放物線運動をする。この合成重心の放物軌道は飛び出した瞬間の初期合成重心位置ベクトル・速度ベクトルから時間の関数として与えられる。空中を自由落下する物体は、空気抵抗を無視すれば、系の運動量と角運動量は保存され、非ホロノミックな拘束条件下で運動を行う。これは、宇宙空間のような無重力状態での運動と同様な運動である。したがって、自由落下中の物体の運動量と角運動量は、ともに制御できないため、関節トルクのみを用いて姿勢を制御する必要がある。

実際の体操選手は、空中局面において、腕や脚を抱え込んだり、伸ばしたりすることによって、合成重心まわりの慣性モーメントを変化させ、系全体の角速度を制御している。角運動量は慣性モーメントと角速度の積で表される。したがって、腕や脚を抱え込んで、身体全体を縮め、回転軸まわりの慣性モーメントを減少させれば、系全体の角速度は増加する。逆に、腕や脚を伸ばして、

身体全体を直線状態に近づければ、回転軸まわりの慣性モーメントは増加し、系全体の角速度は減少する。よって、合成重心まわりの角速度が適当な値になるように、回転軸まわりの慣性モーメントを操作することにより、適切な姿勢でバーに飛びつき、目標とする回転量を満たすように制御することが可能となる。

第4章でモデル化した剛体3リンクモデルに対し、目標とする回数の宙返りを行い、目標とする最終姿勢でバーに飛びつくための、慣性モーメント変化を表す時間関数の条件を示す。そして、系全体の慣性モーメント変化の時間関数は、関節角の時間関数から与えられたため、この条件を満たす関節角の時間関数を生成し、この関節軌道に関節角を追従させる制御手法を提案する。

6.3 角運動量保存則

本研究は、角運動量保存則がシステムの拘束条件となる。そこで、第4章・Fig.4-1 に示した剛体3リンクモデルの角運動量保存則を示す。

剛体3リンクモデルの合成重心まわりの角運動量 L は次のように表現される。

$$I_1 \cdot \dot{\theta}_1 + I_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + I_3 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + \sum_{i=1}^3 [m_i \{(\mathbf{S}_i - \mathbf{r}_G) \times (\dot{\mathbf{S}}_i - \mathbf{V}_G)\}] = L \quad (6-1)$$

ただし、

I_i : 各リンク重心まわりの慣性モーメント (Nm^2)

\mathbf{S}_i : 各リンク重心位置ベクトル (m)

$\dot{\mathbf{S}}_i$: 各リンク重心速度ベクトル (m/sec)

\mathbf{r}_G : 合成重心位置ベクトル (m)

\mathbf{V}_G : 合成重心速度ベクトル (m/sec)

次に、第4章・Fig.4-1 に示した剛体3リンクモデルに対し、Fig.6-1 のような新たな座標系を設定する。リンク系の合成重心に原点を持ち、第1リンクと共に回転する相対座標系 Σ_u を設定する。この相対座標系 Σ_u の絶対座標系 Σ_g に対する回転角は、第1リンクの絶対角 θ_1 と一致する。また、第1リンクと第2リンクの相対角 θ_2 と、第2リンクと第3リンクの相対角 θ_3 の関節角ベクトルを $\boldsymbol{\theta} = [\theta_2 \ \theta_3]^T$ と定義する。このときの、系の角運動量は式(6-1)以下のように表される。

$$I_g(t) \cdot \dot{\theta}_1(t) + \sum_{i=2}^3 \tilde{I}_i(t) \cdot \dot{\theta}_i(t) = L \quad (6-2)$$

ただし、

I_g : リンク系全体の慣性モーメント

\tilde{I}_i : 別途付録に示す。

である。

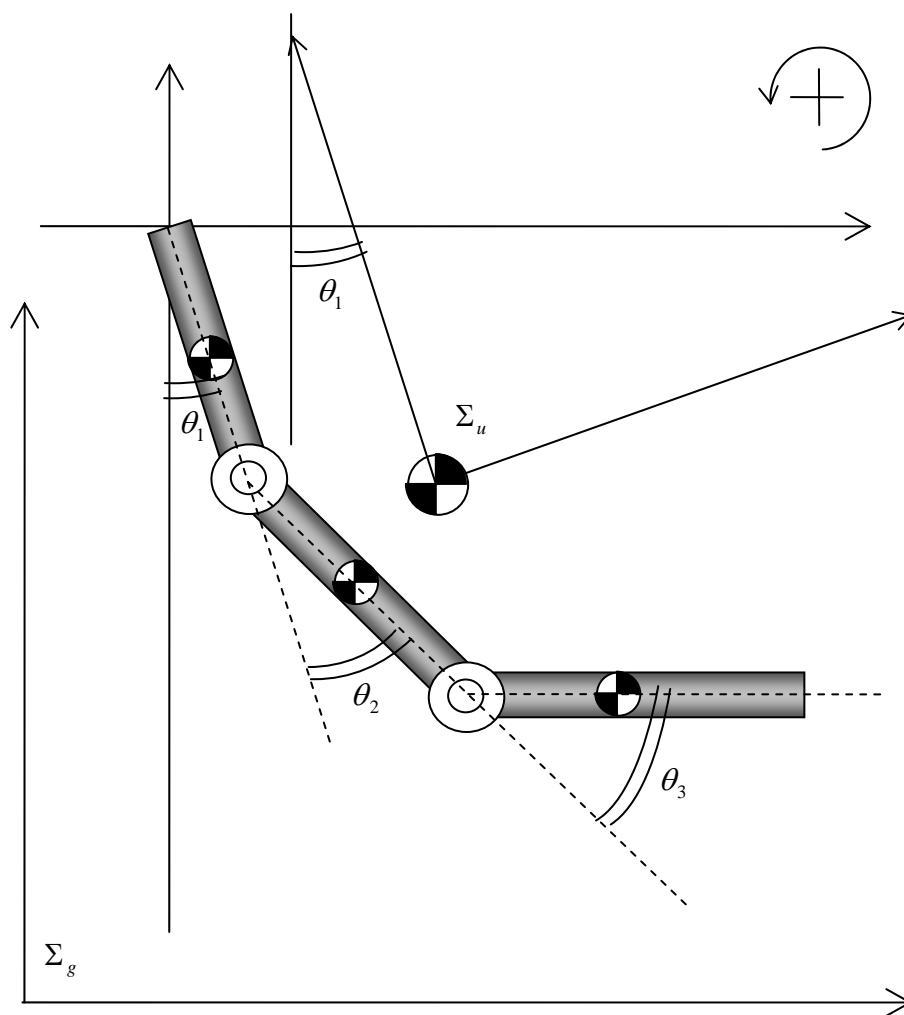


Fig.6-1 A relative coordinate system

6.4 姿勢角の定義

3リンクモデルが時刻 $t = t_0$ において、バーから空中に飛び出し、時刻 $t = t_f$ においてバーに飛びつくとする。式(6-2)の $\dot{\theta}_1$ を時刻 $t = t_0$ から時刻 $t = t_f$ まで積分すると、空中における相対座標系の回転角 θ_1 の変化量 $\theta_1(t_f) - \theta_1(t_0)$ は式(6-3)となる。

$$[\theta_1(t)]_{t_0}^{t_f} = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{L}{I_g(t)} - \sum_{i=2}^3 \frac{\tilde{I}_i(t)}{I_g(t)} \dot{\theta}_i(t) \right) dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{L}{I_g(t)} dt - \int_c \begin{bmatrix} \tilde{I}_2(t) & \tilde{I}_3(t) \\ I_g(t) & I_g(t) \end{bmatrix} d\Theta \quad (6-3)$$

空中における θ_1 の変化量 $\theta_1(t_f) - \theta_1(t_0)$ は式(6-3)のように、関節角ベクトル $\Theta = [\theta_2 \ \theta_3]^T$ の軌道 C に沿う線積分を用いて表わされる。

$$C : \Theta = \Theta(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \quad (6-4)$$

したがって、式(6-2)の角運動量保存則は、時間に関して定積分が不可能な非ホロノミックな拘束条件であり、リンク系の姿勢角は関節ベクトル $\Theta = [\theta_2 \ \theta_3]^T$ の時間的な履歴に依存することになる。

線積分の性質から、Fig.6-2のように、関節角ベクトル Θ の初期値と最終値が同じでも、その軌道パターンが異なると、式(6-3)の右辺第2項の線積分の項は異なる値を持ち、よって姿勢角も異なったものとなる。

一方、Fig.6-3のように関節角ベクトル Θ の初期値と最終値が同じで、行きと帰りが同じ軌道を通る場合、式(6-3)の右辺第2項の線積分の項は0となる。

$$\int_c \begin{bmatrix} \tilde{I}_2(t) & \tilde{I}_3(t) \\ I_g(t) & I_g(t) \end{bmatrix} d\Theta = 0 \quad (6-5)$$

また、その軌道上の各点において、関節角ベクトル速度 $\dot{\Theta}$ によらず、積分値の項はそれぞれ一定の値を持つ。

そこで、Fig.6-4のように、関節角ベクトル Θ が $\Theta = [0 \ 0]^T$ からスタートし、一本の軌道上を通る場合を考える。この場合、式(6-3)は以下ようになる。

$$\theta_1(t_f) + \int_{c_f} \begin{bmatrix} \tilde{I}_2(t) & \tilde{I}_3(t) \\ I_g(t) & I_g(t) \end{bmatrix} d\Theta - \theta_1(t_0) - \int_{c_0} \begin{bmatrix} \tilde{I}_2(t) & \tilde{I}_3(t) \\ I_g(t) & I_g(t) \end{bmatrix} d\Theta = \int_{t_0}^{t_f} \frac{L}{I_g(t)} dt \quad (6-6)$$

ただし， C_f ， C_0 は関節角ベクトル θ の軌道である．

$$C_f : \theta = [0 \ 0]^T \sim \theta(t_f)$$

$$C_0 : \theta = [0 \ 0]^T \sim \theta(t_0)$$

ここで，Fig.6-4の軌道上の，各点における線積分の項の値の物理的な意味について解析する．ベクトル軌道上の，ある点に相当する3リンク系の空中姿勢をFig.6-5の状態Aと定義する．そして静止している状態Aからベクトル軌跡上に沿いながら，3リンク系を一直線に伸ばした状態を状態Bと定義する．すると，線積分の項の物理的な意味は，状態Aの第1リンクと状態Bのなす角度に相当している．そこで，Fig.6-5の状態Bの絶対角を θ_p とし， θ_p を状態Aの姿勢を代表する姿勢角と定義する．このことから，時刻 $t=t_0$ におけるバーから空中に飛び出す際の姿勢角は，式(6-7)のように初期姿勢と線積分の項から求められる．また，時刻 $t=t_f$ におけるバーに飛びつく際の姿勢角は，式(6-8)のように最終姿勢と線積分の項から求められる．

$$\theta_p(t_0) = \theta_1(t_0) + \int_{c_0} \begin{bmatrix} \tilde{I}_2(t) & \tilde{I}_3(t) \\ I_g(t) & I_g(t) \end{bmatrix} d\theta \quad (6-7)$$

$$\theta_p(t_f) = \theta_1(t_f) + \int_{c_f} \begin{bmatrix} \tilde{I}_2(t) & \tilde{I}_3(t) \\ I_g(t) & I_g(t) \end{bmatrix} d\theta \quad (6-8)$$

なお，本研究において， C_0 ， C_f に対応する軌道として複雑な計算をされるため Fig.6-6のように $\theta = [0 \ 0]^T$ と初期姿勢 $\theta_{t_0} = [\theta_{02} \ \theta_{03}]^T$ を直線で結んだ軌道を C_0 とし，Fig.6-7のように $\theta = [0 \ 0]^T$ と最終姿勢 $\theta_{t_f} = [\theta_{t_f2} \ \theta_{t_f3}]^T$ を直線で結んだ軌道を C_f とする．

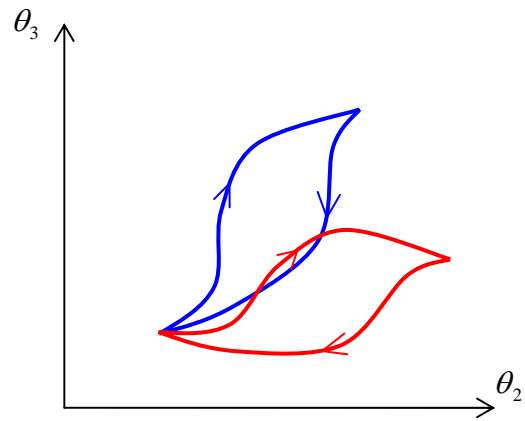


Fig.6-2 A trajectory of different pattern of joint angle vector

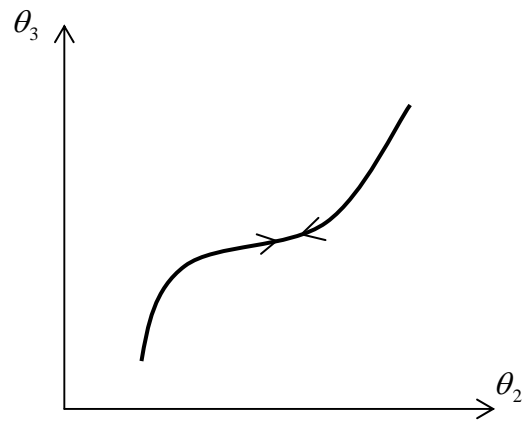


Fig.6-3 A trajectory of joint angle vector taking in a line

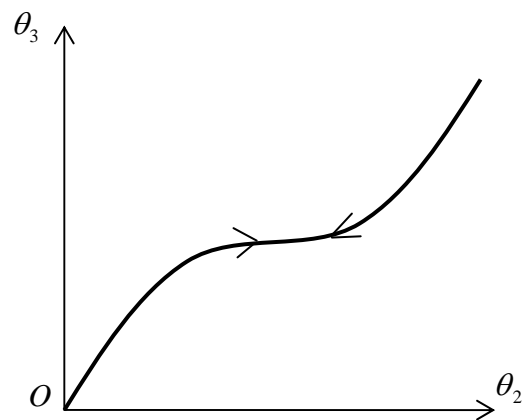


Fig.6-4 A trajectory of joint angle vector taking in a line and starting at origin

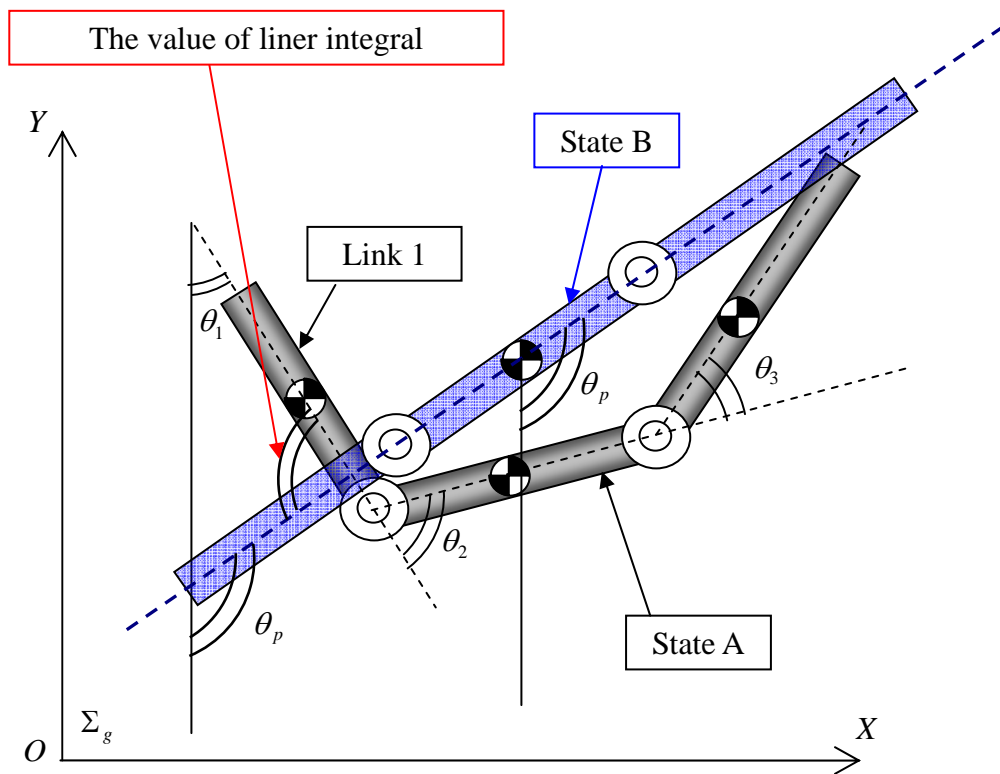


Fig.6-5 The relation among the aerial model posture, posture angle θ_p and the curvilinear integral term

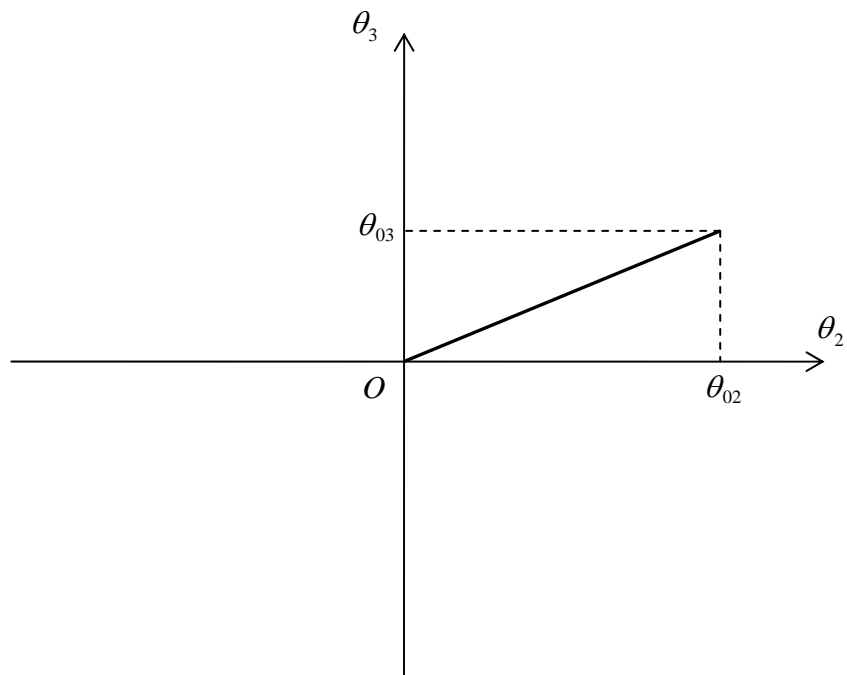


Fig.6-6 Example of a trajectory of joint angle vector C_0 $t = t_0$

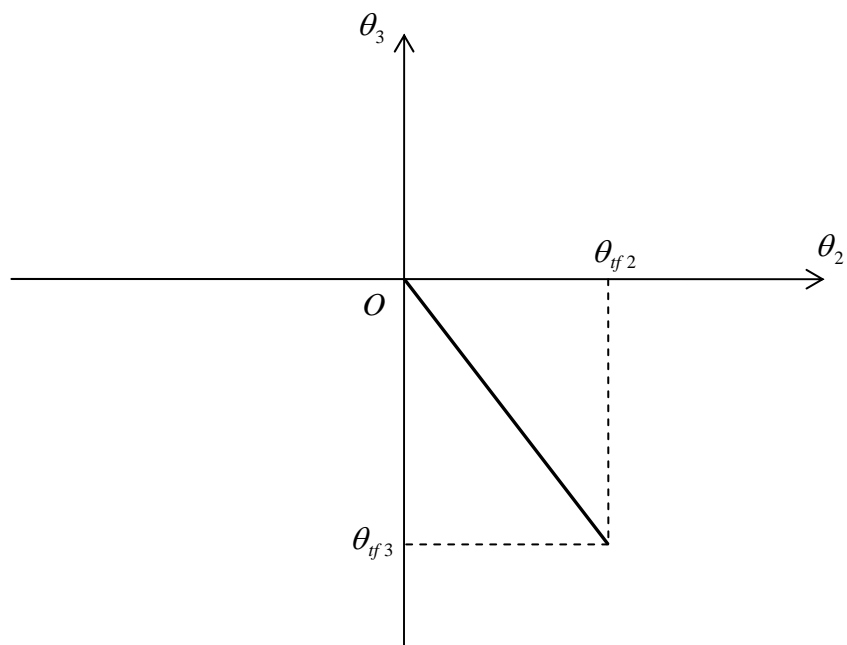


Fig.6-7 Example of a trajectory of joint angle vector C_{tf} $t = t_f$

6.5 慣性モーメント変化と宙返りによる回転量の関係

6.4で定義した姿勢角を用いて、宙返りによる回転量と系の慣性モーメント変化の関係を導く。

宙返りによる回転量は、新たに定義した姿勢角 θ_p を用いて、前節の式(6-6)、式(6-7)、式(6-8)より次式のように与えられる。

$$\begin{aligned}\Theta_p &= \theta_p(t_f) - \theta_p(t_0) \\ &= \theta_1(t_f) + \int_{c_f} \begin{bmatrix} \tilde{I}_2(t) & \tilde{I}_3(t) \\ I_g(t) & I_g(t) \end{bmatrix} d\Theta - \theta_1(t_0) - \int_{c_0} \begin{bmatrix} \tilde{I}_2(t) & \tilde{I}_3(t) \\ I_g(t) & I_g(t) \end{bmatrix} d\Theta \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{L}{I_g(t)} dt\end{aligned}\quad (6-9)$$

ここで、

Θ_p : 宙返りによる回転量 (rad)

また、式(6-9)を変形すると次式となる。

$$\frac{\Theta_p}{L} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{I_g(t)} dt \quad (6-10)$$

以上に示したように、合成重心まわりの慣性モーメント変化と宙返りによる回転量との間には、合成重心まわりの慣性モーメント変化の時間関数の逆数の時間積分値が、系全体の回転量と角運動量の商に等しくなるという関係が導かれる。この関係式より、目標とする初期姿勢でバーから飛び出してから、目標とする回転量を実現し、目標とする最終姿勢でバーに飛びつくための、合成重心まわりの慣性モーメント変化の条件を得た。したがって、回転量を制御するための運動計画問題は、この関係を満たす合成重心まわりの慣性モーメントの時間関数の導出問題となる。

そして、合成重心まわりの慣性モーメント変化の時間関数は、関節角の時間関数から与えられるため、式(6-10)の条件を実現する系全体の慣性モーメント変化の時間の導出問題は、式(6-10)を満たす関節角軌道の生成問題に置き換えることができる。この関節角軌道の導出方法は6.7で述べる。しかし、式(6-10)の関係を用いる際には、合成重心まわりの慣性モーメントの最大値、最小値から制限される制御可能回転量範囲が存在するため、この範囲を6.6で示す。

6.6 制御可能回転量範囲

6.5 式(6-10)の関係を用いる際には、合成重心まわりの慣性モーメントの最大値、最小値から制限される制御可能回転量範囲が存在する。

まず 6.5 式(6-10)の関係を再び示すと、合成重心まわりの慣性モーメント変化、宙返りによる回転量、角運動量と滞空時間との間には、合成重心まわりの慣性モーメント変化の時間関数の逆数の時間積分値が、系全体の回転量と角運動量の商に等しくなるという関係である。6.5 式(6-10)を以下に再び示す。

$$\frac{\Theta_p}{L} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{I_g(t)} dt \quad (6-10)$$

次に、合成重心まわりの慣性モーメント変化は、関節を最も伸ばしリンクが直線になった状態のときの最大値 $I_{g \max}$ と身体を最も抱え込んだときの最小値 $I_{g \min}$ の範囲内に限定される。つまり、 $I_{g \min} \leq I_g \leq I_{g \max}$ 以外の値をとることは不可能である。したがって、空中での系全体の慣性モーメント変化が常に最大値 $I_{g \max}$ で一定あるとき、宙返りによる回転量は最小となる。また、空中での系全体の慣性モーメント変化が常に最小値 $I_{g \min}$ で一定あれば、宙返りによる回転量は最大となる。最大値 $I_{g \max}$ と最小値 $I_{g \min}$ の詳細は Table.6-1 に示す。

$$\Theta_{p \min} = L \cdot \left(\frac{1}{I_{g \max}} \right) \cdot (t_f - t_0) \quad (6-11)$$

$$\Theta_{p \max} = L \cdot \left(\frac{1}{I_{g \min}} \right) \cdot (t_f - t_0) \quad (6-12)$$

以上のことから、式(6-10)を用いる際の系全体の慣性モーメントの最大値、最小値から求まる制御可能回転量範囲は Fig.6-8 のようになる。系全体の慣性モーメントの最大値 $I_{g \max}$ と最小値 $I_{g \min}$ から表される2つの局面に挟まれた空間内が制御可能な部分であり、バーから飛び出した瞬間の角運動量と滞空時間から、系全体の慣性モーメントを操作することによる制御可能な回転量の範囲を求めることができる。式(6-9)より導出された宙返りによる回転量が制御可能回転量範囲に存在していなければ、この宙返りによる回転量は実現不可能である。

回転量が、制御可能回転量範囲に存在していない場合には、角運動量もしくは滞空時間を適切な値に変更しなければならないことになり、ゆえにバーから飛び出す際の初期姿勢・初期関節角速度を変更する必要がある。また、初期姿勢・初期関節角速度を変更することは、初期合成重心位置と初期合成重心速度を変更することにもなるため、第5章で示した鉄棒間移動実現条件にも影響を与えることを忘れてはならない。

Table.6-1 The maximum and minimum values of the moment of inertia of the whole body

I_g	θ_2	θ_3
$I_{g \max} = 0.04010 \text{ [kgm}^2\text{]}$	0 [rad]	0 [rad]
$I_{g \min} = 0.00992 \text{ [kgm}^2\text{]}$	$\pi \text{ [rad]}$	$\pi \text{ [rad]}$

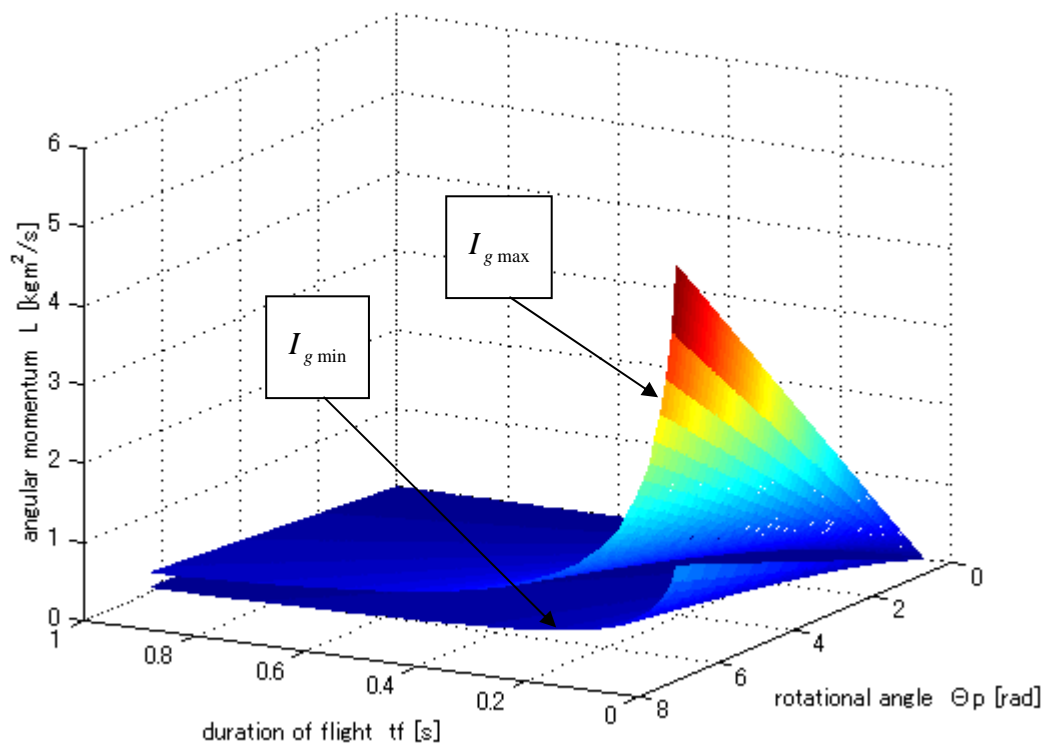


Fig.6-8 The controllable region rotational angle Θ_p during somersault

6.7 目標関節軌道生成法

段違い平行棒運動ロボットの空中局面における運動計画問題は、式(6-10)を満たす合成重心まわりの慣性モーメント変化を表す時間関数を導出することとなる。ただし、合成重心まわりの慣性モーメント変化を表す時間関数は、関節軌道の時間関数 $\Phi(t) = [\theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$ で表現できるため、最終的に段違い平行棒運動ロボットの空中局面における運動計画問題は、式(6-10)を満たす関節軌道の時間関数を導出することと整理することができる。

しかしながら、式(6-10)を満たす関節軌道の時間関数 $\Phi = [\theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$ は無数に存在し、解析的に一意に決定することができない。そのため、関節角に同相運動拘束・逆相運動拘束を与え、解析的に導出されることがある。しかし、この導出方法では、拘束条件によって人間のような自由な動きを再現できないと考えられる。そこで、本研究では人間の自由な動きを再現するために、関節角に拘束条件を与えず、関節軌道を生成する手法を考える。

具体的には、関節角の時間関数を有限次元の正規直交基底の一次結合で近似し、式(6-10)の条件を満たすように設定した評価関数を最小にし、かつ関節軌道の境界条件（初期条件、最終条件）を満たすような正規直交基底係数を求める方法である。

6.7.1 評価関数

まず、関節軌道の時間関数を $\Phi(t) = [\theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$ とし、評価関数を次のように設定する。ただし、滞空時間は鉄棒間移動条件の際に導出され、宙返りによる回転量は式(6-9)を用いて初期姿勢と最終姿勢より導出されるため、これらの値は既定である。合成重心まわりの慣性モーメントと関節軌道の関係は付録を参照していただきたい。

$$J[\Phi(t)] = \left(\frac{\Theta_p}{L} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{I_g(\Phi(t))} dt \right)^2 \quad (6-13)$$

しかし、この評価関数を最小にする関節軌道の時間関数を直接求めることは困難である。そこで、関節軌道 $\Phi(t) = [\theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$ を有限次元の正規直交基底の一次結合で近似することにより、評価関数を最小に関節軌道の時間関数を求める最小化問題を、評価関数を最小にする正規直交基底係数を求める最小化問題に置き換える。

関節軌道 $\Phi(t) = [\theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$ は、式(6-14)の性質を持つ正規直交基底 e_i を用いて、式(6-15)のように表現することができる。

$$\int e_i(t) \cdot e_j(t) dt = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (6-14)$$

$$\Phi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot e_i(t) \quad (6-15)$$

ここで，関節軌道 $\Phi(t) = [\theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$ を無限個の正規直交基底 e_i によって完全に記述する代わりに，有限次元の正規直交基底 e_i で近似することにする．すると，関節軌道 $\Phi(t) = [\theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$ は次式のように表される．

$$\Phi(t) = \sum_{i=0}^N \alpha_i \cdot e_i(t) = \alpha \cdot E(t) \quad (6-16)$$

ただし，

$$\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_N] \quad : \text{正規直交基底係数行列}$$

$$E(t) = [e_0(t), e_1(t), e_2(t), \dots, e_{N-1}(t), e_N(t)]^T \quad : \text{正規直交基底ベクトル}$$

である．

したがって，式(6-13)の評価関数 $J[\Phi(t)]$ は正規直交基底係数行列を用いて次のように変形することができる．

$$J[\alpha] = \left(\frac{\Theta_p}{L} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{I_g(\alpha)} dt \right)^2 \quad (6-17)$$

以上のことより，式(6-17)の評価関数を最小にする正規直交基底係数を探索アルゴリズムまたは組み合わせ最適化アルゴリズムを用いて探索すればよい．本研究では，評価関数を最小にする正規直交基底係数の探索には，準ニュートン法(BFGS 法)を用いる．Table.6-2 に示すように，探索アルゴリズムや組み合わせ最適化アルゴリズムには，様々なアルゴリズム²¹⁾²²⁾が存在する．ただし，すべてのアルゴリズムが最適解への収束が保障されるわけではなく，評価関数や初期値の設定が問題となる．また，経験的にどのアルゴリズムを用いるかを決定することも多く，本研究で使用するアルゴリズムの選定が問題となる．Table.6-2 に示した多くのアルゴリズムは，評価関数の勾配やヘッシアンを求めなければならず，計算量が多くことや，評価関数が微分可能であることが条件としてあるため，使用することは難しい．しかし，準ニュートン法はヘッシア

ンを直接計算せず，その近似行列を評価関数の勾配の計算値から求めていく方法であり，一般的な評価関数に適用可能である．また，準ニュートン法はほぼ大域的収束性をもつとともに，計算効率（収束の速さ）が優れており，各種の数値実験の結果から，最も有効なアルゴリズムの一つであるとされている．

Table.6-2 Search algorithms and combination optimization algorithms

<p>➤ 探索アルゴリズム</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 等間隔 V 型 3 点探索法 ・ フィボナッチ法 ・ ニュートン法 ・ 最急降下法 ・ 共役方向法 Powell 法アルゴリズム ・ 共役勾配法 Fletsher-Reeves 法 (FR 法) Polak-Ribiere-Polyak 法 ・ 修正ニュートン法 ・ 準ニュートン法 Davidon-Fletcher-Powell 法 (DEP 法) Broyden-Fletcher-Goldfard-Shanno 法 (BFGS 法) ・ 黄金分割法 ・ 放物線近似法 ・ 近似ニュートン法 ・ 修正 Powell 法
<p>➤ 組合せ最適化アルゴリズム</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ シミュレーティド・アニーリング手法 (SA) ・ 遺伝的アルゴリズム (GAs) ・ タブー・サーチ手法 (TS) ・ シミュレーティド・エボリューション手法 (SimE) ・ 確率的進化手法 (StocE)

6.7.2 チェビシエフ多項式による関節軌道の近似

本研究では，正規直交基底にチェビシエフ多項式²³⁾²⁴⁾を適用し，関節軌道 $\Phi(t) = [\theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$ を近似する．チェビシエフ多項式 $T_k(t)$ は， $-1 \leq t \leq 1$ の範囲で正規直交系をなす．(付録参照) また，漸化式は式(6-18)となる．

$$T_{k+1}(t) = 2 \cdot t \cdot T_k(t) - T_{k-1}(t) \quad (6-18)$$

したがって，関節軌道 $\Phi(t) = [\theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$ は次のように表現できる．

$$\Phi(t) = \alpha_0 T_0(t) + \alpha_1 T_1(t) + \alpha_2 T_2(t) + \cdots + \alpha_{N-1} T_{N-1}(t) + \alpha_N T_N(t) = \sum_{i=0}^N \alpha_i T_i(t) \quad (6-19)$$

また関節角速度は式(6-19)を t について微分して次のように与えられる．

$$\dot{\Phi}(t) = \alpha_0 \dot{T}_0(t) + \alpha_1 \dot{T}_1(t) + \alpha_2 \dot{T}_2(t) + \cdots + \alpha_{N-1} \dot{T}_{N-1}(t) + \alpha_N \dot{T}_N(t) = \sum_{i=0}^N \alpha_i \dot{T}_i(t) \quad (6-20)$$

本研究でチェビシエフ多項式 $T_k(t)$ は次式のように $T_{10}(t)$ までを用いる．

$$E(t) = [T_0(t), T_1(t), T_2(t), T_3(t), T_4(t), T_5(t), T_6(t), T_7(t), T_8(t), T_9(t), T_{10}(t)]^T \quad (6-21)$$

$$T_0(t) = 1$$

$$T_1(t) = t$$

$$T_2(t) = 2t^2 - 1$$

$$T_3(t) = 4t^3 - 3t$$

$$T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$$

$$T_5(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t$$

$$T_6(t) = 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1$$

$$T_7(t) = 64t^7 - 112t^5 + 56t^3 - 7t$$

$$T_8(t) = 128t^8 - 256t^6 + 160t^4 - 32t^2 + 1$$

$$T_9(t) = 256t^9 - 576t^7 + 432t^5 - 120t^3 + 9t$$

$$T_{10}(t) = 512t^{10} - 1280t^8 + 1120t^6 - 400t^4 + 50t^2 - 1$$

6.7.3 境界条件を満たす正規直交基底係数の決定法

空中動作は，バーから飛び出す初期時刻 $t = t_0$ から，ふたたびバーに飛びつく最終時刻 $t = t_f$ までに，初期姿勢から目標とする最終姿勢へと姿勢を変化させる。しかしながら，式(6-16)の関節軌道の近似式は，空中動作の境界条件を満足しておらず，式(6-17)の評価関数を最小にする正規直交基底係数行列を獲得したとしても，境界条件を満たした関節軌道を生成することができない。そこで，あらかじめ境界条件を満たすように正規直交基底係数行列を決定する方法を説明する。

まず，本研究の関節軌道生成問題における境界条件は，第5章の鉄棒間移動実現条件を満たすように決定された初期姿勢・初期関節角速度と最終姿勢である。したがって，境界条件は次のようになる。

<初期条件>

$$\Phi(t_0) = [\theta_{02}(t) \quad \theta_{03}(t)]^T, \quad \dot{\Phi}(t_0) = [\dot{\theta}_{02}(t) \quad \dot{\theta}_{03}(t)]^T \quad (6-22-1)$$

<最終条件>

$$\Phi(t_f) = [\theta_{f2}(t) \quad \theta_{f3}(t)]^T, \quad \dot{\Phi}(t_f) = [\dot{\theta}_{f2}(t) \quad \dot{\theta}_{f3}(t)]^T \quad (6-22-2)$$

次に，式(6-16)の関節軌道の近似式に，式(6-22)の境界条件である $\Phi(t_0)$ ， $\Phi(t_f)$ ， $\dot{\Phi}(t_0)$ ， $\dot{\Phi}(t_f)$ をそれぞれ代入する。すると， $(N+1)$ 個の正規直交基底ベクトルをもつ4個の方程式ができる。したがって，4個の正規直交基底ベクトルを， $(N-3)$ 個の正規直交基底ベクトルの関係式で表し， $(N-3)$ 個の正規直交基底ベクトルを，準ニュートン法（BFGS法）を用いて，式(6-17)の評価関数 $J[\alpha]$ を最小にするように決定すればよい。

この方法により境界条件を確実に満たす関節軌道を生成することができる。式(6-17)の評価関数に境界条件を考慮した項を含めていないのはこのためである。

本研究の関節軌道をチェビシエフ多項式 $T_{10}(t)$ までで近似した場合を考える。チェビシエフ多項式の高次成分の4つの係数ベクトル α_7 ， α_8 ， α_9 ， α_{10} を，式(6-19)および式(6-20)の近似式に，式(6-22)の境界条件を代入して得られた式(6-23)の4つの方程式より決定する。この連立方程式を解くことにより，4つの係数ベクトルは，それぞれ境界条件 $\Phi(t_0)$ ， $\Phi(t_f)$ ， $\dot{\Phi}(t_0)$ ， $\dot{\Phi}(t_f)$ と残りの7つの係数ベクトル α_0 ， α_1 ， α_2 ， α_3 ， α_4 ， α_5 ， α_6 から計算することができる。そして残りの7つの係数ベクトルを，式(6-17)の評価関数を最小にするように決定する。

$$\begin{aligned}
 \Phi(t_0) &= \alpha_0 T_0(t_0) + \alpha_1 T_1(t_0) + \alpha_2 T_2(t_0) + \alpha_3 T_3(t_0) + \alpha_4 T_4(t_0) + \alpha_5 T_5(t_0) \\
 &\quad + \alpha_6 T_6(t_0) + \alpha_7 T_7(t_0) + \alpha_8 T_8(t_0) + \alpha_9 T_9(t_0) + \alpha_{10} T_{10}(t_0) \\
 \Phi(t_f) &= \alpha_0 T_0(t_f) + \alpha_1 T_1(t_f) + \alpha_2 T_2(t_f) + \alpha_3 T_3(t_f) + \alpha_4 T_4(t_f) + \alpha_5 T_5(t_f) \\
 &\quad + \alpha_6 T_6(t_f) + \alpha_7 T_7(t_f) + \alpha_8 T_8(t_f) + \alpha_9 T_9(t_f) + \alpha_{10} T_{10}(t_f) \\
 \dot{\Phi}(t_0) &= \alpha_0 \dot{T}_0(t_0) + \alpha_1 \dot{T}_1(t_0) + \alpha_2 \dot{T}_2(t_0) + \alpha_3 \dot{T}_3(t_0) + \alpha_4 \dot{T}_4(t_0) + \alpha_5 \dot{T}_5(t_0) \\
 &\quad + \alpha_6 \dot{T}_6(t_0) + \alpha_7 \dot{T}_7(t_0) + \alpha_8 \dot{T}_8(t_0) + \alpha_9 \dot{T}_9(t_0) + \alpha_{10} \dot{T}_{10}(t_0) \\
 \dot{\Phi}(t_f) &= \alpha_0 \dot{T}_0(t_f) + \alpha_1 \dot{T}_1(t_f) + \alpha_2 \dot{T}_2(t_f) + \alpha_3 \dot{T}_3(t_f) + \alpha_4 \dot{T}_4(t_f) + \alpha_5 \dot{T}_5(t_f) \\
 &\quad + \alpha_6 \dot{T}_6(t_f) + \alpha_7 \dot{T}_7(t_f) + \alpha_8 \dot{T}_8(t_f) + \alpha_9 \dot{T}_9(t_f) + \alpha_{10} \dot{T}_{10}(t_f)
 \end{aligned} \tag{6-23}$$

6.7.4 目標関節軌道生成法の有効性

この節では、これまでに説明した目標関節軌道生成法の有効性を検証する。Table.6-3, Table.6-5, Table.6-7 の条件に対して、目標関節軌道を生成した。これらの条件は、境界条件、角運動量、宙返りによる回転量、滞空時間を同一条件とし、評価関数の探索を開始するチェビシェフ多項式の係数ベクトルの初期値をそれぞれ異なる条件として設定している。生成結果が Table.6-4, Fig.6-9(a)(b)(c)と Table.6-6, Fig.6-10(a)(b)(c)と Table.6-8, Fig.6-11(a)(b)(c)である。

まず、式(6-10)を満たす関節軌道の時間関数 $\phi = [\theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$ を、正規直交基底であるチェビシェフ多項式で近似し、評価関数を最小にする係数ベクトルを求める最小化問題として導出することで、関節角に同相運動拘束・逆相運動拘束を与えることなく軌道を一意に決定することが可能となった。

次に、すべての生成結果について考えると、提案した関節軌道生成法により滑らかな軌道を生成できていることが確認できる。また、評価関数の設定において関節の可動範囲を考慮した項を含めなかったが、関節の可動範囲内に軌道を止めることができている。そして、境界条件については、6.7.3 で示したチェビシェフ多項式の高次成分の係数ベクトルをあらかじめ境界条件を満たすように設定する方法により、境界条件を確実に満たした軌道を得られていることが確認できる。

さらに、Fig.6-9, Fig.6-10, Fig.6-11 を比較する。これらの生成された軌道の異なる要素は、評価関数を最小にする係数ベクトルの探索を開始するチェビシェフ多項式の係数ベクトルの初期値が異なることであった。このことから、評価関数を最小にする係数ベクトルの探索を開始するチェビシェフ多項式の係数ベクトルの初期値を異なる値にすることによって、異なる関節軌道を得ることができることがわかり、適当な初期値を与えることで、様々な技に対して、目標とする人間の動きに近い関節軌道を得ることが可能であると考えられる。

以上より、提案した空中局面における関節角軌道の生成法は、有効であるといえる。

Table.6-3 The condition for target trajectory generation of joint angles

Initial joint angle	(deg)	$\Phi(t_0) = [0, 0]^T$
Final joint angle	(deg)	$\Phi(t_f) = [0, 0]^T$
Initial angular velocity	(deg/sec)	$\dot{\Phi}(t_0) = [0, 0]^T$
Final angular velocity	(deg/sec)	$\dot{\Phi}(t_f) = [0, 0]^T$
Angular momentum	(kgm^2 / sec)	$L = 0.30$
Rotational angle	(deg)	$\Theta_p = 135$
Initial time	(sec)	$t_0 = 0.0$
Final time	(sec)	$t_f = 0.3$
Initial value for search algorithm		$\alpha_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Table.6-4 The result of the orthonormal base coefficient vectors

Orthonormal base coefficient vectors	$\alpha_0 = \begin{bmatrix} 2.4769 \\ 3.6524 \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1.2034 \\ 1.3652 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -0.2340 \\ -1.2162 \end{bmatrix}$ $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0.5621 \\ 0.2136 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1.6743 \\ 2.2109 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 1.3114 \\ 1.5592 \end{bmatrix}, \alpha_6 = \begin{bmatrix} 0.8260 \\ 0.6875 \end{bmatrix}$ $\alpha_7 = \begin{bmatrix} 12.0871 \\ 20.0441 \end{bmatrix}, \alpha_8 = \begin{bmatrix} -5.9609 \\ -10.6364 \end{bmatrix}, \alpha_9 = \begin{bmatrix} 8.7262 \\ 14.6431 \end{bmatrix}, \alpha_{10} = \begin{bmatrix} -2.4017 \\ -4.2443 \end{bmatrix}$
--------------------------------------	--

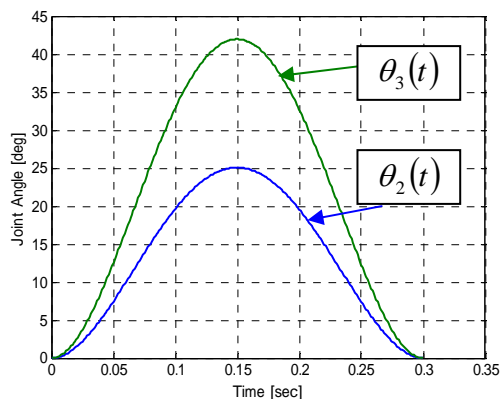


Fig.6-9-(a) Joint angles

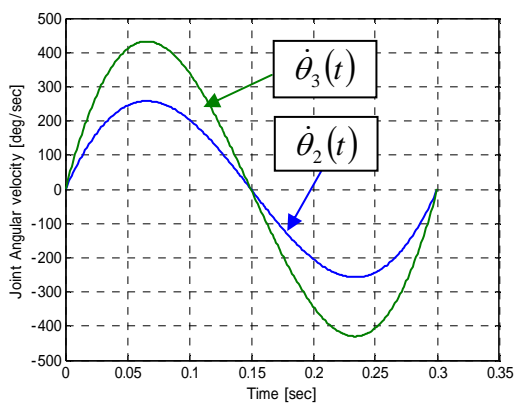


Fig.6-9-(b) Angular velocities

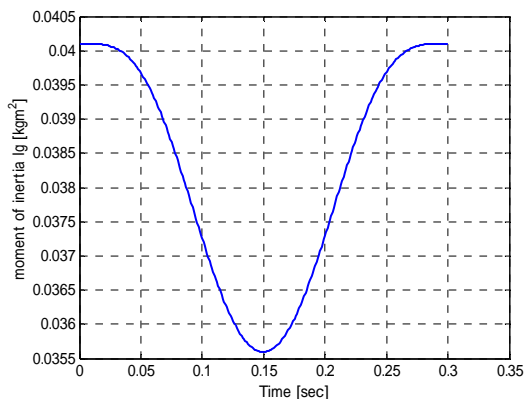


Fig.6-9-(c) Moment of Inertia

**Fig.6-9 The generated result of target trajectory of joint angles
used method of approximation joint angle and assessment function
Condition : Table6-3**

Table.6-5 The condition for target trajectory generation of joint angles

Initial joint angle	(deg)	$\Phi(t_0) = [0, 0]^T$
Final joint angle	(deg)	$\Phi(t_f) = [0, 0]^T$
Initial angular velocity	(deg/sec)	$\dot{\Phi}(t_0) = [0, 0]^T$
Final angular velocity	(deg/sec)	$\dot{\Phi}(t_f) = [0, 0]^T$
Angular momentum	(kgm^2 / sec)	$L = 0.30$
Rotational angle	(deg)	$\Theta_p = 135$
Initial time	(sec)	$t_0 = 0.0$
Final time	(sec)	$t_f = 0.3$
Initial value for search algorithm		$\alpha_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Table.6-6 The result of the orthonormal base coefficient vectors

Orthonormal base coefficient vectors	$\alpha_0 = \begin{bmatrix} -2.2092 \\ -3.1544 \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0.8338 \\ 0.7039 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2.0105 \\ 2.8004 \end{bmatrix}$ $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1.3578 \\ 1.6375 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 0.4474 \\ 0.0154 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 0.7455 \\ 0.5466 \end{bmatrix}, \alpha_6 = \begin{bmatrix} 1.1430 \\ 1.2548 \end{bmatrix}$ $\alpha_7 = \begin{bmatrix} -11.9995 \\ -18.3979 \end{bmatrix}, \alpha_8 = \begin{bmatrix} 8.0707 \\ 11.8322 \end{bmatrix}, \alpha_9 = \begin{bmatrix} -9.3872 \\ -14.1455 \end{bmatrix}, \alpha_{10} = \begin{bmatrix} 3.1554 \\ 4.6380 \end{bmatrix}$
--------------------------------------	--

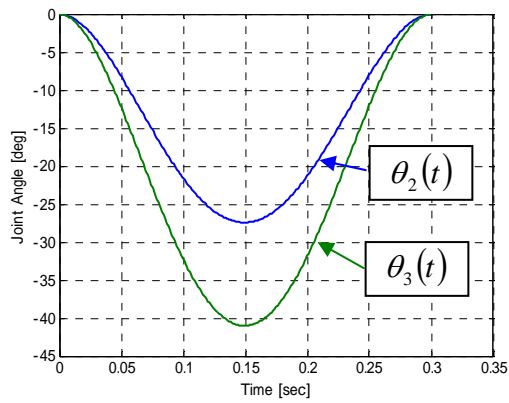


Fig.6-10-(a) Joint angles

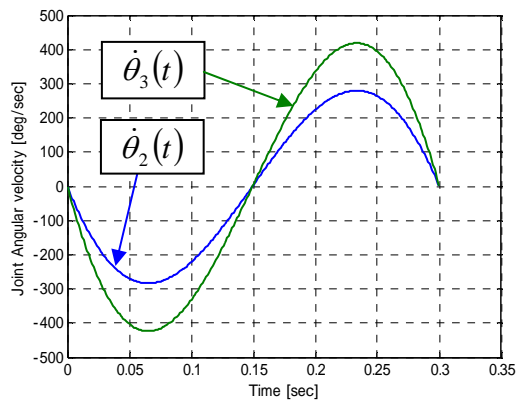


Fig.6-10-(b) Angular velocities

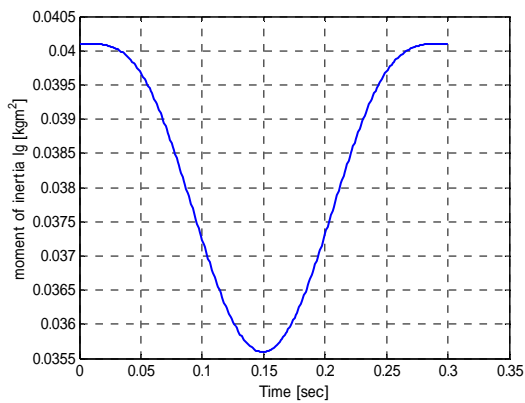


Fig.6-10 -(c) Moment of Inertia

**Fig.6-10 The generated result of target trajectory of joint angles used method of approximation joint angle and assessment function
Condition : Table6-5**

Table.6-7 The condition for target trajectory generation of joint angles

Initial joint angle	(deg)	$\Phi(t_0) = [0, 0]^T$
Final joint angle	(deg)	$\Phi(t_f) = [0, 0]^T$
Initial angular velocity	(deg/sec)	$\dot{\Phi}(t_0) = [0, 0]^T$
Final angular velocity	(deg/sec)	$\dot{\Phi}(t_f) = [0, 0]^T$
Angular momentum	(kgm^2 / sec)	$L = 0.30$
Rotational angle	(deg)	$\Theta_p = 135$
Initial time	(sec)	$t_0 = 0.0$
Final time	(sec)	$t_f = 0.3$
Initial value for search algorithm		$\alpha_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Table.6-8 The result of the orthonormal base coefficient vectors

Orthonormal base coefficient vectors	$\alpha_0 = \begin{bmatrix} 1.0612 \\ -3.7695 \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1.0086 \\ 0.6194 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0.9489 \\ 3.3145 \end{bmatrix}$ $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0.9816 \\ 1.8194 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1.0277 \\ -0.2658 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 1.0131 \\ 0.4172 \end{bmatrix}, \alpha_6 = \begin{bmatrix} 0.9930 \\ 1.3276 \end{bmatrix}$ $\alpha_7 = \begin{bmatrix} 2.5042 \\ -22.5616 \end{bmatrix}, \alpha_8 = \begin{bmatrix} -0.3290 \\ 14.2804 \end{bmatrix}, \alpha_9 = \begin{bmatrix} 1.6000 \\ -17.2420 \end{bmatrix}, \alpha_{10} = \begin{bmatrix} -0.1821 \\ 5.6030 \end{bmatrix}$
--------------------------------------	---

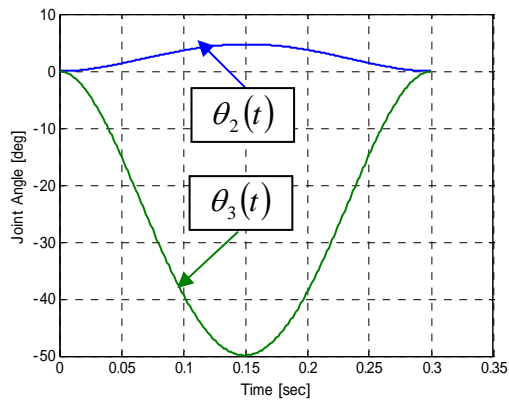


Fig.6-11 (a) Joint angles

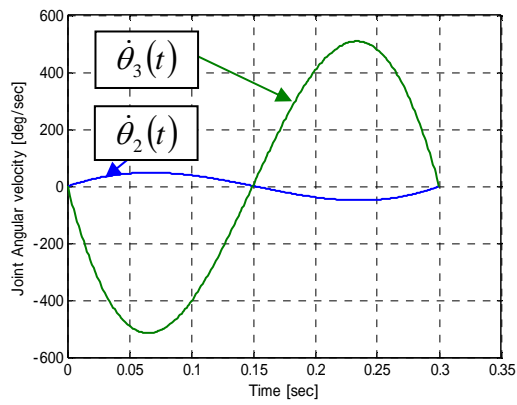


Fig.6-11 (b) Angular velocities

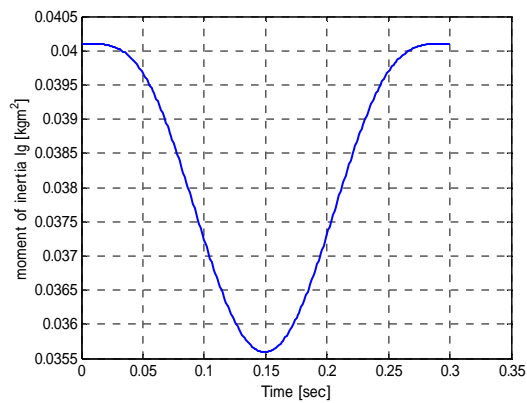


Fig.6-11 (c) Moment of Inertia

**Fig.6-11 The generated result of target trajectory of joint angles used method of approximation joint angle and assessment function
Condition : Table6-7**

6.8 おわりに

本章では、空中姿勢の制御手法について述べた。

まず、システムの拘束条件である角運動量保存則から、角運動量、宙返りによる回転量、合成重心まわりの慣性モーメントとの間には、慣性モーメント変化の時間積分値が、宙返りによる回転量と角運動量の商に等しくなるという関係を導き出した。

そして、この関係を満たす関節軌道生成問題では、人間の自由な運動を再現するため、関節角に同相運動拘束・逆相運動拘束を与えず関節軌道を生成する手法をとり、最小化問題を適用した。関節軌道を正規直交基底で近似し、評価関数を最小にする正規直交基底係数を導出する手法である。

次章では、コンピュータシミュレーションにより、本章で提案した空中姿勢制御手法の有効性を検証する。

第7章 コンピュータシミュレーションによる検証

7.1 はじめに

第5章では、鉄棒間の移動を可能にするための移動実現条件を示し、第6章では適切な姿勢で鉄棒に到達し、宙返りでの目標とする回転量を実現させるための空中姿勢制御方法の提案を行った。

本章では、提案する空中姿勢制御手法の有効性を検証するため、ロボットに実現させる目標演技を「高棒内向き懸垂 - 後方宙返り下移動 - 低棒浮支持（パク宙返りと呼ばれ、高棒から低棒へ移動する空中局面で宙返りを行う技）」とし、第4章で示した剛体3リンク段違い平行棒運動ロボットモデルに対して、コンピュータシミュレーションを行った結果を報告する。

7.2 シミュレーション方法

シミュレーションには MSC Software 社の力学系シミュレーションソフトである Interactive Physics（以下 IP）を使用した。本ソフトは2次元平面内のみではあるが、画面上に作成したオブジェクトを自ら運動方程式等を立てずに、シミュレーションによる検証が行えるのが特徴である。運動方程式の解法には、IP に装備されている Kutta-Merson 法を用い、刻みを 0.0001 と設定した。IP についての詳細は別途付録を参照していただきたい。

また、IP と The MathWorks 社の MATLAB は DDE(Dynamic Data Exchange)機能により、リアルタイムでの相互リンクが可能であり、本シミュレーションはこの機能を使用して行う。

目標関節軌道の計算と制御系の数値計算を MATLAB で行い、DDE 機能を利用して、IP で作成したモデルのアクチュエータに対して MATLAB で計算したトルクを入力する。制御系の計算に必要な測定値は、逆に IP から DDE 機能によって MATLAB に返している。つまり、物理運動についての計算を行う IP に対し、MATLAB がコントローラとなっているということになる。

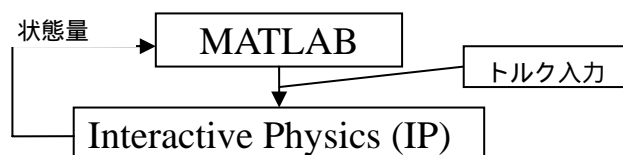


Fig.7-1 A relation between the MATLAB and the Interactive Physics

7.3 シミュレーションの流れ

シミュレーションの流れを Fig.7-2 に示す．

まず 行程 から行程 を実行することにより 鉄棒間移動実現条件を得る．
そして，この条件を用いて，空中局面における目標関節軌道を生成する．

本研究では，各行程の処理を一連の流れで実行できるように，プログラムはすべて The MathWorks 社の MATLAB で実装した．プログラムの詳細は別途付録を参照していただきたい．

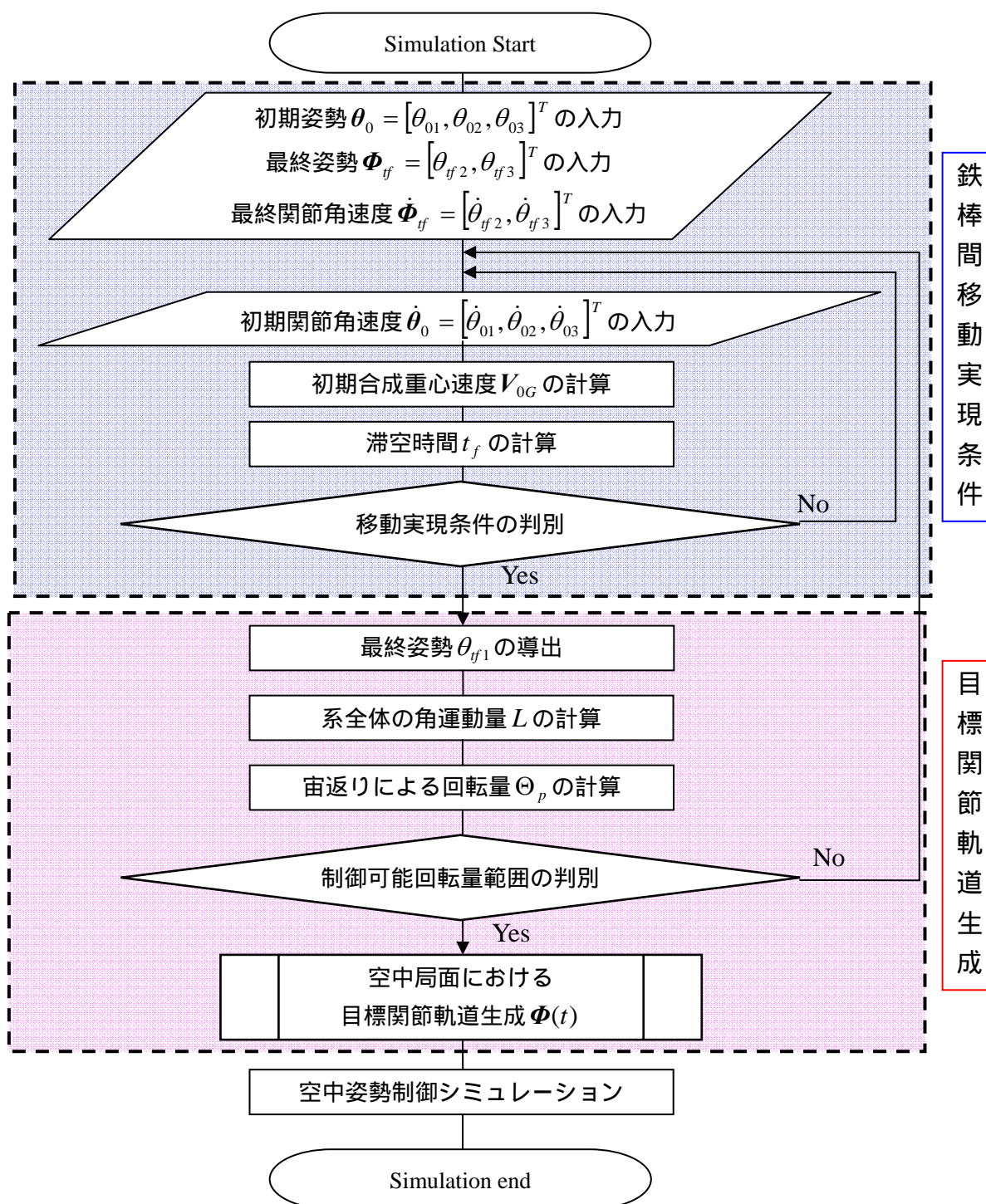


Fig.7-2 The flowchart of aerial posture control simulation

7.4 制御系設計

空中姿勢制御手法は、第6章の方法で生成した関節軌道に関節角を追従させ姿勢を制御する手法である。またシミュレーションでは、関節のアクチュエータに入力としてトルクを与え、姿勢制御する。そこで、本研究では2種類の制御系を用いた。1つ目は比例+微分制御（PD制御）である。2つ目は、空中でのリンク間の干渉が大きいと考え、計算トルク法（線形化とサーボ補償の2段階制御）を用いた。

7.4.1 PD 制御系

目標関節軌道がシミュレーション上の実際の関節角度と比較され、その角度の差に比例ゲインが乗じる。また、目標関節角速度がシミュレーション上の関節角速度と比較され、関節角速度の差に微分ゲインが乗じる。この2つを加えたトルクがアクチュエータに出力される。

$$\tau = K_p(\Phi_d - \Phi) + K_d(\dot{\Phi}_d - \dot{\Phi}) \quad (7-1)$$

ここで、

- K_p : 比例ゲイン行列
- K_d : 微分ゲイン行列
- Φ_d : 目標関節軌道
- $\dot{\Phi}_d$: 目標関節角速度
- Φ : 関節角度測定値
- $\dot{\Phi}$: 関節角速度測定値

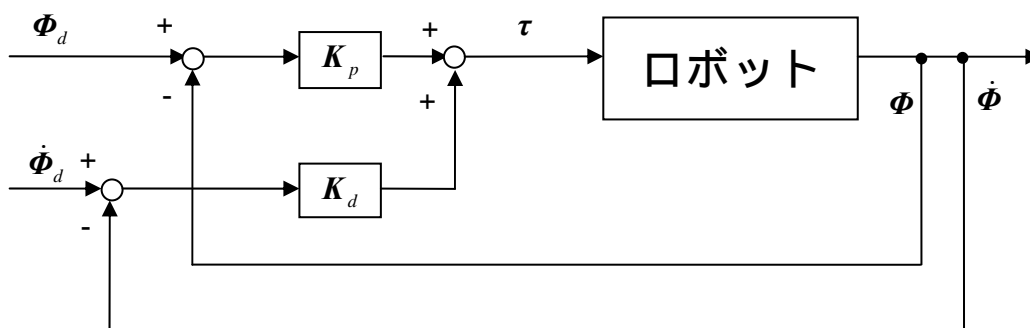


Fig.7-3 The PD Controller

7.4.2 計算トルク法

計算トルク法(線形化とサーボ補償の2段階制御)²⁵⁾とは,補償入力により,システムのダイナミクスを打ち消す方法であり,マニピュレータの制御において,コリオリ力や遠心力などによるリンク間の非線形な干渉を補償する方法として用いられている.

本研究の剛体3リンクモデルに計算トルク法を用いることにより,空中でのリンク間の非線形な干渉を補償する.剛体3リンクモデルでは,手先の座標 (x, y) と第1リンクの絶対角 θ_1 が可制御ではなく,相対角 θ_2, θ_3 が可制御な状態である.そこで,可制御である相対角 θ_2, θ_3 が制御入力に対し,線形な動特性を持つように補償入力を行う.

第4章式(3-1)に示したように,剛体3リンクモデルの運動方程式は,次のようになる.

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + g(q) = D\tau \quad (7-2)$$

式(7-2)を変形すると,次式となる.

$$\ddot{q} = f + v\tau \quad (7-3)$$

ただし,

$$f = -M^{-1}(q)[h(q, \dot{q}) + g(q)]$$

$$v = M^{-1}(q)D$$

である.

ここで,式(7-3)から可制御である相対角 θ_2, θ_3 についての運動方程式を抜き出すと,次式が得られる.

$$\ddot{\Phi} = f_{\Phi} + v_{\Phi}\tau \quad (7-4)$$

ただし,

$$f = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_{\Phi} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_{\Phi} \end{bmatrix}$$

である.

次に,関節角ベクトル Φ が,次式のように関節間の干渉がなく,新たな制御入力 u に対し,線形な動特性を持つような入力を考える.

$$\ddot{\Phi} = u \tag{7-5}$$

したがって補償入力は，式(7-4)，式(7-5)より以下のようなになる．

$$\tau = -v_{\Phi}^{-1} f_{\Phi} + v_{\Phi}^{-1} u \tag{7-6}$$

制御入力として，以下のような補償器を設けた場合を考える．

$$u = \ddot{\Phi}_d + K_p(\Phi_d - \Phi) + K_d(\dot{\Phi}_d - \dot{\Phi}) \tag{7-7}$$

誤差を，

$$e = (\Phi_d - \Phi) \tag{7-8}$$

と定義すれば，式(7-5)と式(7-8)より次式を得る．

$$\ddot{e} + K_p e + K_d \dot{e} = 0 \tag{7-9}$$

したがって， K_p ， K_d を，たとえば $0 < \zeta \leq 1$ ， $\omega_n > 0$ とし

$$K_p = \text{diag}(\omega_n^2) \tag{7-10}$$

$$K_d = \text{diag}(2\zeta\omega_n) \tag{7-11}$$

とすれば PD 動作のフィードバックループを設けたことになり，目標値に収束する．

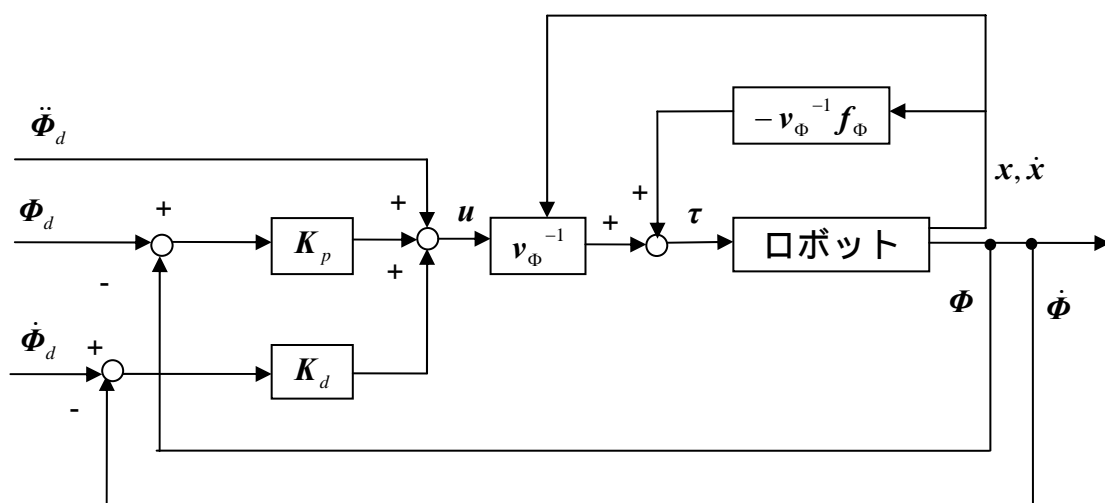


Fig.7-4 The computed torque method

7.5 シミュレーション結果

提案する空中姿勢制御手法の有効性を検証するため，ロボットに実現させる目標演技を「高棒内向き懸垂 - 後方宙返り下移動 - 低棒浮支持（パク宙返りと呼ばれ，高棒から低棒へ移動する空中局面で宙返りを行う技）」とし，シミュレーションを行った結果を示す．

7.5.1 鉄棒間移動実現条件の判別と関節軌道生成結果

Fig.7-2 のシミュレーション行程 から と，行程 から までを実行することにより，鉄棒間移動実現条件を満たし，目標関節軌道を導出するための Table.7-1 の状態を得た．本研究では，実際の人間の行っている演技に近づけるため，行程 のバーから飛び出す瞬間の初期姿勢とバーに飛びつく瞬間の最終姿勢は，実際の演技から計測した関節角の値を入力し固定した．そこで，初期関節角速度を操作することにより，鉄棒間移動実現条件を満たすように設定している．

次に，Table.7-1 の状態を用い，式(6-17)の評価関数を最小にする係数ベクトルの探索を開始する初期値を Table.7-2 のように設定して生成した目標関節軌道を Fig.7-5 に示す．

7.5.2 シミュレーション結果および考察

シミュレーション結果として，制御系に PD 制御を用いた際の関節角度，関節角速度，合成重心まわりの慣性モーメント，角運動量，関節への入力トルクを Fig.7-6 から Fig.7-10 に，計算トルク法を用いた際のこれらの結果を Fig.7-11 から Fig.7-15 に示す．また，シミュレーションの動作アニメーションを Fig.7-16 に示す．

まず，空中姿勢の制御系は，目標関節軌道に対する追従制御系であるが，Fig.7-6 と Fig.7-11 の関節角度の時間変化から，各関節角度が目標関節軌道に追従していくことが確認できる．最終姿勢の制御誤差は，PD 制御を用いた場合，肩関節 θ_2 が 0.13(deg)，股関節 θ_3 は 0.11(deg) であり，計算トルク法を用いた場合は，肩関節 θ_2 が 1.27231(deg)，股関節 θ_3 は 0.2735(deg) であった．したがって，本シミュレーションの制御系に使用したローカルな PD 制御系と計算トルク法は，空中姿勢制御手法の検証には適当であったといえる．特に，計算トルク法については，マニピュレータのように全状態が可制御であるシステムに用いら

れていた制御系であるが、本研究の剛体3リンクモデルのように、劣駆動関節を有するシステムに適用した場合にも、有効であることが確認された。

次に、本研究で提案した空中姿勢制御手法は、式(6-10)の条件を満たすことが絶対であるため、関節角度の追従性よりも合成重心まわりの慣性モーメント変化に対する追従が求められる。そこで、慣性モーメント変化の時間変化の追従性を確認すると、シミュレーション結果から得られた慣性モーメント変化は、目標慣性モーメント軌道に追従していることが確認できる。最終姿勢における慣性モーメントの制御誤差は、PD制御を用いた場合は $0.00003(kgm^2)$ 、計算トルク法を用いた場合は $0.00011(kgm^2)$ であった。

そして、Fig.7-16の動作アニメーションより、目標演技とした「高棒内向き懸垂 - 後方宙返り下移動 - 低棒浮支持」を実現していることが確認でき、人間の演技に近い動作を実現することが確認できる。

したがって、以上のコンピュータシミュレーションの結果より、本研究で提案した鉄棒間移動条件、空中姿勢制御手法および関節軌道生成手法は有効であるといえる。

Table.7-1 The Condition of motion planning for computer simulation

Initial joint angle (deg)	$\theta_0 = [60, 50, 0]^T$, $\Phi(t_0) = [50, 0]^T$
Final joint angle (deg)	$\theta_{t_f} = [203.5940, 55, -85]^T$, $\Phi(t_f) = [55, -85]^T$
Initial angular velocity (deg/sec)	$\dot{\theta}_0 = [300, 0, 0]^T$, $\dot{\Phi}(t_0) = [0, 0]^T$
Final angular velocity (deg/sec)	$\dot{\Phi}(t_f) = [0, 0]^T$
Angular momentum (kgm^2 / sec)	$L = 0.1980$
Rotational amount (deg)	$\Theta_p = 106.0144$
Initial time (sec)	$t_0 = 0.0$
Final time (sec)	$t_f = 0.3223$

Table.7-2 The initial value for search algorithm

Initial value for search algorithm	$\alpha_0 = \begin{bmatrix} 1.3 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
------------------------------------	---

Table.7-3 The result of the orthonormal base coefficient vectors

Orthonormal base coefficient vectors	$\alpha_0 = \begin{bmatrix} 2.4769 \\ 3.6524 \end{bmatrix}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1.2034 \\ 1.3652 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -0.2340 \\ -1.2162 \end{bmatrix}$
	$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0.5621 \\ 0.2136 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1.6743 \\ 2.2109 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 1.3114 \\ 1.5592 \end{bmatrix}, \alpha_6 = \begin{bmatrix} 0.8260 \\ 0.6875 \end{bmatrix}$
	$\alpha_7 = \begin{bmatrix} 12.0871 \\ 20.0441 \end{bmatrix}, \alpha_8 = \begin{bmatrix} -5.9609 \\ -10.6364 \end{bmatrix}, \alpha_9 = \begin{bmatrix} 8.7262 \\ 14.6431 \end{bmatrix}, \alpha_{10} = \begin{bmatrix} -2.4017 \\ -4.2443 \end{bmatrix}$

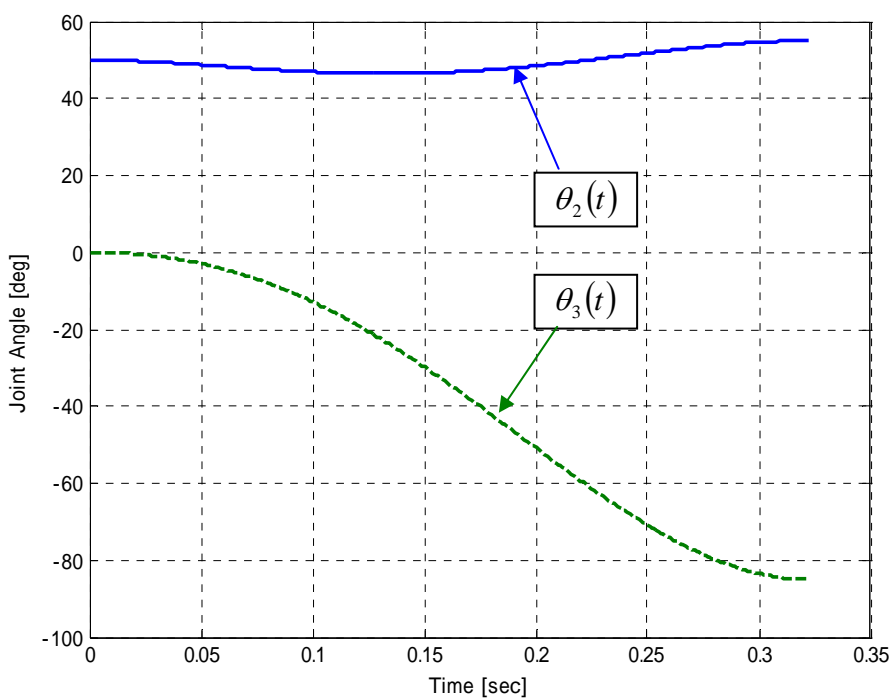


Fig.7-5-1 The generated result of target trajectory of joint angles

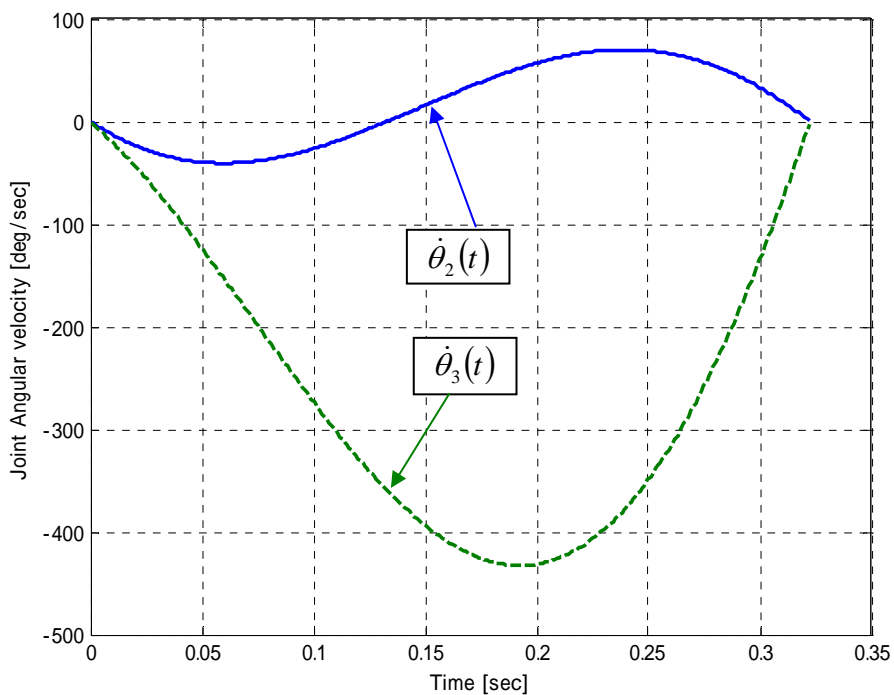


Fig.7-5-2 The generated result of target trajectory of angular velocities

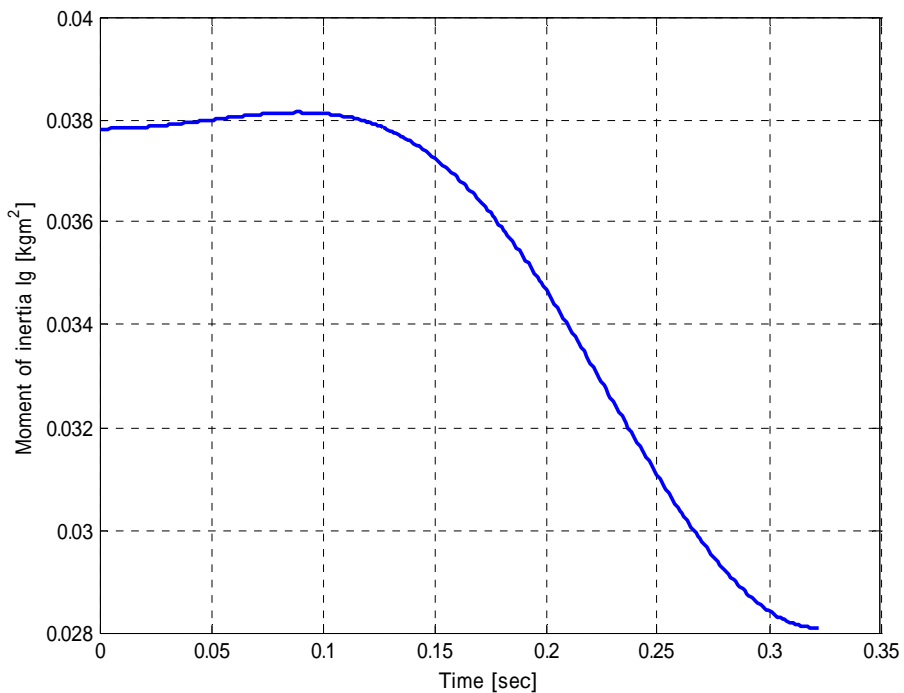


Fig.7-5-3 The generated result of target trajectory of moment inertia

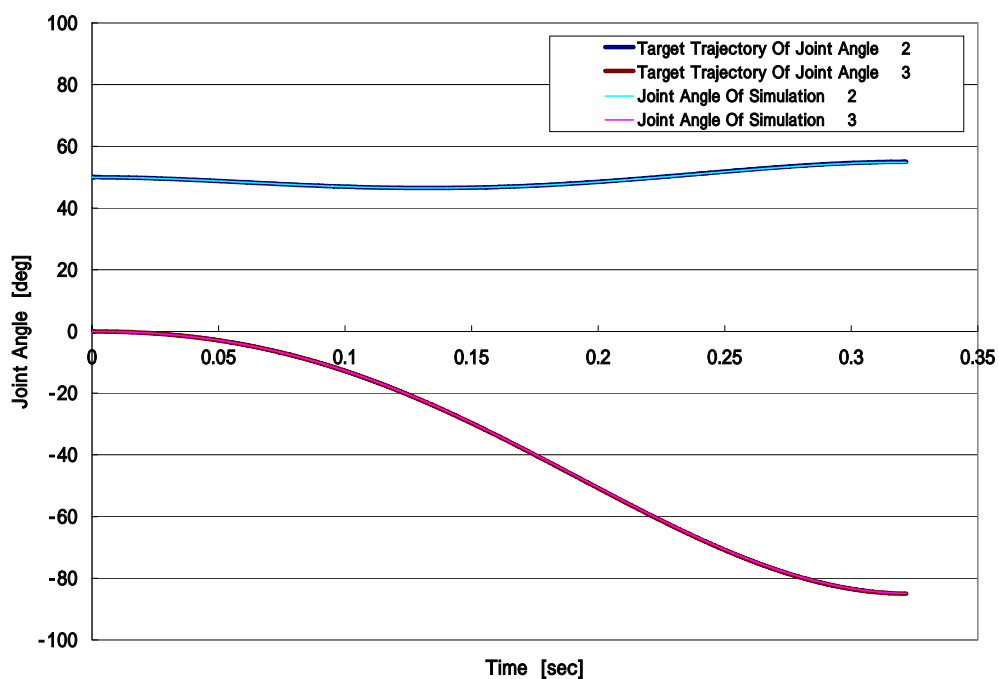


Fig.7-6 The time history of joint angles
Control system : PD control , Parameter : $K_p=10$, $K_d=10$

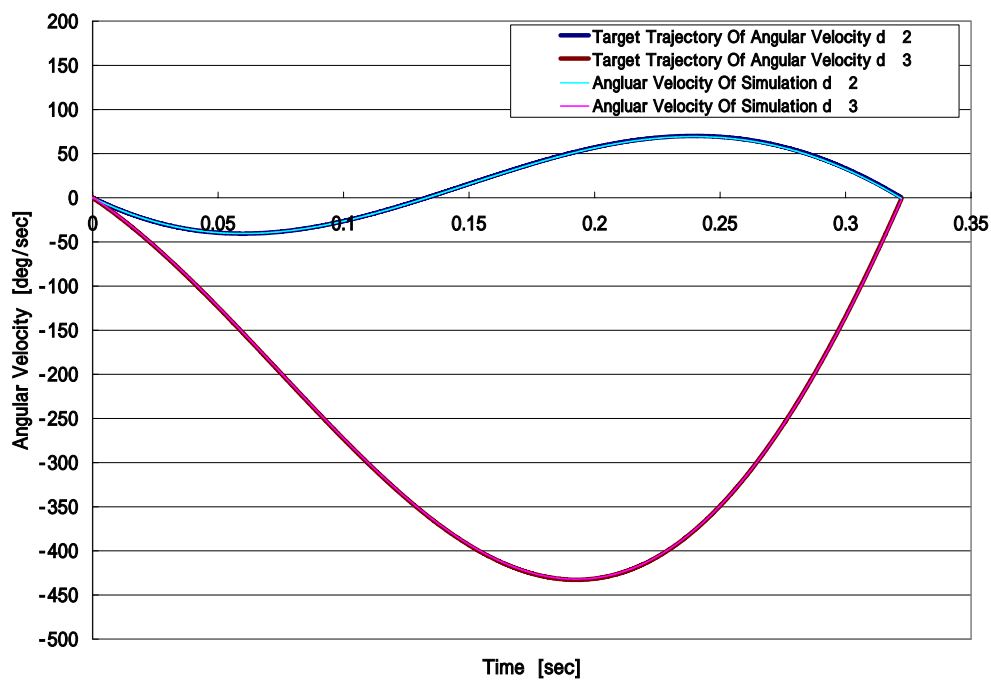


Fig.7-7 The time history of angular velocities
Control system : PD control , Parameter : $K_p=10$, $K_d=10$

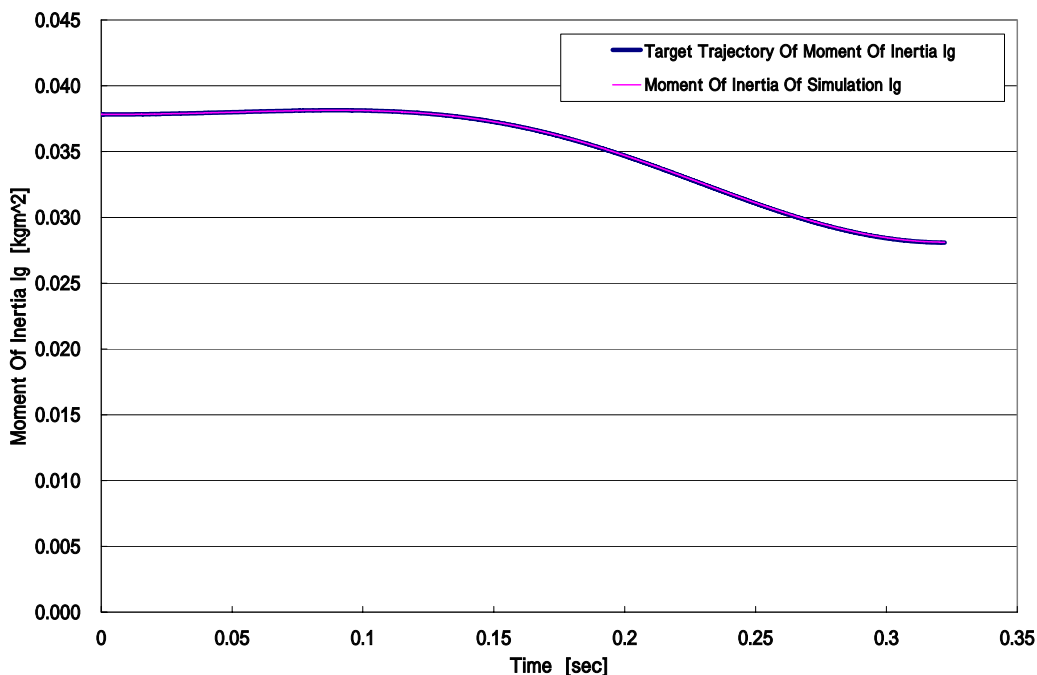


Fig.7-8 The time history of momentum of inertias
Control system : PD control , Parameter : $K_p=10$, $K_d=10$

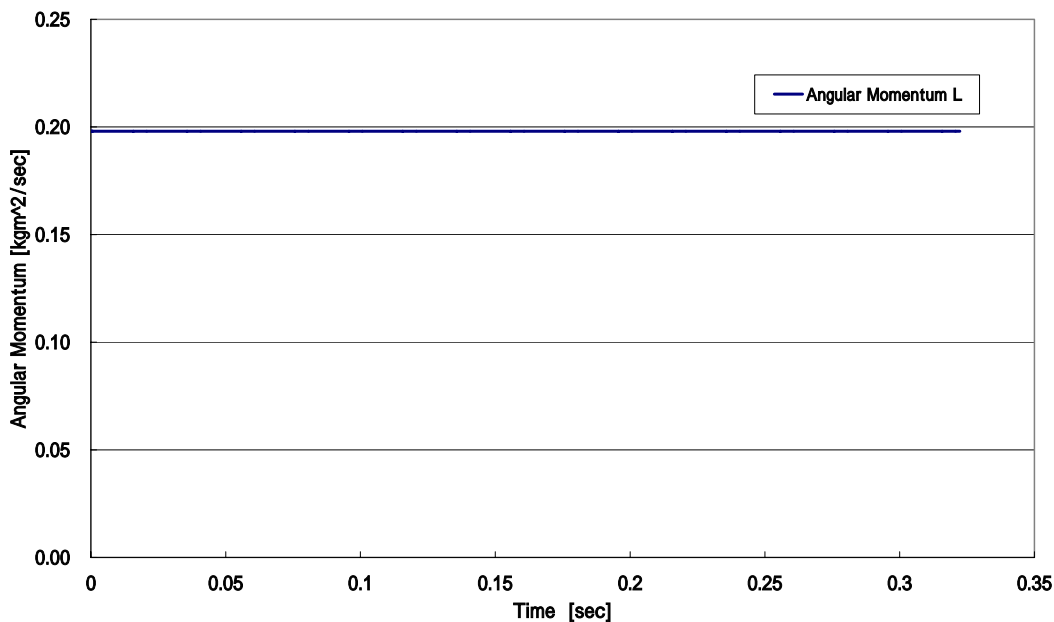


Fig.7-9 The time history of angular momentum
Control system : PD control , Parameter : $K_p=10$, $K_d=10$

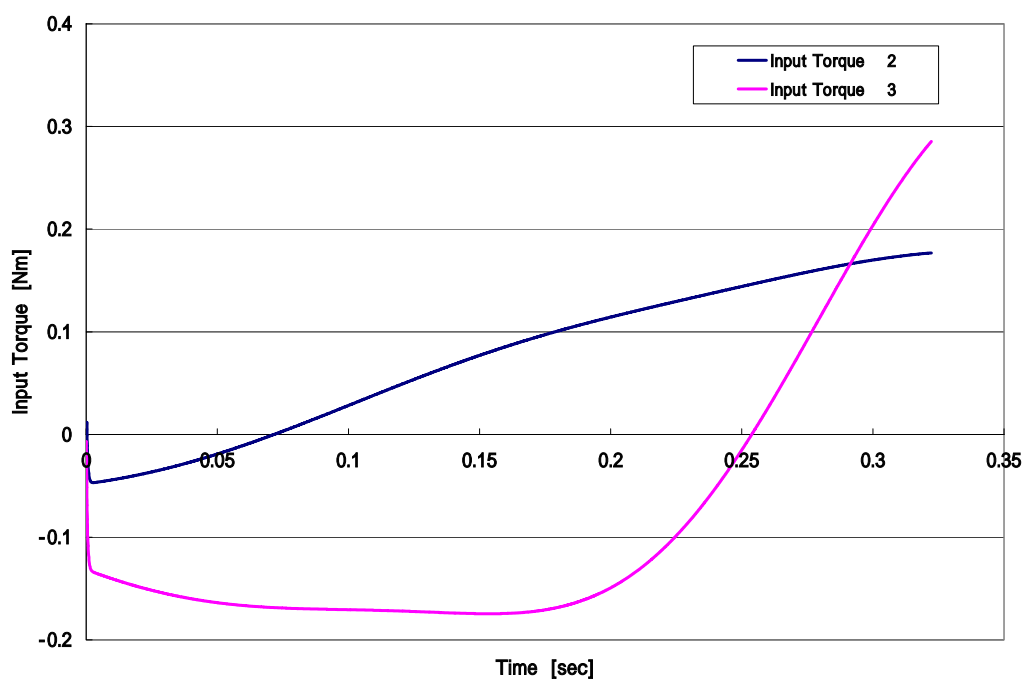


Fig.7-10 The time history of input torques
Control system : PD control , Parameter : $K_p=10$, $K_d=10$

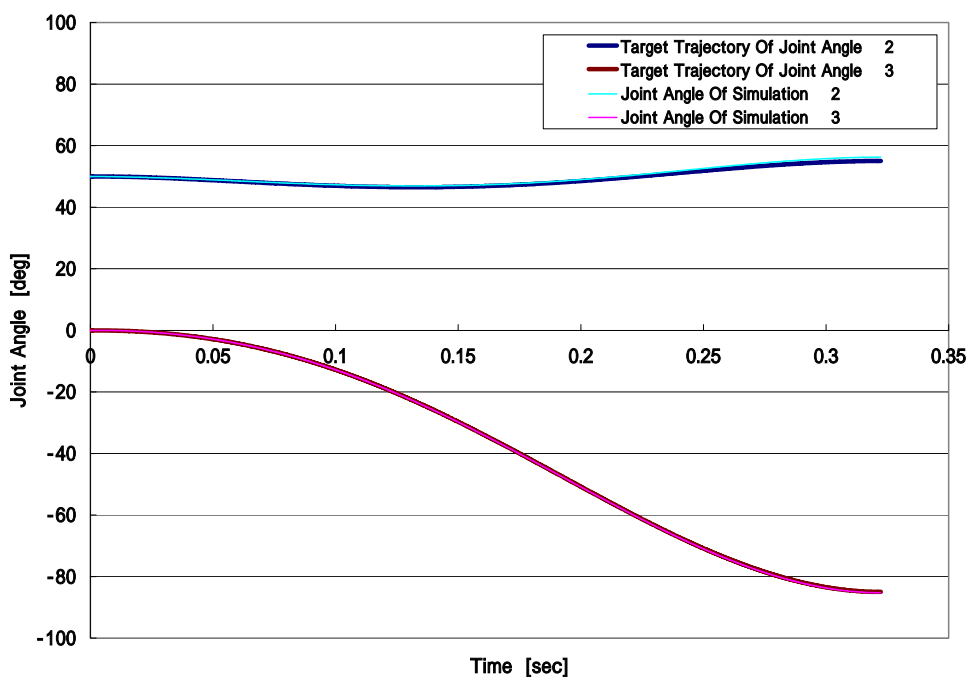


Fig.7-11 The time history of joint angles

Control system : Computed torque method , Parameter : $\zeta=0.5$, $\omega_n=350$

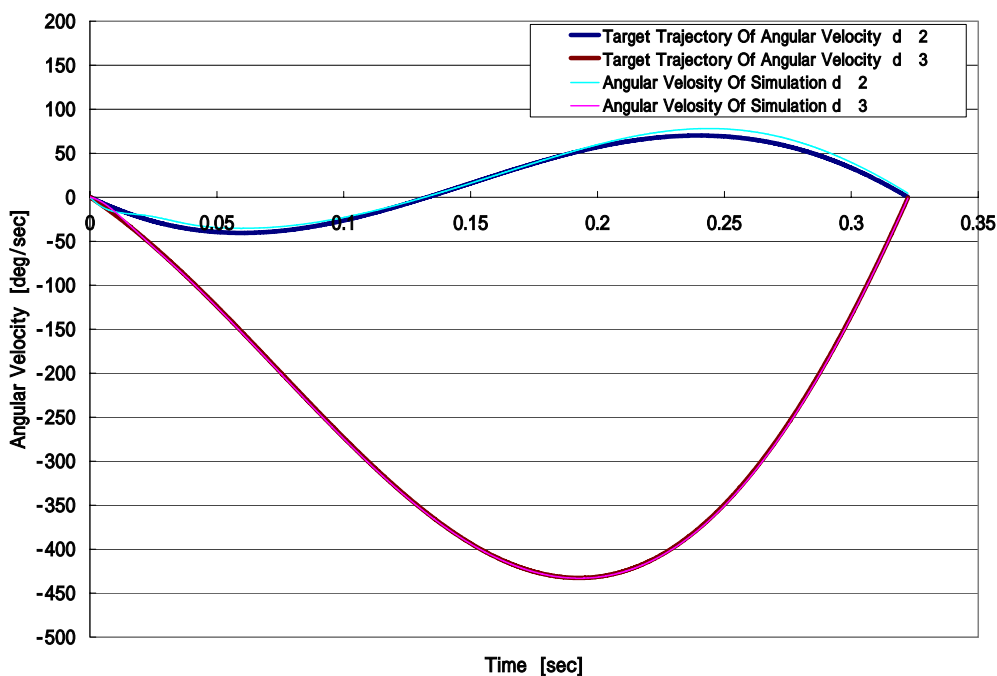


Fig.7-12 The time history of angular velocities

Control system : Computed torque method , Parameter : $\zeta=0.5$, $\omega_n=350$

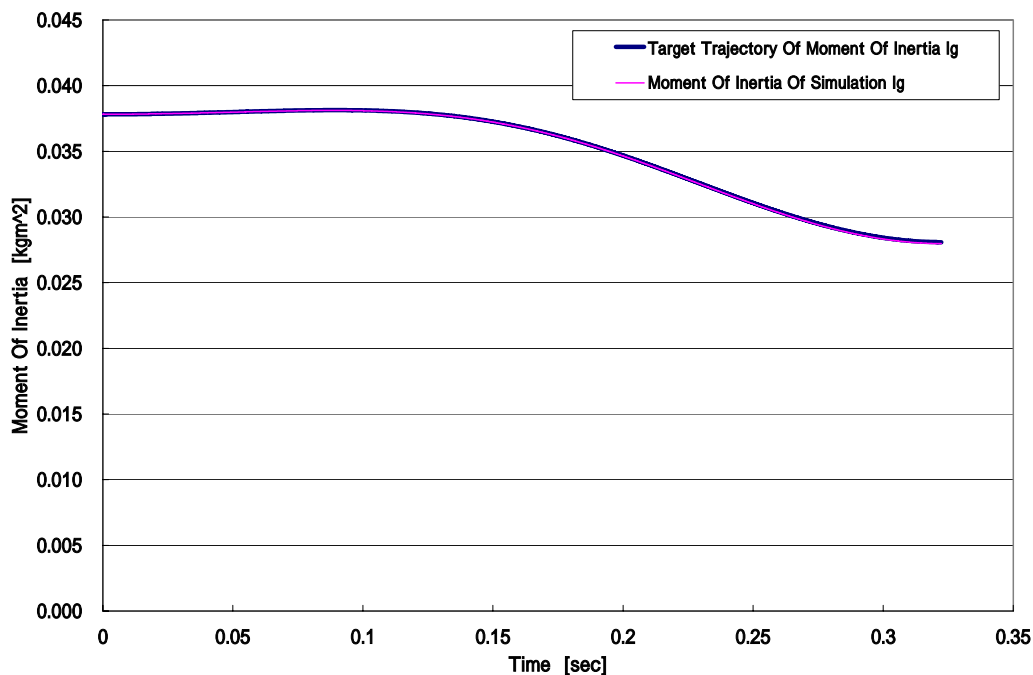


Fig.7-13 The time history of momentum of inertias
 Control system : Computed torque method , Parameter : $\zeta=0.5$, $\omega_n=350$

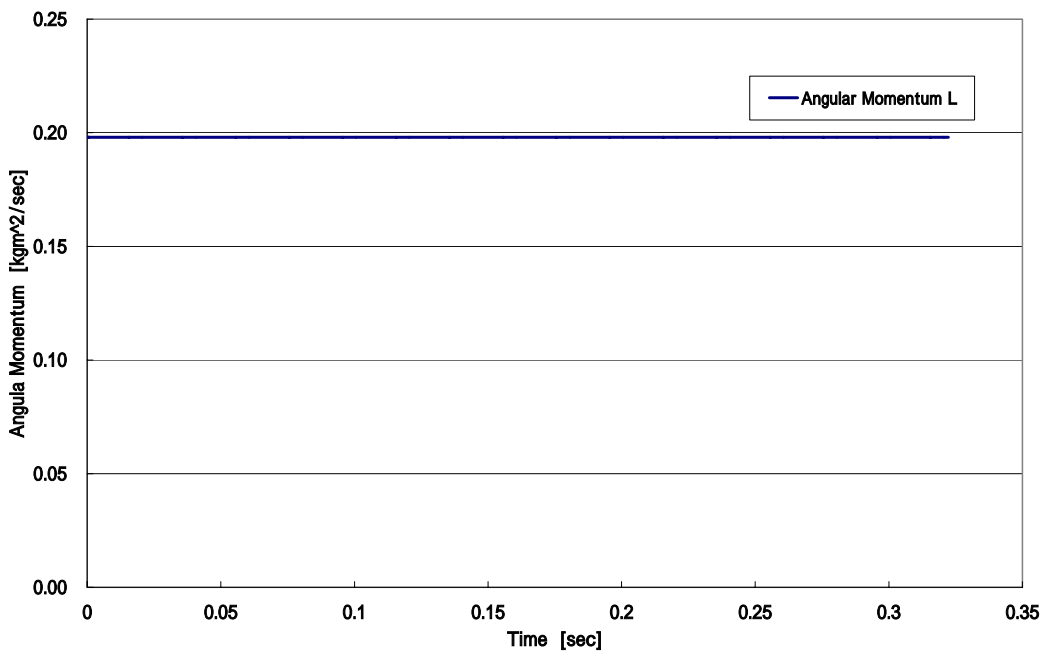


Fig.7-14 The time history of angular momentum
 Control system : Computed torque method , Parameter : $\zeta=0.5$, $\omega_n=350$

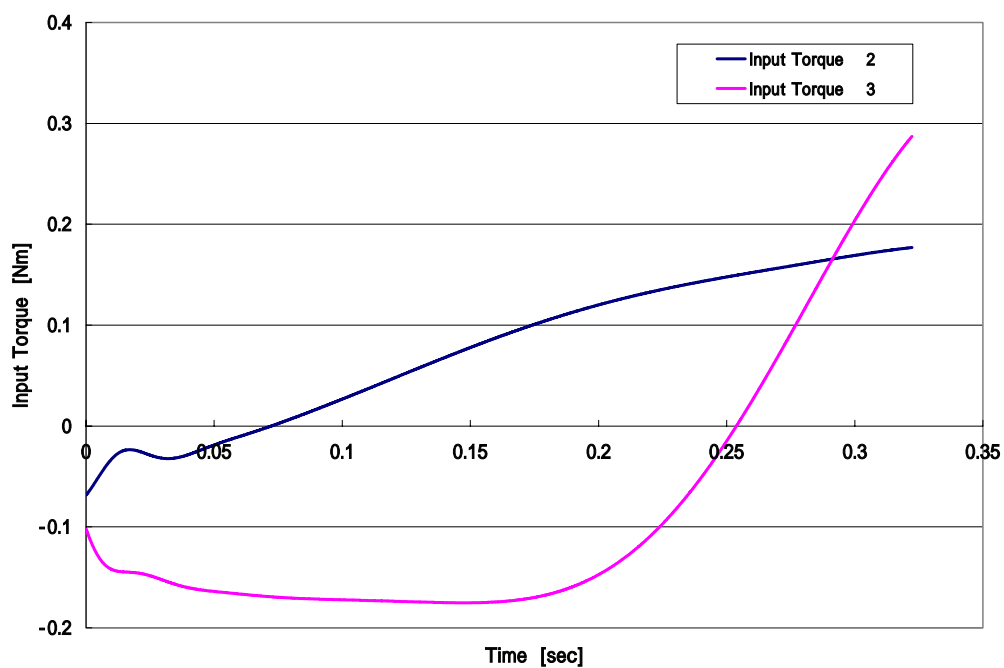


Fig.7-15 The time history of input torques
Control system : Computed torque method , Parameter : $\zeta=0.5$, $\omega_n=350$

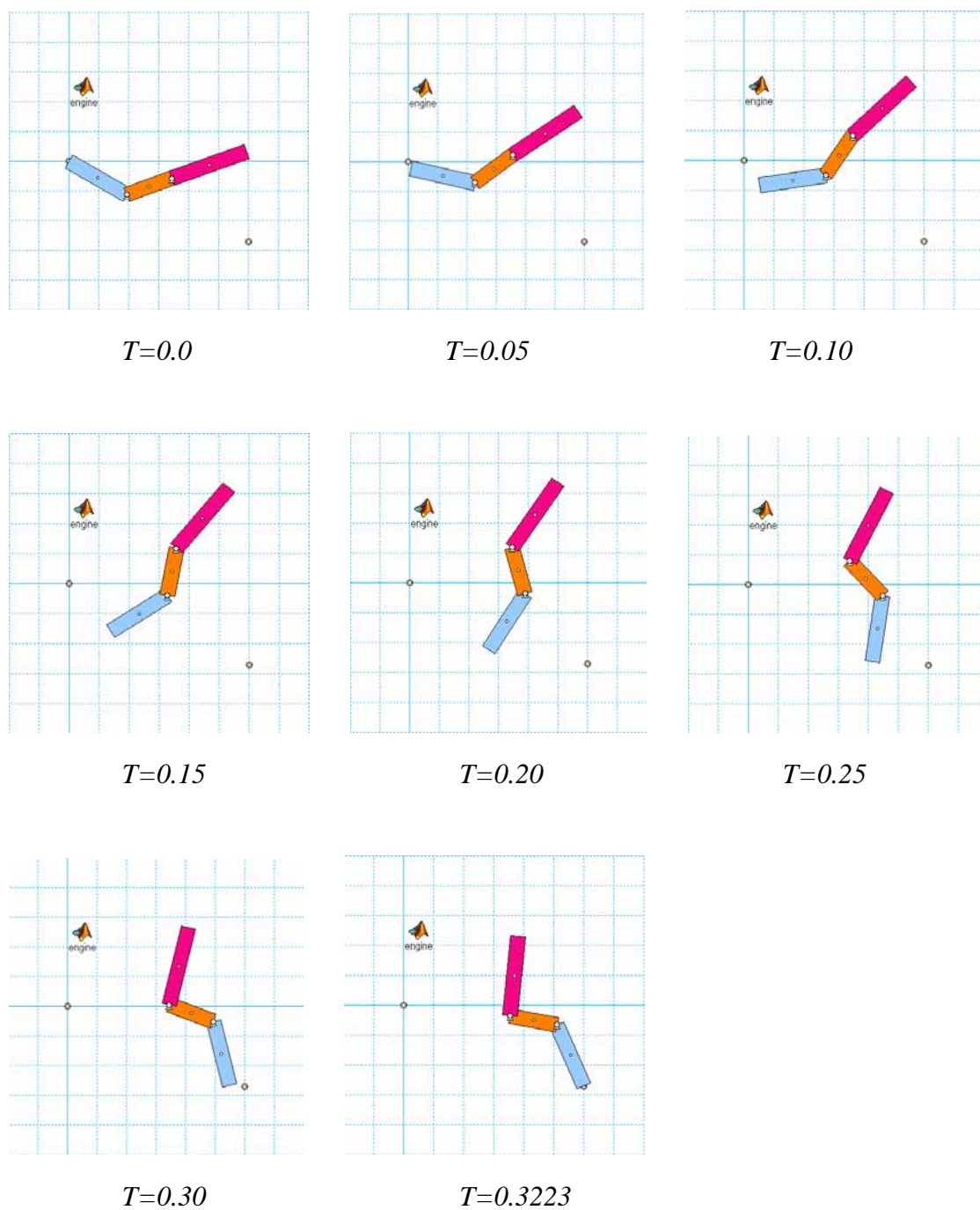


Fig.7-16 The simulated behavior of aerial posture control

7.6 おわりに

この章では、提案した空中姿勢制御手法の有効性を検証するため、ロボットに実現させる目標演技を「高棒内向き懸垂 - 後方宙返り下移動 - 低棒浮支持(パク宙返りと呼ばれ、高棒から低棒へ移動する空中局面で宙返りを行う技)」とし、第4章で示した剛体3リンクモデルに対して、コンピュータシミュレーションを行った。

コンピュータシミュレーションにより、バーから飛び出す初期時刻 $t = t_0$ から、再びバーに飛びつく最終時刻 $t = t_f$ までに、初期姿勢から目標とする最終姿勢へと姿勢を変化させ、目標とする宙返りの回転量を実現したことから、本研究で提案した鉄棒間移動実現条件、空中姿勢制御手法および目標関節軌道生成手法の有効性が確認された。

第8章 結論

8.1 本研究の成果

本論文は、段違い平行棒運動における空中局面を伴う移動技の実現を目的とし、剛体3リンクモデルに対して鉄棒間移動実現条件、空中姿勢制御手法の提案を行い、コンピュータシミュレーションにより、これらの有効性を検証した。

鉄棒間移動実現条件は、まず空中に飛び出してから放物線を描く合成重心の軌跡と、飛び移ったバーから最終合成重心への距離を半径とする合成重心の円の軌跡の2つの軌跡に交点が存在することであることを示した。そして、交点が存在するだけでなく、技の運動内容や次の演技への連続性の面から、交点の位置も考慮する必要がある、交点がバーに飛びついた際に適切と思われる範囲に少なくとも一つ存在していなければならないことを示した。これらの条件を満たさなければ、目標とする姿勢で空中に飛び出し、目標とする姿勢でバーを確実に把握することは不可能であるといえる。

次に、空中姿勢制御手法は、空中局面では角運動量が保存されることから、合成重心まわりの慣性モーメントを操作することにより、所望とする姿勢でバーに飛びつき、目標宙返り回転量を実現する制御手法を提案した。合成重心まわりの慣性モーメント変化の逆数の時間積分値が、宙返りによる回転量と角運動量の商に等しいという関係を導き、この関係を満たす関節軌道を生成した。関節軌道生成手法としては、関節軌道をチェビシェフ多項式で近似し、評価関数を最小にする多項式の係数ベクトルを探索する手法を用い、関節軌道生成問題に最小化問題を適用した。これまで、この条件に対する軌道生成問題に対しては、関節角に同相運動拘束、逆相運動拘束を与え、解析的に導出される場合が多くあり、人間の自由な動きを再現しているとは言い難かった。しかし、本論文で検証した手法により、関節角に拘束条件を与えることなく関節軌道を生成することが可能となり、人間のように自由で、滑らかな動きを再現できたと考えられる。

最後に、提案した空中姿勢制御手法の有効性を検証するために、ロボットに実現させる目標演技を「高棒内向き懸垂 - 後方宙返り下移動 - 低棒浮支持」とし、コンピュータシミュレーションを行った。その結果、動作アニメーションより、目標演技を実現していることが確認された。したがって、本研究で提案した空中姿勢制御手法が、段違い平行棒運動の空中局面を伴う移動技に対して十分有効であることが示された。この制御手法は、段違い平行棒運動に限らず、トランポリン運動の宙返りにも適用可能であると考えられる。

8.2 今後の課題

本研究の結果を受け、今後の課題としては、まず大車輪やあふり動作によって、バーから飛び出す際の初期条件にロボットの状態を制御する飛出制御手法の提案と、バーに飛びついた後の姿勢制御手法の提案が挙げられる。そして、移動技を一つの演技として構成する必要があると考えられる。

次に、本研究で検証した空中姿勢制御問題に関しては、空中飛出時に目標とした初期姿勢・初期関節角速度を満たさなかった場合でも、目標とする回転量を実現し、目標最終姿勢でバーを把持することが可能となる、関節軌道修正制御手法が挙げられる。

最後に、鉄棒運動における空中姿勢制御に関する研究では、コンピュータシミュレーションでの検証がほとんどであり、実機による研究が行われている例は少ない。したがって、本研究では実機を設計・開発し、実機を用いた研究を行っていく。

謝辞

本研究の遂行にあたり終始，御指導，御鞭撻下さいました，法政大学工学部機械工学科 高島 俊教授には，この場を借りて深く感謝の意を表すとともに，厚く御礼申し上げます。

また，本研究を進めるにあたり，互いに意見し協力し合い，良き励みになった法政大学大学院工学研究科機械工学専攻 渋谷 純也氏，鈴木 洋平氏，中野 陽介氏には，心より感謝申し上げます。

さらに，本研究の遂行に際して協力していただいた法政大学大学院工学研究科機械工学専攻修士課程 1 年および法政大学工学部機械工学科 4 年の高島研究室の皆様にも深く感謝申し上げます。

最後に，本研究に際して御協力，御助言おいただいた方々には，ここで厚く御礼申し上げます。

2008 年 2 月 20 日

関 隆行

発表論文

関 隆行, 高島 俊, “ 段違い平行棒運動ロボットの研究 - 宙返りを含む移動技の実現 - ”, 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会 07 講演論文集, 1A2-C10, 2007

参考文献

- 1) 坂野尚史, “鉄棒運動ロボットの制御 - 目標軌道の生成と運動制御”, 法政大学修士論文, 1995
- 2) 釜石貴之, “鉄棒運動ロボットの制御”, 法政大学修士論文, 1996
- 3) 小林弘明, “鉄棒運動ロボットの制御”, 法政大学修士論文, 1997
- 4) 浜野博之, “鉄棒運動のシミュレーション - 目標軌道生成のための方法論及び実験的検討”, 法政大学修士論文, 2002
- 5) 小沼恭英, “強化学習を用いた鉄棒運動ロボットの制御”, 法政大学修士論文, 2004
- 6) 南澤権・玄相昊・美多勉, “月面宙返りロボットの姿勢制御”, 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会 00 講演論文集, 2P2-84-125, 2000
- 7) 滝田好宏・松田一洋, “鉄棒ロボットによる宙返りの実現 - 実験による検証 - ”, 日本機械学会論文集, 66-648, C(2000)
- 8) 大西健介・田中一男・山藤和男, “鉄棒ロボットによるコバチ演技の実現”, 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会 00 講演論文集, 1P1-24-050, 2000
- 9) 滝田好宏・平澤順治, “鉄棒ロボットによる二回宙返りの実現”, 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2001 論文集
- 10) 滝田好宏・新井重信, “鉄棒ロボットによる二回宙返りの実現 - 実験的検証 - ”, 日本機械学会 2002 年度年次大会講演論文集, 2002
- 11) 遠藤隆久, “体操競技における空中姿勢の制御及び着地の制御に関する研究”, 法政大学修士論文, 1991

- 12) 上野真路 “ トランポリン運動ロボットの制御 - 宙返りの実現に向けての研究 - ”, 法政大学修士論文, 2006
- 13) 服部邦雄・山浦弘, “ 角速度入力による 3 リンク劣駆動浮遊ロボットの姿勢制御 - 拘束を用いた姿勢制御戦略 - ”, 日本機械学会論文集, 70-700, C(2004)
- 14) 掃部雅幸・吉田和夫, “ 初期角運動量を有するフリーフライング運動系の三次元姿勢制御法 ”, 日本ロボット学会誌, Vol.16 No.2, pp.223-231, 1998
- 15) 城倉信也・福島理絵・吉田和夫, “ ひねり宙返りを行うエアリアルスキーロボットの開発 ”, 日本ロボット学会誌, Vol.21 No.2, pp.177-177, 2003
- 16) 掃部雅幸・吉田和夫, “ 三次元フリーフライングロボットの姿勢制御 - 第 1 報 非ホロノミック最小自由系の加制御性とその姿勢制御計画への応用 - ”, 日本ロボット学会誌, Vol.21 No.3, pp.273-281, 2003
- 17) 掃部雅幸・吉田和夫, “ 三次元フリーフライングロボットの姿勢制御 - 第 2 報 滑らかな時不変状態フィードバック則による安定化戦略 - ”, 日本ロボット学会誌, Vol.21 No.3, pp.293-301, 2003
- 18) 掃部雅幸・吉田和夫・福島理絵, “ 三次元フリーフライングロボットの姿勢制御 - 第 3 報 初期角運動量を有するシステムのフィードバック制御 - ”, 日本ロボット学会誌, Vol.21 No.5, pp.535-545, 2003
- 19) 梶間日出輝・長谷川泰久・福田敏男, “ マルチロコモーションロボットによるブラキエーション運動に関する研究 ” 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会 03 講演論文集, 2P1-3F-A4, 2003
- 20) 梶間日出輝・土井将弘・長谷川泰久・福田敏男, “ Multi-locomotion Robot によるブラキエーション運動に関する研究 - フィードバックコントローラによる振動動作周期の動的調整 - ” 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会 04 講演論文集, 2P1-H-71, 2004
- 21) 嘉納秀明, システムの最適理論と最適化, コロナ社

- 22) 白石洋一，組合せ最適化アルゴリズムの最新手法 - 基礎から工学応用まで
- ，丸善株式会社
- 23) 佐々木隆，物理学基礎シリーズ 11 物理数学，培風館
- 24) G.J.Borse，MATLAB 数値解析，オーム社
- 25) 吉川恒夫，ロボット基礎制御理論，コロナ社

付録

付録 A . 3リンクモデルのラグランジュ法による運動方程式の導出

本研究で使用する3リンクモデルについて，ラグランジュ法による運動方程式を，数式処理システムである *Mathematica* を用いて，導出した．導出した結果を以下に示す．

<<Link1重心位置>>

$$\mathbf{r1} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}[t] + \mathbf{lg1} * \mathbf{Sin}[\theta1[t]] \\ \mathbf{y}[t] - \mathbf{lg1} * \mathbf{Cos}[\theta1[t]] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{lg1} \sin(\theta1(t)) + x(t) \\ y(t) - \mathbf{lg1} \cos(\theta1(t)) \end{pmatrix}$$

<<Link1重心速度>>

$$\mathbf{v1} = \mathbf{D}[\mathbf{r1}, t]$$

$$\begin{pmatrix} x'(t) + \mathbf{lg1} \cos(\theta1(t)) \theta1'(t) \\ y'(t) + \mathbf{lg1} \sin(\theta1(t)) \theta1'(t) \end{pmatrix}$$

<<Link2重心位置>>

$$\mathbf{r2} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}[t] + \mathbf{l1} * \mathbf{Sin}[\theta1[t]] + \mathbf{lg2} * \mathbf{Sin}[\theta1[t] + \theta2[t]] \\ \mathbf{y}[t] - \mathbf{l1} * \mathbf{Cos}[\theta1[t]] - \mathbf{lg2} * \mathbf{Cos}[\theta1[t] + \theta2[t]] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l1} \sin(\theta1(t)) + \mathbf{lg2} \sin(\theta1(t) + \theta2(t)) + x(t) \\ -\mathbf{l1} \cos(\theta1(t)) - \mathbf{lg2} \cos(\theta1(t) + \theta2(t)) + y(t) \end{pmatrix}$$

<<Link2重心速度>>

$$\mathbf{v2} = \mathbf{D}[\mathbf{r2}, t]$$

$$\begin{pmatrix} x'(t) + \mathbf{l1} \cos(\theta1(t)) \theta1'(t) + \mathbf{lg2} \cos(\theta1(t) + \theta2(t)) (\theta1'(t) + \theta2'(t)) \\ y'(t) + \mathbf{l1} \sin(\theta1(t)) \theta1'(t) + \mathbf{lg2} \sin(\theta1(t) + \theta2(t)) (\theta1'(t) + \theta2'(t)) \end{pmatrix}$$

<<Link3重心速度>>

$$\mathbf{r3} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}[t] + \mathbf{l1} * \mathbf{Sin}[\theta1[t]] + \mathbf{l2} * \mathbf{Sin}[\theta1[t] + \theta2[t]] + \mathbf{lg3} * \mathbf{Sin}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]] \\ \mathbf{y}[t] - \mathbf{l1} * \mathbf{Cos}[\theta1[t]] - \mathbf{l2} * \mathbf{Cos}[\theta1[t] + \theta2[t]] - \mathbf{lg3} * \mathbf{Cos}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l1} \sin(\theta1(t)) + \mathbf{l2} \sin(\theta1(t) + \theta2(t)) + \mathbf{lg3} \sin(\theta1(t) + \theta2(t) + \theta3(t)) + x(t) \\ -\mathbf{l1} \cos(\theta1(t)) - \mathbf{l2} \cos(\theta1(t) + \theta2(t)) - \mathbf{lg3} \cos(\theta1(t) + \theta2(t) + \theta3(t)) + y(t) \end{pmatrix}$$

<<Link3重心速度>>

$$\mathbf{v3} = \mathbf{D}[\mathbf{r3}, t]$$

$$\begin{pmatrix} x'(t) + \mathbf{l1} \cos(\theta1(t)) \theta1'(t) + \mathbf{l2} \cos(\theta1(t) + \theta2(t)) (\theta1'(t) + \theta2'(t)) + \mathbf{lg3} \cos(\theta1(t) + \theta2(t) + \theta3(t)) (\theta1'(t) + \theta2'(t) + \theta3'(t)) \\ y'(t) + \mathbf{l1} \sin(\theta1(t)) \theta1'(t) + \mathbf{l2} \sin(\theta1(t) + \theta2(t)) (\theta1'(t) + \theta2'(t)) + \mathbf{lg3} \sin(\theta1(t) + \theta2(t) + \theta3(t)) (\theta1'(t) + \theta2'(t) + \theta3'(t)) \end{pmatrix}$$

<<運動エネルギー>>

$$K = \text{Simplify}[1/2 * m1 * \text{Transpose}[V1] \cdot V1 + 1/2 * m2 * \text{Transpose}[V2] \cdot V2 + \\ 1/2 * m3 * \text{Transpose}[V3] \cdot V3 + 1/2 * I1 * \theta1'[t]^2 + 1/2 * I2 * (\theta1'[t] + \theta2'[t])^2 + \\ 1/2 * I3 * (\theta1'[t] + \theta2'[t] + \theta3'[t])^2]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{2} (I1 \theta1'[t]^2 + m1 ((x'[t] + l g1 \cos[\theta1[t]] \theta1'[t])^2 + (y'[t] + l g1 \sin[\theta1[t]] \theta1'[t])^2) + \right. \right. \\ I2 (\theta1'[t] + \theta2'[t])^2 + m2 ((x'[t] + l1 \cos[\theta1[t]] \theta1'[t] + l g2 \cos[\theta1[t] + \theta2[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t]))^2 + \\ (y'[t] + l1 \sin[\theta1[t]] \theta1'[t] + l g2 \sin[\theta1[t] + \theta2[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t]))^2) + \\ I3 (\theta1'[t] + \theta2'[t] + \theta3'[t])^2 + m3 ((x'[t] + l1 \cos[\theta1[t]] \theta1'[t] + l2 \cos[\theta1[t] + \theta2[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t]) + \\ l g3 \cos[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t] + \theta3'[t]))^2 + (y'[t] + l1 \sin[\theta1[t]] \theta1'[t] + \\ \left. \left. 12 \sin[\theta1[t] + \theta2[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t]) + l g3 \sin[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t] + \theta3'[t]))^2 \right\} \right\}$$

<<位置エネルギー>>

$$U = m1 * g * (y[t] - l g1 * \cos[\theta1[t]]) + \\ m2 * g * (y[t] - l1 * \cos[\theta1[t]] - l g2 * \cos[\theta1[t] + \theta2[t]]) + \\ m3 * g * (y[t] - l1 * \cos[\theta1[t]] - l2 * \cos[\theta1[t] + \theta2[t]] - l g3 * \cos[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]])$$

$$g m1 (-l g1 \cos[\theta1[t]] + y[t]) + g m2 (-l1 \cos[\theta1[t]] - l g2 \cos[\theta1[t] + \theta2[t]] + y[t]) + \\ g m3 (-l1 \cos[\theta1[t]] - l2 \cos[\theta1[t] + \theta2[t]] - l g3 \cos[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]] + y[t])$$

<<Lagrange>>

$$LL = \text{Simplify}[K - U]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{2} (2 g m1 (l g1 \cos[\theta1[t]] - y[t]) + 2 g m2 (l1 \cos[\theta1[t]] + l g2 \cos[\theta1[t] + \theta2[t]] - y[t]) + \right. \right. \\ 2 g m3 (l1 \cos[\theta1[t]] + l2 \cos[\theta1[t] + \theta2[t]] + l g3 \cos[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]] - y[t]) + \\ I1 \theta1'[t]^2 + m1 ((x'[t] + l g1 \cos[\theta1[t]] \theta1'[t])^2 + (y'[t] + l g1 \sin[\theta1[t]] \theta1'[t])^2) + \\ I2 (\theta1'[t] + \theta2'[t])^2 + m2 ((x'[t] + l1 \cos[\theta1[t]] \theta1'[t] + l g2 \cos[\theta1[t] + \theta2[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t]))^2 + \\ (y'[t] + l1 \sin[\theta1[t]] \theta1'[t] + l g2 \sin[\theta1[t] + \theta2[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t]))^2) + \\ I3 (\theta1'[t] + \theta2'[t] + \theta3'[t])^2 + m3 ((x'[t] + l1 \cos[\theta1[t]] \theta1'[t] + l2 \cos[\theta1[t] + \theta2[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t]) + \\ l g3 \cos[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t] + \theta3'[t]))^2 + (y'[t] + l1 \sin[\theta1[t]] \theta1'[t] + \\ \left. \left. 12 \sin[\theta1[t] + \theta2[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t]) + l g3 \sin[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t] + \theta3'[t]))^2 \right\} \right\}$$

<<Lagrange 運動方程式>>

$$\text{FullSimplify}[Lx = D[D[LL, x'[t]], t] - D[LL, x[t]]]$$

$$\left\{ \left\{ m1 (-l g1 \sin[\theta1[t]] \theta1'[t]^2 + x''[t] + l g1 \cos[\theta1[t]] \theta1''[t]) + \right. \right. \\ m2 (-l1 \sin[\theta1[t]] \theta1'[t]^2 - l g2 \sin[\theta1[t] + \theta2[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t])^2 + x''[t] + l1 \cos[\theta1[t]] \theta1''[t] + \\ l g2 \cos[\theta1[t] + \theta2[t]] (\theta1''[t] + \theta2''[t])) + m3 (-l1 \sin[\theta1[t]] \theta1'[t]^2 - l2 \sin[\theta1[t] + \theta2[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t])^2 - \\ l g3 \sin[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]] (\theta1'[t] + \theta2'[t] + \theta3'[t])^2 + x''[t] + l1 \cos[\theta1[t]] \theta1''[t] + \\ \left. \left. 12 \cos[\theta1[t] + \theta2[t]] (\theta1''[t] + \theta2''[t]) + l g3 \cos[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]] (\theta1''[t] + \theta2''[t] + \theta3''[t])) \right\} \right\}$$

FullSimplify[Ly = D[D[LL, y'[t]], t] - D[LL, y[t]]]

$$\{ \{ g m_1 + g m_2 + g m_3 + m_1 (\lg_1 \cos[\theta_1[t]] \theta_1'[t]^2 + y''[t] + \lg_1 \sin[\theta_1[t]] \theta_1''[t]) + m_2 (11 \cos[\theta_1[t]] \theta_1'[t]^2 + \lg_2 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t]] (\theta_1'[t] + \theta_2'[t])^2 + y''[t] + 11 \sin[\theta_1[t]] \theta_1''[t] + \lg_2 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t]] (\theta_1''[t] + \theta_2''[t])) + m_3 (11 \cos[\theta_1[t]] \theta_1'[t]^2 + 12 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t]] (\theta_1'[t] + \theta_2'[t])^2 + \lg_3 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] (\theta_1'[t] + \theta_2'[t] + \theta_3'[t])^2 + y''[t] + 11 \sin[\theta_1[t]] \theta_1''[t] + 12 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t]] (\theta_1''[t] + \theta_2''[t]) + \lg_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] (\theta_1''[t] + \theta_2''[t] + \theta_3''[t])) \} \}$$

FullSimplify[L01 = D[D[LL, 01'[t]], t] - D[LL, 01[t]]]

$$\{ \{ ((\lg_1 m_1 + 11 (m_2 + m_3)) \sin[\theta_1[t]] + (\lg_2 m_2 + 12 m_3) \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t]] + \lg_3 m_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] - 11 ((\lg_2 m_2 + 12 m_3) \sin[\theta_2[t]] + \lg_3 m_3 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_2'[t]^2 - 2 \lg_3 m_3 (12 \sin[\theta_3[t]] + 11 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_2'[t] \theta_3'[t] - 12 \lg_3 m_3 \sin[\theta_3[t]] \theta_3'[t]^2 - 11 \lg_3 m_3 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]] \theta_3'[t]^2 + 2 \theta_1'[t] (-11 ((\lg_2 m_2 + 12 m_3) \sin[\theta_2[t]] + \lg_3 m_3 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_2'[t] - \lg_3 m_3 (12 \sin[\theta_3[t]] + 11 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_3'[t]) + 11 m_2 \cos[\theta_1[t]] x''[t] + 11 m_3 \cos[\theta_1[t]] x''[t] + \lg_2 m_2 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t]] x''[t] + 12 m_3 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t]] x''[t] + \lg_3 m_3 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] x''[t] + 11 m_2 \sin[\theta_1[t]] y''[t] + 11 m_3 \sin[\theta_1[t]] y''[t] + \lg_2 m_2 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t]] y''[t] + 12 m_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t]] y''[t] + \lg_3 m_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] y''[t] + (11 + 12 + 13) \theta_1''[t] + 11^2 m_2 \theta_1''[t] + \lg_2^2 m_2 \theta_1''[t] + 11^2 m_3 \theta_1''[t] + 12^2 m_3 \theta_1''[t] + \lg_3^2 m_3 \theta_1''[t] + 211 \lg_2 m_2 \cos[\theta_2[t]] \theta_1''[t] + 211 12 m_3 \cos[\theta_2[t]] \theta_1''[t] + 212 \lg_3 m_3 \cos[\theta_3[t]] \theta_1''[t] + 211 \lg_3 m_3 \cos[\theta_2[t] + \theta_3[t]] \theta_1''[t] + \lg_1 m_1 (\cos[\theta_1[t]] x''[t] + \sin[\theta_1[t]] y''[t] + \lg_1 \theta_1''[t]) + (12 + 13) \theta_2''[t] + \lg_2^2 m_2 \theta_2''[t] + 12^2 m_3 \theta_2''[t] + \lg_3^2 m_3 \theta_2''[t] + 11 \lg_2 m_2 \cos[\theta_2[t]] \theta_2''[t] + 11 12 m_3 \cos[\theta_2[t]] \theta_2''[t] + 212 \lg_3 m_3 \cos[\theta_3[t]] \theta_2''[t] + 212 \lg_3 m_3 \cos[\theta_2[t] + \theta_3[t]] \theta_2''[t] + 11 \lg_3 m_3 \cos[\theta_2[t] + \theta_3[t]] \theta_2''[t] + 13 \theta_3''[t] + \lg_3 m_3 (\lg_3 + 12 \cos[\theta_3[t]] + 11 \cos[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_3''[t] \} \}$$

FullSimplify[L02 = D[D[LL, 02'[t]], t] - D[LL, 02[t]]]

$$\{ \{ g (\lg_2 m_2 + 12 m_3) \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t]] + g \lg_3 m_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] + 11 ((\lg_2 m_2 + 12 m_3) \sin[\theta_2[t]] + \lg_3 m_3 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_1'[t]^2 - 212 \lg_3 m_3 \sin[\theta_3[t]] \theta_1'[t] \theta_3'[t] - 212 \lg_3 m_3 \sin[\theta_3[t]] \theta_2'[t] \theta_3'[t] - 12 \lg_3 m_3 \sin[\theta_3[t]] \theta_3'[t]^2 + 12 m_3 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t]] x''[t] + \lg_3 m_3 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] x''[t] + 12 m_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t]] y''[t] + \lg_3 m_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] y''[t] + 12^2 m_3 \theta_1''[t] + \lg_3^2 m_3 \theta_1''[t] + 11 \lg_2 m_2 \cos[\theta_2[t]] \theta_1''[t] + 11 12 m_3 \cos[\theta_2[t]] \theta_1''[t] + 212 \lg_3 m_3 \cos[\theta_3[t]] \theta_1''[t] + 11 \lg_3 m_3 \cos[\theta_2[t] + \theta_3[t]] \theta_1''[t] + \lg_2 m_2 (\cos[\theta_1[t] + \theta_2[t]] x''[t] + \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t]] y''[t] + \lg_2 \theta_1''[t]) + \lg_2^2 m_2 \theta_2''[t] + 12^2 m_3 \theta_2''[t] + \lg_3^2 m_3 \theta_2''[t] + 212 \lg_3 m_3 \cos[\theta_3[t]] \theta_2''[t] + (12 + 13) (\theta_1''[t] + \theta_2''[t]) + (13 + \lg_3^2 m_3 + 12 \lg_3 m_3 \cos[\theta_3[t]]) \theta_3''[t] \} \}$$

FullSimplify[L03 = D[D[LL, 03'[t]], t] - D[LL, 03[t]]]

$$\{ \{ g \lg_3 m_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] + 13 (\theta_1''[t] + \theta_2''[t] + \theta_3''[t]) + \lg_3 m_3 ((12 \sin[\theta_3[t]] + 11 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_1'[t]^2 + 212 \sin[\theta_3[t]] \theta_1'[t] \theta_2'[t] + 12 \sin[\theta_3[t]] \theta_2'[t]^2 + \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] x''[t] + \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] y''[t] + (12 \cos[\theta_3[t]] + 11 \cos[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_1''[t] + 12 \cos[\theta_3[t]] \theta_2''[t] + \lg_3 (\theta_1''[t] + \theta_2''[t] + \theta_3''[t])) \} \}$$

<<慣性行列の生成>>

$$m11 = \text{FullSimplify}[D[Lx, x''[t]]]$$

$$\{(m1 + m2 + m3)\}$$

$$m12 = \text{FullSimplify}[D[Lx, y''[t]]]$$

$$\{0\}$$

$$m13 = \text{FullSimplify}[D[Lx, \theta1''[t]]]$$

$$\{(lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) \text{Cos}[\theta1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) \text{Cos}[\theta1[t] + \theta2[t]] + lg3 m3 \text{Cos}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

$$m14 = \text{FullSimplify}[D[Lx, \theta2''[t]]]$$

$$\{(lg2 m2 + l2 m3) \text{Cos}[\theta1[t] + \theta2[t]] + lg3 m3 \text{Cos}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

$$m15 = \text{FullSimplify}[D[Lx, \theta3''[t]]]$$

$$\{lg3 m3 \text{Cos}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

$$m21 = \text{FullSimplify}[D[Ly, x''[t]]]$$

$$\{0\}$$

$$m22 = \text{FullSimplify}[D[Ly, y''[t]]]$$

$$\{(m1 + m2 + m3)\}$$

$$m23 = \text{FullSimplify}[D[Ly, \theta1''[t]]]$$

$$\{(lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) \text{Sin}[\theta1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) \text{Sin}[\theta1[t] + \theta2[t]] + lg3 m3 \text{Sin}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

$$m24 = \text{FullSimplify}[D[Ly, \theta2''[t]]]$$

$$\{(lg2 m2 + l2 m3) \text{Sin}[\theta1[t] + \theta2[t]] + lg3 m3 \text{Sin}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

$$m25 = \text{FullSimplify}[D[Ly, \theta3''[t]]]$$

$$\{lg3 m3 \text{Sin}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

$$m31 = \text{FullSimplify}[D[L\theta1, x''[t]]]$$

$$\{(lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) \text{Cos}[\theta1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) \text{Cos}[\theta1[t] + \theta2[t]] + lg3 m3 \text{Cos}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

$$m32 = \text{FullSimplify}[D[L\theta1, y''[t]]]$$

$$\{(lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) \text{Sin}[\theta1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) \text{Sin}[\theta1[t] + \theta2[t]] + lg3 m3 \text{Sin}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

$$m33 = \text{FullSimplify}[D[L\theta1, \theta1''[t]]]$$

$$\{(I1 + I2 + I3 + lg1^2 m1 + (l1^2 + lg2^2) m2 + (l1^2 + l2^2 + lg3^2) m3 + 2 l1 (lg2 m2 + l2 m3) \text{Cos}[\theta2[t]] + 2 lg3 m3 (l2 \text{Cos}[\theta3[t]] + l1 \text{Cos}[\theta2[t] + \theta3[t]])\}$$

m34 = FullSimplify[D[L01, 02''[t]]]

$$\{(I2 + I3 + I g^2 m2 + (I2^2 + I g3^2) m3 + I (I g2 m2 + I2 m3) \text{Cos}[\theta2[t]] + 2 I2 I g3 m3 \text{Cos}[\theta3[t]] + I I g3 m3 \text{Cos}[\theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

m35 = FullSimplify[D[L01, 03''[t]]]

$$\{(I3 + I g3^2 m3 + I2 I g3 m3 \text{Cos}[\theta3[t]] + I I g3 m3 \text{Cos}[\theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

m41 = FullSimplify[D[L02, x''[t]]]

$$\{(I g2 m2 + I2 m3) \text{Cos}[\theta1[t] + \theta2[t]] + I g3 m3 \text{Cos}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

m42 = FullSimplify[D[L02, y''[t]]]

$$\{(I g2 m2 + I2 m3) \text{Sin}[\theta1[t] + \theta2[t]] + I g3 m3 \text{Sin}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

m43 = FullSimplify[D[L02, 01''[t]]]

$$\{(I2 + I3 + I g^2 m2 + (I2^2 + I g3^2) m3 + I (I g2 m2 + I2 m3) \text{Cos}[\theta2[t]] + 2 I2 I g3 m3 \text{Cos}[\theta3[t]] + I I g3 m3 \text{Cos}[\theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

m44 = FullSimplify[D[L02, 02''[t]]]

$$\{(I2 + I3 + I g^2 m2 + (I2^2 + I g3^2) m3 + 2 I2 I g3 m3 \text{Cos}[\theta3[t]]\}$$

m45 = FullSimplify[D[L02, 03''[t]]]

$$\{(I3 + I g3^2 m3 + I2 I g3 m3 \text{Cos}[\theta3[t]]\}$$

m51 = FullSimplify[D[L03, x''[t]]]

$$\{I g3 m3 \text{Cos}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

m52 = FullSimplify[D[L03, y''[t]]]

$$\{I g3 m3 \text{Sin}[\theta1[t] + \theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

m53 = FullSimplify[D[L03, 01''[t]]]

$$\{(I3 + I g3^2 m3 + I2 I g3 m3 \text{Cos}[\theta3[t]] + I I g3 m3 \text{Cos}[\theta2[t] + \theta3[t]]\}$$

m54 = FullSimplify[D[L03, 02''[t]]]

$$\{(I3 + I g3^2 m3 + I2 I g3 m3 \text{Cos}[\theta3[t]]\}$$

m55 = FullSimplify[D[L03, 03''[t]]]

$$\{(I3 + I g3^2 m3)\}$$

Mom = Flatten[{ {m11 , m12, m13, m14, m15} , {m21 , m22, m23, m24, m25} ,
 {m31 , m32, m33, m34, m35} , {m41 , m42, m43, m44, m45} , {m51 , m52, m53, m54, m55} }]

{m1 + m2 + m3, 0,
 (lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) Cos[θ1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 (lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]], lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]], 0,
 m1 + m2 + m3, (lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) Sin[θ1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 (lg2 m2 + l2 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]], lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 (lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) Cos[θ1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 (lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) Sin[θ1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 I1 + I2 + I3 + lg1² m1 + (l1² + lg2²) m2 + (l1² + l2² + lg3²) m3 +
 2 l1 (lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ2[t]] + 2 lg3 m3 (l2 Cos[θ3[t]] + l1 Cos[θ2[t] + θ3[t]]),
 I2 + I3 + lg2² m2 + (l2² + lg3²) m3 + l1 (lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ2[t]] + 2 l2 lg3 m3 Cos[θ3[t]] + l1 lg3 m3 Cos[θ2[t] + θ3[t]],
 I3 + lg3² m3 + l2 lg3 m3 Cos[θ3[t]] + l1 lg3 m3 Cos[θ2[t] + θ3[t]],
 (lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 (lg2 m2 + l2 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 I2 + I3 + lg2² m2 + (l2² + lg3²) m3 + l1 (lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ2[t]] + 2 l2 lg3 m3 Cos[θ3[t]] + l1 lg3 m3 Cos[θ2[t] + θ3[t]],
 I2 + I3 + lg2² m2 + (l2² + lg3²) m3 + 2 l2 lg3 m3 Cos[θ3[t]], I3 + lg3² m3 + l2 lg3 m3 Cos[θ3[t]],
 lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]], lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 I3 + lg3² m3 + l2 lg3 m3 Cos[θ3[t]] + l1 lg3 m3 Cos[θ2[t] + θ3[t]], I3 + lg3² m3 + l2 lg3 m3 Cos[θ3[t]], I3 + lg3² m3}

Mom = Partition[Mom, 5]

{m1 + m2 + m3, 0,
 (lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) Cos[θ1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 (lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]], {0, m1 + m2 + m3,
 (lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) Sin[θ1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 (lg2 m2 + l2 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]], lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 {(lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) Cos[θ1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 (lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) Sin[θ1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 m1 lg1² + I1 + I2 + I3 + (l1² + lg2²) m2 + (l1² + l2² + lg3²) m3 + 2 l1 (lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ2[t]] +
 2 lg3 m3 (l2 Cos[θ3[t]] + l1 Cos[θ2[t] + θ3[t]]), m2 lg2² + I2 + I3 + (l2² + lg3²) m3 + l1 (lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ2[t]] +
 2 l2 lg3 m3 Cos[θ3[t]] + l1 lg3 m3 Cos[θ2[t] + θ3[t]], m3 lg3² + l2 m3 Cos[θ3[t]] lg3 + l1 m3 Cos[θ2[t] + θ3[t]] lg3 + I3},
 {(lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 (lg2 m2 + l2 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]], m2 lg2² + I2 + I3 +
 (l2² + lg3²) m3 + l1 (lg2 m2 + l2 m3) Cos[θ2[t]] + 2 l2 lg3 m3 Cos[θ3[t]] + l1 lg3 m3 Cos[θ2[t] + θ3[t]],
 m2 lg2² + I2 + I3 + (l2² + lg3²) m3 + 2 l2 lg3 m3 Cos[θ3[t]], m3 lg3² + l2 m3 Cos[θ3[t]] lg3 + I3},
 {lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]], lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],
 m3 lg3² + l2 m3 Cos[θ3[t]] lg3 + l1 m3 Cos[θ2[t] + θ3[t]] lg3 + I3, m3 lg3² + l2 m3 Cos[θ3[t]] lg3 + I3, m3 lg3² + I3}}

<<遠心力・コリオリ力項の生成>>

c11 = FullSimplify[D[Lx, x'[t]]]

{{0}}

c12 = FullSimplify[D[Lx, y'[t]]]

{{0}}

c13 = FullSimplify[D[Lx, $\theta 1'$ [t]]]

{{-2(((lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) Sin[$\theta 1[t]$] + (lg2 m2 + l2 m3) Sin[$\theta 1[t] + \theta 2[t]$] + lg3 m3 Sin[$\theta 1[t] + \theta 2[t] + \theta 3[t]$]) $\theta 1'[t]$ +
((lg2 m2 + l2 m3) Sin[$\theta 1[t] + \theta 2[t]$] + lg3 m3 Sin[$\theta 1[t] + \theta 2[t] + \theta 3[t]$]) $\theta 2'[t]$ +
lg3 m3 Sin[$\theta 1[t] + \theta 2[t] + \theta 3[t]$] $\theta 3'[t]$)}}

c14 = FullSimplify[D[Lx, $\theta 2'$ [t]]]

{{-2((lg2 m2 + l2 m3) Sin[$\theta 1[t] + \theta 2[t]$] + lg3 m3 Sin[$\theta 1[t] + \theta 2[t] + \theta 3[t]$]) ($\theta 1'[t] + \theta 2'[t]$) -
2lg3 m3 Sin[$\theta 1[t] + \theta 2[t] + \theta 3[t]$] $\theta 3'[t]$)}}

c15 = FullSimplify[D[Lx, $\theta 3'$ [t]]]

{{-2lg3 m3 Sin[$\theta 1[t] + \theta 2[t] + \theta 3[t]$] ($\theta 1'[t] + \theta 2'[t] + \theta 3'[t]$)}}

c21 = FullSimplify[D[Ly, x'[t]]]

{{0}}

c22 = FullSimplify[D[Ly, y'[t]]]

{{0}}

c23 = FullSimplify[D[Ly, $\theta 1'$ [t]]]

{{2(((lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) Cos[$\theta 1[t]$] + (lg2 m2 + l2 m3) Cos[$\theta 1[t] + \theta 2[t]$] + lg3 m3 Cos[$\theta 1[t] + \theta 2[t] + \theta 3[t]$]) $\theta 1'[t]$ +
((lg2 m2 + l2 m3) Cos[$\theta 1[t] + \theta 2[t]$] + lg3 m3 Cos[$\theta 1[t] + \theta 2[t] + \theta 3[t]$]) $\theta 2'[t]$ +
lg3 m3 Cos[$\theta 1[t] + \theta 2[t] + \theta 3[t]$] $\theta 3'[t]$)}}

c24 = FullSimplify[D[Ly, $\theta 2'$ [t]]]

{{2((lg2 m2 + l2 m3) Cos[$\theta 1[t] + \theta 2[t]$] + lg3 m3 Cos[$\theta 1[t] + \theta 2[t] + \theta 3[t]$]) ($\theta 1'[t] + \theta 2'[t]$) +
2lg3 m3 Cos[$\theta 1[t] + \theta 2[t] + \theta 3[t]$] $\theta 3'[t]$)}}

c25 = FullSimplify[D[Ly, $\theta 3'$ [t]]]

{{2lg3 m3 Cos[$\theta 1[t] + \theta 2[t] + \theta 3[t]$] ($\theta 1'[t] + \theta 2'[t] + \theta 3'[t]$)}}

c31 = FullSimplify[D[L $\theta 1$, x'[t]]]

{{0}}

c32 = FullSimplify[D[L $\theta 1$, y'[t]]]

{{0}}

c33 = FullSimplify[D[L01, 01'[t]]]

$\{-2(11((\lg^2 m^2 + 12 m^3) \sin[\theta_2[t]] + \lg^3 m^3 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_2'[t] + \lg^3 m^3 (12 \sin[\theta_3[t]] + 11 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_3'[t])\}$

c34 = FullSimplify[D[L01, 02'[t]]]

$\{-211((\lg^2 m^2 + 12 m^3) \sin[\theta_2[t]] + \lg^3 m^3 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) (\theta_1'[t] + \theta_2'[t]) - 2 \lg^3 m^3 (12 \sin[\theta_3[t]] + 11 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_3'[t]\}$

c35 = FullSimplify[D[L01, 03'[t]]]

$\{-2 \lg^3 m^3 (12 \sin[\theta_3[t]] + 11 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) (\theta_1'[t] + \theta_2'[t] + \theta_3'[t])\}$

c41 = FullSimplify[D[L02, x'[t]]]

$\{0\}$

c42 = FullSimplify[D[L02, y'[t]]]

$\{0\}$

c43 = FullSimplify[D[L02, 01'[t]]]

$\{2(11((\lg^2 m^2 + 12 m^3) \sin[\theta_2[t]] + \lg^3 m^3 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_1'[t] - 12 \lg^3 m^3 \sin[\theta_3[t]] \theta_3'[t])\}$

c44 = FullSimplify[D[L02, 02'[t]]]

$\{-212 \lg^3 m^3 \sin[\theta_3[t]] \theta_3'[t]\}$

c45 = FullSimplify[D[L02, 03'[t]]]

$\{-212 \lg^3 m^3 \sin[\theta_3[t]] (\theta_1'[t] + \theta_2'[t] + \theta_3'[t])\}$

c51 = FullSimplify[D[L03, x'[t]]]

$\{0\}$

c52 = FullSimplify[D[L03, y'[t]]]

$\{0\}$

c53 = FullSimplify[D[L03, 01'[t]]]

$\{2 \lg^3 m^3 ((12 \sin[\theta_3[t]] + 11 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_1'[t] + 12 \sin[\theta_3[t]] \theta_2'[t])\}$

c54 = FullSimplify[D[L03, 02'[t]]]

$\{212 \lg^3 m^3 \sin[\theta_3[t]] (\theta_1'[t] + \theta_2'[t])\}$

c55 = FullSimplify[D[L03, 03'[t]]]

$\{0\}$

CC = Flatten[{**c11, c12, c13, c14, c15**}, {**c21, c22, c23, c24, c25**},
{**c31, c32, c33, c34, c35**}, {**c41, c42, c43, c44, c45**}, {**c51, c52, c53, c54, c55**}]

{0, 0, -2
(((lg1 m1 + 11 (m2 + m3)) Sin[θ1[t]] + (lg2 m2 + 12 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]]) θ1'[t] +
((lg2 m2 + 12 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]]) θ2'[t] +
lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]] θ3'[t]),
-2((lg2 m2 + 12 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]]) (θ1'[t] + θ2'[t]) -
2 lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]] θ3'[t],
-2 lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]] (θ1'[t] + θ2'[t] + θ3'[t]), 0, 0,
2(((lg1 m1 + 11 (m2 + m3)) Cos[θ1[t]] + (lg2 m2 + 12 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]])
θ1'[t] + ((lg2 m2 + 12 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]])
θ2'[t] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]] θ3'[t]),
2((lg2 m2 + 12 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]]) (θ1'[t] + θ2'[t]) +
2 lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]] θ3'[t],
2 lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]] (θ1'[t] + θ2'[t] + θ3'[t]), 0, 0, -2
(11 ((lg2 m2 + 12 m3) Sin[θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) θ2'[t] + lg3 m3 (12 Sin[θ3[t]] + 11 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) θ3'[t]),
-2 11 ((lg2 m2 + 12 m3) Sin[θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) (θ1'[t] + θ2'[t]) -
2 lg3 m3 (12 Sin[θ3[t]] + 11 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) θ3'[t],
-2 lg3 m3 (12 Sin[θ3[t]] + 11 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) (θ1'[t] + θ2'[t] + θ3'[t]), 0, 0,
2(11 ((lg2 m2 + 12 m3) Sin[θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) θ1'[t] - 12 lg3 m3 Sin[θ3[t]] θ3'[t]),
-2 12 lg3 m3 Sin[θ3[t]] θ3'[t], -2 12 lg3 m3 Sin[θ3[t]] (θ1'[t] + θ2'[t] + θ3'[t]),
0, 0, 2 lg3 m3 ((12 Sin[θ3[t]] + 11 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) θ1'[t] + 12 Sin[θ3[t]] θ2'[t]),
2 12 lg3 m3 Sin[θ3[t]] (θ1'[t] + θ2'[t]), 0)

CC = Partition[**CC, 5**]

{{0, 0, -2(((lg1 m1 + 11 (m2 + m3)) Sin[θ1[t]] + (lg2 m2 + 12 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]])
θ1'[t] + ((lg2 m2 + 12 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]])
θ2'[t] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]] θ3'[t]),
-2((lg2 m2 + 12 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]]) (θ1'[t] + θ2'[t]) -
2 lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]] θ3'[t],
-2 lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]] (θ1'[t] + θ2'[t] + θ3'[t]),
{0, 0, 2(((lg1 m1 + 11 (m2 + m3)) Cos[θ1[t]] + (lg2 m2 + 12 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]])
θ1'[t] + ((lg2 m2 + 12 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]])
θ2'[t] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]] θ3'[t]),
2((lg2 m2 + 12 m3) Cos[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]]) (θ1'[t] + θ2'[t]) +
2 lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]] θ3'[t],
2 lg3 m3 Cos[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]] (θ1'[t] + θ2'[t] + θ3'[t]),
{0, 0, -2(11 ((lg2 m2 + 12 m3) Sin[θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) θ2'[t] +
lg3 m3 (12 Sin[θ3[t]] + 11 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) θ3'[t]),
-2 11 ((lg2 m2 + 12 m3) Sin[θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) (θ1'[t] + θ2'[t]) -
2 lg3 m3 (12 Sin[θ3[t]] + 11 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) θ3'[t],
-2 lg3 m3 (12 Sin[θ3[t]] + 11 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) (θ1'[t] + θ2'[t] + θ3'[t]),
{0, 0, 2(11 ((lg2 m2 + 12 m3) Sin[θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) θ1'[t] - 12 lg3 m3 Sin[θ3[t]] θ3'[t]),
-2 12 lg3 m3 Sin[θ3[t]] θ3'[t], -2 12 lg3 m3 Sin[θ3[t]] (θ1'[t] + θ2'[t] + θ3'[t]),
{0, 0, 2 lg3 m3 ((12 Sin[θ3[t]] + 11 Sin[θ2[t] + θ3[t]]) θ1'[t] + 12 Sin[θ3[t]] θ2'[t]),
2 12 lg3 m3 Sin[θ3[t]] (θ1'[t] + θ2'[t]), 0}}

CC = FullSimplify[(1 / 2) * CC]

$$\left\{ \left\{ 0, 0, \right. \right. \\
\left. -((\lg 1 m_1 + 11 (m_2 + m_3)) \sin[\theta_1[t]] + (\lg 2 m_2 + 12 m_3) \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t]] + \lg 3 m_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_1'[t] - \right. \\
\left. ((\lg 2 m_2 + 12 m_3) \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t]] + \lg 3 m_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_2'[t] - \right. \\
\left. \lg 3 m_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] \theta_3'[t], \right. \\
\left. \frac{1}{2} (-2((\lg 2 m_2 + 12 m_3) \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t]] + \lg 3 m_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]]) (\theta_1'[t] + \theta_2'[t]) - \right. \\
\left. 2 \lg 3 m_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] \theta_3'[t]), -\lg 3 m_3 \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] (\theta_1'[t] + \theta_2'[t] + \theta_3'[t]), \right\} \\
\left\{ 0, 0, ((\lg 1 m_1 + 11 (m_2 + m_3)) \cos[\theta_1[t]] + (\lg 2 m_2 + 12 m_3) \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t]] + \lg 3 m_3 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]]) \right. \\
\left. \theta_1'[t] + ((\lg 2 m_2 + 12 m_3) \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t]] + \lg 3 m_3 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]]) \right. \\
\left. \theta_2'[t] + \lg 3 m_3 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] \theta_3'[t], \right. \\
\left. ((\lg 2 m_2 + 12 m_3) \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t]] + \lg 3 m_3 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]]) (\theta_1'[t] + \theta_2'[t]) + \right. \\
\left. \lg 3 m_3 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] \theta_3'[t], \lg 3 m_3 \cos[\theta_1[t] + \theta_2[t] + \theta_3[t]] (\theta_1'[t] + \theta_2'[t] + \theta_3'[t]), \right\} \left\{ 0, 0, \right. \\
\left. -11 ((\lg 2 m_2 + 12 m_3) \sin[\theta_2[t]] + \lg 3 m_3 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_2'[t] - \lg 3 m_3 (12 \sin[\theta_3[t]] + 11 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_3'[t], \right. \\
\left. -11 ((\lg 2 m_2 + 12 m_3) \sin[\theta_2[t]] + \lg 3 m_3 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) (\theta_1'[t] + \theta_2'[t]) - \right. \\
\left. \lg 3 m_3 (12 \sin[\theta_3[t]] + 11 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_3'[t], \right. \\
\left. -\lg 3 m_3 (12 \sin[\theta_3[t]] + 11 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) (\theta_1'[t] + \theta_2'[t] + \theta_3'[t]), \right\} \\
\left\{ 0, 0, 11 ((\lg 2 m_2 + 12 m_3) \sin[\theta_2[t]] + \lg 3 m_3 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_1'[t] - 12 \lg 3 m_3 \sin[\theta_3[t]] \theta_3'[t], \right. \\
\left. -12 \lg 3 m_3 \sin[\theta_3[t]] \theta_3'[t], -12 \lg 3 m_3 \sin[\theta_3[t]] (\theta_1'[t] + \theta_2'[t] + \theta_3'[t]), \right\} \\
\left\{ 0, 0, \lg 3 m_3 ((12 \sin[\theta_3[t]] + 11 \sin[\theta_2[t] + \theta_3[t]]) \theta_1'[t] + 12 \sin[\theta_3[t]] \theta_2'[t]), 12 \lg 3 m_3 \sin[\theta_3[t]] (\theta_1'[t] + \theta_2'[t]), 0 \right\} \right\}$$

<<重力項の生成>>

g11 = FullSimplify[D[Lx, g] * g]

{0}

g21 = FullSimplify[D[Ly, g] * g]

{g(m1 + m2 + m3)}

g31 = FullSimplify[D[Lθ1, g] * g]

{g((lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) Sin[θ1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]])}

g41 = FullSimplify[D[Lθ2, g] * g]

{g((lg2 m2 + l2 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]])}

g51 = FullSimplify[D[Lθ3, g] * g]

{g lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]]}

G = Flatten[{g11, g21, g31, g41, g51}]

{0, g(m1 + m2 + m3),

g((lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) Sin[θ1[t]] + (lg2 m2 + l2 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]],

g((lg2 m2 + l2 m3) Sin[θ1[t] + θ2[t]] + lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]), g lg3 m3 Sin[θ1[t] + θ2[t] + θ3[t]}

G = Partition[G, 1]

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ g(m1 + m2 + m3) \\ g((lg1 m1 + l1 (m2 + m3)) \sin(\theta1(t)) + (lg2 m2 + l2 m3) \sin(\theta1(t) + \theta2(t)) + lg3 m3 \sin(\theta1(t) + \theta2(t) + \theta3(t))) \\ g((lg2 m2 + l2 m3) \sin(\theta1(t) + \theta2(t)) + lg3 m3 \sin(\theta1(t) + \theta2(t) + \theta3(t))) \\ g lg3 m3 \sin(\theta1(t) + \theta2(t) + \theta3(t)) \end{array} \right)$$

付録 B . 角運動量保存則

剛体 3 リンクモデルの合成重心まわりの角運動量 L は次のように表現される .

$$I_1 \cdot \dot{\theta}_1 + I_2 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + I_3 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + \sum_{i=1}^3 [m_i \{(\mathbf{S}_i - \mathbf{r}_G) \times (\dot{\mathbf{S}}_i - \mathbf{V}_G)\}] = L \quad (\text{B-1})$$

ただし ,

I_i : 各リンク重心まわりの慣性モーメント (Nm^2)

$\mathbf{S}_i = [S_{ix}, S_{iy}]^T$: 各リンク重心位置ベクトル (m)

$\dot{\mathbf{S}}_i = [\dot{S}_{ix}, \dot{S}_{iy}]^T$: 各リンク重心速度ベクトル (m/sec)

$\mathbf{r}_G = [x_G, y_G]^T$: 合成重心位置ベクトル (m)

$\mathbf{V}_G = [V_{xG}, V_{yG}]^T$: 合成重心速度ベクトル (m/sec)

式(B-1)を展開し , 各関節角速度 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ について整理すると式(B-2)のようになる

$$I_g(t) \cdot \dot{\theta}_1(t) + \tilde{I}_2 \cdot \dot{\theta}_2(t) + \tilde{I}_3 \cdot \dot{\theta}_3(t) = L \quad (\text{B-2})$$

ただし ,

$$I_g = (I_1 + I_2 + I_3) + m_1 \{ (S_{1x} - x_G)^2 + (S_{1y} - y_G)^2 \} \\ + m_2 \{ (S_{2x} - x_G)^2 + (S_{2y} - y_G)^2 \} + m_3 \{ (S_{3x} - x_G)^2 + (S_{3y} - y_G)^2 \} \quad (\text{B-3})$$

$$\tilde{I}_2 = (I_2 + I_3) + m_1 \{ -(S_{1x} - x_G)A + (S_{1y} - y_G)C \} \\ + m_2 [(S_{2x} - x_G) \{ l_{g2} \sin(\theta_1 + \theta_2) - A \} - (S_{2y} - y_G) \{ l_{g2} \cos(\theta_1 + \theta_2) - C \}] \\ + m_3 [(S_{3x} - x_G) \{ l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - A \} \\ - (S_{3y} - y_G) \{ l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_{g3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - C \}] \quad (\text{B-4})$$

$$\tilde{I}_3 = I_3 + m_1 \{ -(S_{1x} - x_G)B + (S_{1y} - y_G)D \} \\ + m_2 [-(S_{2x} - x_G)B + (S_{2y} - y_G)D] \\ + m_3 [(S_{3x} - x_G) \{ l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - B \} \\ - (S_{3y} - y_G) \{ l_{g3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - D \}] \quad (\text{B-5})$$

ここで

$$A = \frac{m_2 \{l_{g2} \sin(\theta_1 + \theta_2)\} + m_3 \{l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\}}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (\text{B-6})$$

$$B = \frac{m_3 \{l_{g3} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\}}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (\text{B-7})$$

$$C = \frac{m_2 \{l_{g2} \cos(\theta_1 + \theta_2)\} + m_3 \{l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_{g3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\}}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (\text{B-8})$$

$$D = \frac{m_3 \{l_{g3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\}}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (\text{B-9})$$

である .

付録 C . 合成重心まわりの慣性モーメントと関節軌道の関係

合成重心まわりの慣性モーメント変化を表す時間関数 $I_g(t)$ を , 関節軌道 $\Phi(t) = [\theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$ で表す .

剛体 3 リンクモデルの姿勢を $\theta_1(t) = 0$ として図 C - 1 のように設定する . この姿勢において , 各リンクの重心位置ベクトルは関節軌道 $\Phi(t) = [\theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$ を用いて , 次のように表すことができる .

$$S_1 = \begin{bmatrix} S_{1x} \\ S_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_{g1} \end{bmatrix} \quad (C-1)$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} S_{2x} \\ S_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{g2} \sin \theta_2(t) \\ -l_1 - l_{g2} \cos \theta_2(t) \end{bmatrix} \quad (C-2)$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} S_{3x} \\ S_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \sin \theta_2(t) + l_{g3} \sin(\theta_2(t) + \theta_3(t)) \\ -l_1 - l_2 \cos \theta_2(t) - l_{g3} \cos(\theta_2(t) + \theta_3(t)) \end{bmatrix} \quad (C-3)$$

また , 合成重心位置ベクトルは式(C-4)のように表される .

$$r_G = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 S_{1x} + m_2 S_{2x} + m_3 S_{3x} / M \\ m_1 S_{1y} + m_2 S_{2y} + m_3 S_{3y} / M \end{bmatrix} \quad (C-4)$$

ここで ,

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

したがって , 成重心まわりの慣性モーメント変化を表す時間関数は , 関節軌道 $\Phi(t) = [\theta_2(t) \ \theta_3(t)]^T$ を用いて次のように表すことができる .

$$I_g(\theta_2(t), \theta_3(t)) = \sum_{i=1}^3 I_i + \sum_{i=1}^3 m_i \left\{ (x_G - S_{ix})^2 + (y_G - S_{iy})^2 \right\} \quad (C-5)$$

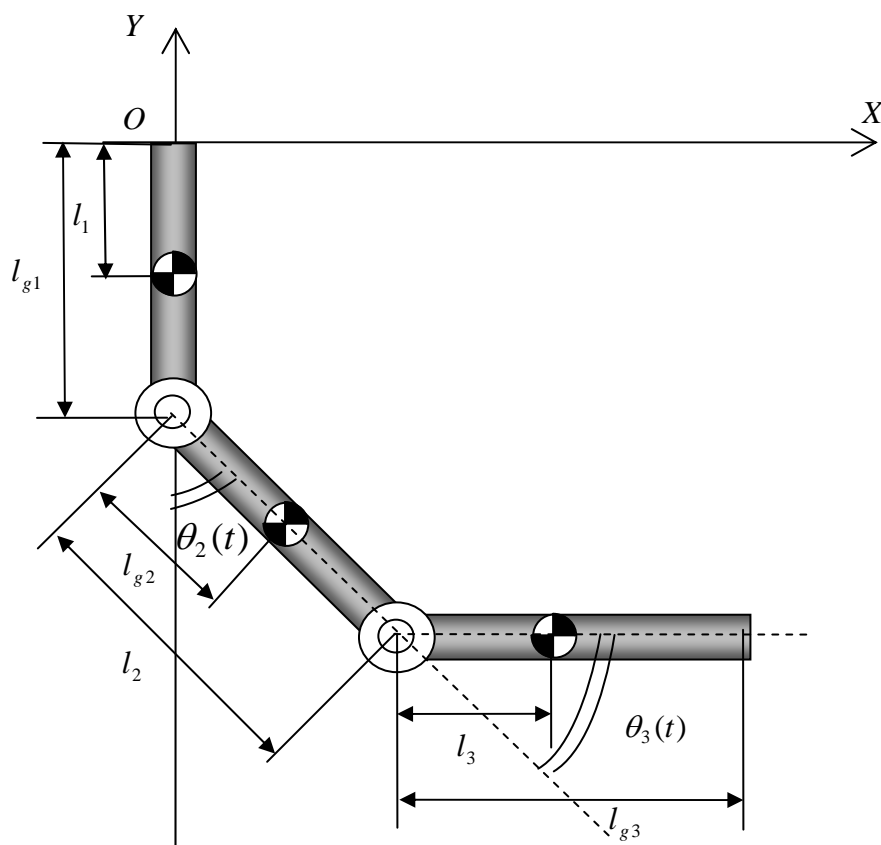


Fig.C-1 The position of links

付録D . チェビシエフ多項式

チェビシエフ多項式について示す .
 フーリエ余弦級数の基底

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos m\varphi, \quad m=1,2,\dots \quad (\text{D-1})$$

は区間 $[0, \pi]$ で正規直交系をなす .

$$\int_0^{\pi} \cos m\varphi d\varphi = 0, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi = \delta_{mn} \quad m, n=1,2,\dots \quad (\text{D-2})$$

式(D-2)を用いて変数変換をすると , 関数の定義域は $[-1, 1]$ になる .

$$x = \cos \varphi, \quad d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{D-3})$$

そして ,

$$\cos m\varphi = T_m(x) \quad (\text{D-4})$$

とおくと , 明らかに以下のようなになる .

$$|T_m(x)| \leq 1, \quad |x| \leq 1 \quad (\text{D-5})$$

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = \cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1 = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= \cos 3\varphi = 4\cos^3 \varphi - 4\cos \varphi = 4x^3 - 3x, \dots \end{aligned} \quad (\text{D-6})$$

このように $T_m(x)$ は x の多項式になり , チェビシエフ多項式と呼ばれる .
Fig.D-1 にチェビシエフ多項式 $T_m(x)$, $m=1,2,3,\dots,9,10$ の波形を示す .

対称性 : チェビシエフ多項式 $T_m(x)$ は x の m 次の多項式で , m が偶数なら偶数次 , 奇数なら奇数次のべきを含む .

正規化 : どのような m に対しても $T_m(x)$ の最大値は $+1$, $m \geq 1$ に対しての最小値は -1 になる . したがって , $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$, $T_2(x)=2x^2-1$ になる . また , $T_m(x)$ は区間 $[-1, 1]$ に m 個の根

$$x_i = \cos \left\{ \frac{\pi \left(i - \frac{1}{2} \right)}{m} \right\} \quad m \geq 1 \quad (\text{D-7})$$

を持つ。

直交性：チェビシェフ多項式 $T_m(x)$ は 2 通りの直交性を持つ。

積分系では，

$$\int_{-1}^1 \frac{T_{m'}(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & m' \neq m \\ \frac{\pi}{2} & m' = m \neq 0 \\ \pi & m' = m = 0 \end{cases} \quad (\text{D-8})$$

離散系では，

$$\sum_{m=1}^k T_i(x_m) T_j(x_m) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{k}{2} & i = j \neq 0 \\ k & i = j = 0 \end{cases} \quad (\text{D-9})$$

ここで， $[x_i]$ は式(D-7)で与えられるチェビシェフ多項式の k 個の集合を表す。

漸化式：チェビシェフ多項式 $T_m(x)$ は次式の漸化式を満たす。

$$T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) \quad (\text{D-10})$$

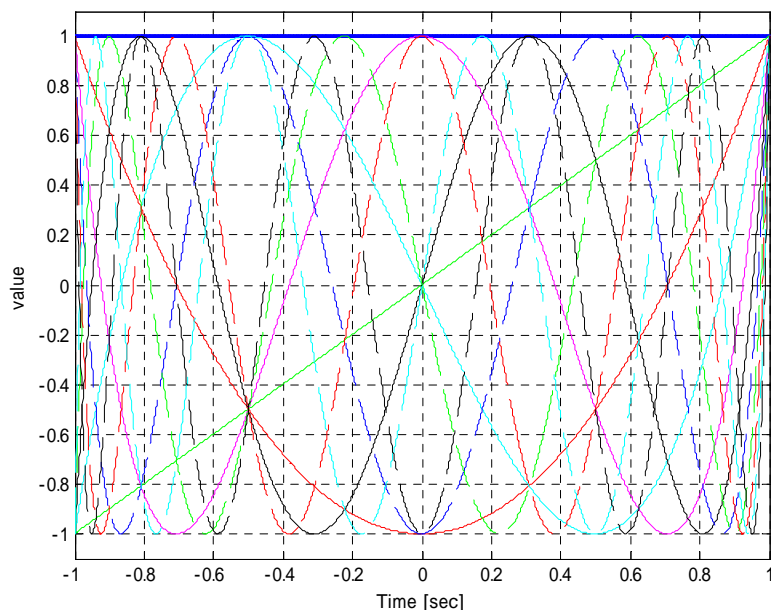


Fig.D-1 The tchebycheff polynomial

付録 E . Interactive Physics について

主な概要

Interactive Physics (以下 IP) は、ニュートン力学の基本をシミュレーションすることが可能である。画面にオブジェクトを描き、アニメーションでシミュレートすることができる。ばね、ロープ、ダンパー、メーターなど、さまざまなオブジェクト形状を使用することができ、実行をクリックすると、シミュレーションがアニメーションで表示される。IP に組み込まれたシミュレーションエンジンがオブジェクトの動きを決定し、シミュレーションを高精度なムービーによって表現される。

プログラミングは不要で、シミュレーションは、オブジェクトをどのようにワークスペースに配置するかによって定義される。摩擦や弾性はユーザーが変更することや、重力などの数値を変更、またはオフに設定することなど、細かい設定ができ、オブジェクトのあらゆる物理的特性を仮想的に制御することが可能である。また、シミュレーションを実行しながら、速度、加速度、運動量、角運動量、運動エネルギーおよび摩擦力などの物理量を測定することができ、これらの測定値を数字、グラフ、アニメーション化されたベクトルで表示することができるため、視覚的に確認すること可能である。

アプリケーション間の通信機能

IP は、シミュレーション時に他のアプリケーションとの通信に DDE (Dynamic Data Exchange) 機能を使っている。実物の機械設計モデルを指定し、それを外部から他のプログラムを通じて制御することができる。たとえば、本報告でも用いているように MATLAB の関数 M ファイルとの通信によるシステムの制御や、Microsoft Excel のワークシートを使って外部のシステムを設計することができ、シミュレーションの進行中にデータをワークシートへ送信し、ワークシートから制御シグナルを受信することができる。

さらに、他のアプリケーションがスクリプトコマンドを (WMBasic を使って) IP へ送信することも可能である。外部のアプリケーションは、DDE のいくつかの基本的な特徴をサポートしているかぎり、IP へコマンドを送信したり、IP の全プログラムを呼び出すことができる。

データのエクスポート

数値シミュレーションはメーターデータやファイルにエクスポートすることができ、Video for Windows(AVI)エクスポートをサポートしている。

入出力ツール

リアルタイムの入力ツールとして、スライダ、ボタン、テキストフィールドなど、出力ツールとしては、グラフ、デジタル表示、棒グラフ表示などがある。

グローバルフォース

計算式を準備すれば、惑星の重力、地球の重力、静電気、空気抵抗（速度や平方速度に対するもの）、さらにはユーザー独自に特別設計したグローバルフォースをシミュレートすることが可能である。たとえば、磁場、風、ブラウン管電子銃場を作成することができる。

単位系の制御

キログラムやメートル、ラジアンなどの標準メートル法、ヤードやフィート、インチ、度、秒、ポンドなどの標準英国単位、その他の単位（光年など）から選択することができる。

式言語

IPでは、演算表現（条件文を含む）を作成する言語システムがMicrosoft Excel等で使用されている式言語と非常によく似ている。値はすべて数字ではなく式で表される。ロケットをシミュレートする場合、その質量に対する公式を書くと、燃料が消費されるとともにその質量が減少する。三角関数を使えば、振動を誘発する作動装置が作り出す力をシミュレートする式を書くことができる。

付録 F .MATLAB ソースプログラム

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%           空中姿勢制御シミュレーション           %
%           行程           %
%           必要パラメータInput           %
%           %           %
%           T.Seki           %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%=====
%   パラメータ入力   %
%=====

%姿勢の入力
th1_t0=input('初期姿勢th1_t0を入力してください . [deg]');
th2_t0=input('初期姿勢th2_t0を入力してください . [deg]');
th3_t0=input('初期姿勢th3_t0を入力してください . [deg]');

%th1_tfは後の計算から決定される.
th2_tf=input('最終姿勢th2_tfを入力してください . [deg]');
th3_tf=input('最終姿勢th3_tfを入力してください . [deg]');

%角速度の入力
dth1_t0=input('初期角速度dth1_t0を入力してください . [deg/sec]');
dth2_t0=input('初期角速度dth2_t0を入力してください . [deg/sec]');
dth3_t0=input('初期角速度dth3_t0を入力してください . [deg/sec]');

dth1_tf=input('最終角速度dth1_tfを入力してください . [deg/sec]');
dth2_tf=input('最終角速度dth2_tfを入力してください . [deg/sec]');
dth3_tf=input('最終角速度dth3_tfを入力してください . [deg/sec]');

%deg rad
%姿勢
th1_t0=th1_t0*pi/180
th2_t0=th2_t0*pi/180
th3_t0=th3_t0*pi/180

th2_tf=th2_tf*pi/180
th3_tf=th3_tf*pi/180

%角速度
dth1_t0=dth1_t0*pi/180
dth2_t0=dth2_t0*pi/180
dth3_t0=dth3_t0*pi/180

dth1_tf=dth1_tf*pi/180
dth2_tf=dth2_tf*pi/180
dth3_tf=dth3_tf*pi/180
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%               空中姿勢制御シミュレーション               %
%               行程                                       %
%               初期リンク重心速度・初期合成重心速度の計算   %
%               T.Seki                                       %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%=====
%リンクパラメータ%
%=====

%3links model parameters
%Mass[kg]
m1=0.182;
m2=0.909;
m3=0.727;

%Total Mass[kg]
M=m1+m2+m3;

%Length[m]
l1=0.223;
l2=0.160;
l3=0.267;

%Distance from joint from center of gravity[m]
lg1=0.1115;
lg2=0.0800;
lg3=0.1335;

%moment of inertia[kgm^2]
I1=0.00088;
I2=0.00256;
I3=0.00482;

%=====
%high bar 重心速度 drh=[dx0,dy0]%
%=====
dx0=0;
dy0=0;

%=====
%リンク初期重心速度dS0[m/sec]の計算%
%=====

%Link1初期重心速度dS01[m/sec]
dS01x=dx0+lg1*dth1_t0*cos(th1_t0)
dS01y=dy0+lg1*dth1_t0*sin(th1_t0)

%Link2初期重心速度dS02[m/sec]
dS02x=dx0+l1*dth1_t0*cos(th1_t0)+lg2*(dth1_t0+dth2_t0)*cos(th1_t0+th2_t0)
dS02y=dy0+l1*dth1_t0*sin(th1_t0)+lg2*(dth1_t0+dth2_t0)*sin(th1_t0+th2_t0)

%Link3初期重心速度dS03[m/sec]
dS03x=dx0+l1*dth1_t0*cos(th1_t0)+l2*(dth1_t0+dth2_t0)*cos(th1_t0+th2_t0)+lg3*(dth1_t0+dth2_t0+dth3_t0)*cos(th1_t0+th2_t0+th3_t0)
dS03y=dy0+l1*dth1_t0*sin(th1_t0)+l2*(dth1_t0+dth2_t0)*sin(th1_t0+th2_t0)+lg3*(dth1_t0+dth2_t0+dth3_t0)*sin(th1_t0+th2_t0+th3_t0)

```


付録

```
%=====
%   初期合成重心速度VOGの計算   %
%=====
%合成重心速度VOG[m/sec]
Vx0G=(m1*dS01x+m2*dS02x+m3*dS03x)/M
Vy0G=(m1*dS01y+m2*dS02y+m3*dS03y)/M

%=====
%   初期合成重心速度方向thVOGの算出   %
%=====
%初期合成重心速度方向thVOG[rad]
thVOG=atan(Vy0G/Vx0G)

%rad deg
degthVOG=thVOG*180/pi

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               空中姿勢制御シミュレーション                               %
%                               行程                               %
%                               滞空時間の計算                               %
%                               %                               %
%                               T.Seki                               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%シンボリック変数
syms tf

%=====
%   重力加速度g[m/sec^2]   %
%=====
g=9.807;

%=====
%high bar 中心位置 rh=[xh,yh] %
%=====
xh=0;
yh=0;

%=====
%low bar 中心位置 rl=[xl,yl] %
%=====
xl=0.60;
yl=-0.27;

%=====
%リンク初期重心位置S[m]の計算%
%=====

%Link1初期重心位置S01[m]
S01x=xh+lg1*sin(th1_t0);
S01y=yh-lg1*cos(th1_t0);

%Link2初期重心位置S02[m]
S02x=xh+l1*sin(th1_t0)+lg2*sin(th1_t0+th2_t0);
S02y=yh-l1*cos(th1_t0)-lg2*cos(th1_t0+th2_t0);

%Link3初期重心位置S03[m]
S03x=xh+l1*sin(th1_t0)+l2*sin(th1_t0+th2_t0)+lg3*sin(th1_t0+th2_t0+th3_t0);
S03y=yh-l1*cos(th1_t0)-l2*cos(th1_t0+th2_t0)-lg3*cos(th1_t0+th2_t0+th3_t0);
```

付録

```
%=====
% 初期合成重心位置 r0G の計算 %
%=====
%初期合成重心位置 r0G=[x0G,y0G] [m]
x0G=(m1*S01x+m2*S02x+m3*S03x)/M
y0G=(m1*S01y+m2*S02y+m3*S03y)/M

%=====
% 最終合成重心位置 rtfG の式 %
%=====
%最終合成重心位置 rtfG=[xtfG,ytfG] [m]
a1=(m1*Ig1+m2*I1+m3*I1)/M;
a2=(m2*Ig2+m3*I2)/M;
a3=(m3*Ig3)/M;

%xtfG=xl+a1*sin(th1_tf)+a2*sin(th1_tf+th2_tf)+a3*sin(th1_tf+th2_tf+th3_tf)
%ytfG=y1-a1*cos(th1_tf)-a2*cos(th1_tf+th2_tf)-a3*cos(th1_tf+th2_tf+th3_tf)

%=====
% low bar を中心とする最終合成重心の軌跡 %
%      円の軌跡を描く %
%=====

%(xtfG-xl)^2+(ytfG-y1)^2=(a1+a2*cos(th2_tf)+a3*cos(th2_tf+th3_tf))^2+(a2*sin(th2_tf)+a3*sin(th2_tf+th3_tf))^2

%=====
%      合成重心時間関数 %
%      放物線 %
%=====

%xtfG=x0G+Vx0G*tf
%ytfG=y0G+Vy0G*tf-(1/2)*g*tf^2

%=====
%      滞空時間 tf の算出 %
% 合成重心時間関数と最終合成重心位置の円の軌跡より導出 %
% 滞空時間 tf の4次方程式を解くことにより算出 %
% Symbolic Math Toolbox 使用 %
%=====
r=sqrt((a1+a2*cos(th2_tf)+a3*cos(th2_tf+th3_tf))^2+(a2*sin(th2_tf)+a3*sin(th2_tf+th3_tf))^2)%low bar 中心
から合成重心までの距離
tf=solve(((x0G+Vx0G*tf)-xl)^2+((y0G+Vy0G*tf)-(1/2)*g*tf^2)-y1)^2-(a1+a2*cos(th2_tf)+a3*cos(th2_tf+th3_tf))^2-(a2*sin(th2_tf)+a3*sin(th2_tf+th3_tf))^2);
tf=double(tf)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%      空中姿勢制御シミュレーション %
%      行程 %
%      低棒把持可能位置の判別 %
%      %
%      T.Seki %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%stroke4のtfを1つに定義してから実行すること!!
tf=input('滞空時間tfを選択してください');
```

付録

```
%=====
% 最終合成重心位置rtfGの計算%
%=====
%最終合成重心位置rtfG=[xtfG,ytfG] [m]
xtfG=x0G+Vx0G*tf
ytfG=y0G+Vy0G*tf-(1/2)*g*tf^2

if (xtfG<=xl) & (ytfG>=yl)
    disp('possible')
else
    disp('impossible')
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               空中姿勢制御シミュレーション                               %
%                               行程                               %
%                               最終姿勢th1_tfの算出                               %
%                               %                               %
%                               T.Seki                               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%=====
% 最終合成重心位置rtfGの計算 %
%=====
%最終合成重心位置rtfG=[xtfG,ytfG] [m]
%xtfG=x0G+Vx0G*tf
%ytfG=y0G+Vy0G*tf-(1/2)*g*tf^2

%=====
% 最終合成重心位置rtfGの式 %
%=====
%最終合成重心位置rtfG=[xtfG,ytfG] [m]
%a1=(m1*lg1+m2*l1+m3*l1)/M;
%a2=(m2*lg2+m3*l2)/M;
%a3=(m3*lg3)/M;

%xtfG=xl+a1*sin(th1_tf)+a2*sin(th1_tf+th2_tf)+a3*sin(th1_tf+th2_tf+th3_tf)
%ytfG=yl-a1*cos(th1_tf)-a2*cos(th1_tf+th2_tf)-a3*cos(th1_tf+th2_tf+th3_tf)

%上式を整理
%xtfG=xl+(a1+a2*cos(th2_tf)+a3*cos(th2_tf+th3_tf))*sin(th1_tf)+(a2*sin(th2_tf)+a3*sin(th2_tf+th3_tf))*cos(
th1_tf)
%ytfG=yl-(a1+a2*cos(th2_tf)+a3*cos(th2_tf+th3_tf))*cos(th1_tf)+(a2*sin(th2_tf)+a3*sin(th2_tf+th3_tf))*sin(
th1_tf)

b1=(a1+a2*cos(th2_tf)+a3*cos(th2_tf+th3_tf));
b2=(a2*sin(th2_tf)+a3*sin(th2_tf+th3_tf));

%=====
% 最終姿勢th1_tfの算出 %
%=====
if (th2_tf==0) & (th3_tf==0)
    th1_tf=atan((ytfG-yl)/(xtfG-xl))+(3/2)*pi
else
    th1_tf=-asin((b1*(xtfG-xl)+b2*(ytfG-yl))/(b1^2+b2^2))+pi
end

%rad deg
th1_tf=th1_tf*180/pi
```

付録

```
%deg rad
th1_tf=th1_tf*pi/180;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                空中姿勢制御シミュレーション                %
%                行程                %
%                系全体の角運動量の計算                %
%                %                %
%                T.Seki                %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%=====
% 系全体の角運動量Lの計算 %
%=====
%系全体の角運動量L [kgm^2/sec]

%L=sigma(i,1,3)(Ii*dthi_t0+mi*((S0i-r0G)*(dS0i-V0G)))

L=l1*dth1_t0+l2*(dth1_t0+dth2_t0)+l3*(dth1_t0+dth2_t0+dth3_t0)+...
m1*((S01x-x0G)*(dS01y-Vy0G)-(S01y-y0G)*(dS01x-Vx0G))+...
m2*((S02x-x0G)*(dS02y-Vy0G)-(S02y-y0G)*(dS02x-Vx0G))+...
m3*((S03x-x0G)*(dS03y-Vy0G)-(S03y-y0G)*(dS03x-Vx0G))

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                空中姿勢制御シミュレーション                %
%                行程                %
%                回転量の計算                %
%                %                %
%                T.Seki                %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%=====
% 回転量の計算%
%=====
%宙返りによる回転量thp [rad]

if (th2_t0==0) & (th3_t0==0) & (th2_tf==0) & (th3_tf==0)
    thp=th1_tf-th1_t0

    %rad deg
    thp=thp*180/pi

    %deg rad
    thp=thp*pi/180;
else
    disp('Use the curvilinear integral calculation')
end
```

付録

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                空中姿勢制御シミュレーション                %
%                行程                %
%                制御可能パラメータ範囲の確認                %
%                %                %
%                T.Seki                %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%=====
% 制御可能パラメータ範囲の確認%
%=====
```

```
%角運動量L, 滞空時間tf, 系全体の慣性モーメントIgから
%制御可能な宙返りによる回転量thpが限定される.
%この制御可能な宙返りによる回転量thpは, Igmax, Igminより求められる.
%このプログラムを実行して得られるグラフの2つの曲面に挟まれた空間が
%制御可能なパラメータである.
```

```
%thpが制御不可能であれば, 行程 に戻り, 初期角速度を変更しなければならない.
```

```
%thpの入力
thp=input(' thp[rad]の値を入力してください');
```

```
% J(t) の最小値 Ig最大
JAmin=24.936;
% J(t) の最大値 Ig最小
JAmx=100.841;
```

```
tair=0.05:0.01:1;%滞空時間
thp_possible=0:0.01:2*pi;%宙返りによる回転角度
[tair thp_possible]=meshgrid(tair, thp_possible);%2変数配列
```

```
Lmin=thp_possible./(JAmin.*tair);
Lmax=thp_possible./(JAmx.*tair);
```

```
figure(1),
subplot(211),mesh(tair, thp_possible,Lmin),hidden off
subplot(212),mesh(tair, thp_possible,Lmax),hidden off
```

```
figure(2),
mesh(tair, thp_possible,Lmin),hidden off
hold on,
mesh(tair, thp_possible,Lmax),hidden off
xlabel('duration of flight tf [s]');
ylabel('rotational angle p [rad]');
zlabel('angular momentum L [kgm^2/s]');
```

```
%stroke1~7から算出された回転量の制御可能判別
cal_thp_possible_min=L*JAmin*tf
cal_thp_possible_man=L*JAmx*tf
if(cal_thp_possible_min <= thp) & (cal_thp_possible_man >= thp)
    disp('possible')
else
    disp('impossible')
end
```

付録

```
%*****%
%           このプログラムは関節角度軌道を導出するプログラムです           %
%           正規直交基底アルゴリズム(チェビシェフ多項式)を使用           %
%           目的関数を最小にする基底係数Xを準ニュートン法(BFGS法)により求めます . %
%           境界条件(角度・角速度)を満たすよう、高次調波成分の係数を方程式より決定している%
%
%           T. SEKI
%*****%

function [x, fval, exitflag, output, grad, hessian] =
runsharedvalues2008_2(L, thp, t0, tf, th2_t0, th3_t0, th2_tf, th3_tf, dth2_t0, dth3_t0, dth2_tf, dth3_tf)

%共有変数の初期化
objval=[];

%解(正規直交基底係数)の初期値設定
x0=[1.3 1 1 1 1 1 1 1 -0.5 1 1 1 1 1 1];

%オプション構造体の設定
options=optimset('LargeScale','off','Display','iter','MaxFunEvals',10000,'TolFun',1e-50);

%中規模アルゴリズム 準ニュートン法(BFGS)による最小化アルゴリズム
[x, fval, exitflag, output, grad, hessian]=fminunc(@objfun, x0, options);

%-----%
%目的関数 %
%-----%
function f=objfun(x)
%変数objvalは、objfunとrunsharedvaluesが共有します。

%3links model parameters
%Mass
m1=0.182;
m2=0.909;
m3=0.727;

%Length
l1=0.223;
l2=0.160;
l3=0.267;

%Distance from joint from center of gravity
lg1=0.1115;
lg2=0.0800;
lg3=0.1335;

%amoment of inertia
I1=0.00088;
I2=0.00256;
I3=0.00482;

%-----%
%目的関数第1項 %
%-----%
J1=quadl(@dai_iti_ko, t0, tf);

function g=dai_iti_ko(t)

%-----%
% 関節角度軌道を有限次元の正規直交基底で近似(チェビシェフ多項式) %
%-----%
```

%TNまでのチェビシェフ多項式で、関節角軌道を近似する。

N=10;

%チェビシェフの多項式

```

T0=1;
T1=t;
T2=2.*t.^2-1;
T3=4.*t.^3-3.*t;
T4=8.*t.^4-8.*t.^2+1;
T5=16.*t.^5-20.*t.^3+5.*t;
T6=32.*t.^6-48.*t.^4+18.*t.^2-1;
T7=64.*t.^7-112.*t.^5+56.*t.^3-7.*t;
T8=128.*t.^8-256.*t.^6+160.*t.^4-32.*t.^2+1;
T9=256.*t.^9-576.*t.^7+432.*t.^5-120.*t.^3+9.*t;
T10=512.*t.^10-1280.*t.^8+1120.*t.^6-400.*t.^4+50.*t.^2-1;

T0_t0=1;
T1_t0=t0;
T2_t0=2.*t0.^2-1;
T3_t0=4.*t0.^3-3.*t0;
T4_t0=8.*t0.^4-8.*t0.^2+1;
T5_t0=16.*t0.^5-20.*t0.^3+5.*t0;
T6_t0=32.*t0.^6-48.*t0.^4+18.*t0.^2-1;
T7_t0=64.*t0.^7-112.*t0.^5+56.*t0.^3-7.*t0;
T8_t0=128.*t0.^8-256.*t0.^6+160.*t0.^4-32.*t0.^2+1;
T9_t0=256.*t0.^9-576.*t0.^7+432.*t0.^5-120.*t0.^3+9.*t0;
T10_t0=512.*t0.^10-1280.*t0.^8+1120.*t0.^6-400.*t0.^4+50.*t0.^2-1;

T0_tf=1;
T1_tf=tf;
T2_tf=2.*tf.^2-1;
T3_tf=4.*tf.^3-3.*tf;
T4_tf=8.*tf.^4-8.*tf.^2+1;
T5_tf=16.*tf.^5-20.*tf.^3+5.*tf;
T6_tf=32.*tf.^6-48.*tf.^4+18.*tf.^2-1;
T7_tf=64.*tf.^7-112.*tf.^5+56.*tf.^3-7.*tf;
T8_tf=128.*tf.^8-256.*tf.^6+160.*tf.^4-32.*tf.^2+1;
T9_tf=256.*tf.^9-576.*tf.^7+432.*tf.^5-120.*tf.^3+9.*tf;
T10_tf=512.*tf.^10-1280.*tf.^8+1120.*tf.^6-400.*tf.^4+50.*tf.^2-1;

dT0_t0=0;
dT1_t0=1;
dT2_t0=4.*t0;
dT3_t0=12.*t0.^2-3;
dT4_t0=32.*t0.^3-16.*t0;
dT5_t0=80.*t0.^4-60.*t0.^2+5;
dT6_t0=192.*t0.^5-192.*t0.^3+36.*t0;
dT7_t0=448.*t0.^6-560.*t0.^4+168.*t0.^2-7;
dT8_t0=1024.*t0.^7-1536.*t0.^5+640.*t0.^3-64.*t0;
dT9_t0=2304.*t0.^8-4032.*t0.^6+2160.*t0.^4-360.*t0.^2+9;
dT10_t0=5120.*t0.^9-10240.*t0.^7+6720.*t0.^5-1600.*t0.^3+100.*t0;

dT0_tf=0;
dT1_tf=1;
dT2_tf=4.*tf;
dT3_tf=12.*tf.^2-3;
dT4_tf=32.*tf.^3-16.*tf;
dT5_tf=80.*tf.^4-60.*tf.^2+5;
dT6_tf=192.*tf.^5-192.*tf.^3+36.*tf;
dT7_tf=448.*tf.^6-560.*tf.^4+168.*tf.^2-7;
dT8_tf=1024.*tf.^7-1536.*tf.^5+640.*tf.^3-64.*tf;
dT9_tf=2304.*tf.^8-4032.*tf.^6+2160.*tf.^4-360.*tf.^2+9;
dT10_tf=5120.*tf.^9-10240.*tf.^7+6720.*tf.^5-1600.*tf.^3+100.*tf;

```

```

%チェビシェフ多項式の高次成分の係数の決定 .
%目標関節角軌道の近似式と，境界条件より得られる4つの方程式より決定される .
%MATLAB Symbolic Math Toolboxによる解を使用
%注意
%この部分には方程式を解いて得られた関係式を入力すること
alphaN_3th2=

alphaN_2th2=

alphaN_1th2=

alphaNth2=

alphaN_3th3=

alphaN_2th3=

alphaN_1th3=

alphaNth3=

%関節角度関数の近似式
th2=x(1).*T0+x(2).*T1+x(3).*T2+x(4).*T3+x(5).*T4+x(6).*T5+x(7).*T6+alphaN_3th2.*T7...
+alphaN_2th2.*T8+alphaN_1th2.*T9+alphaNth2.*T10;

th3=x(8).*T0+x(9).*T1+x(10).*T2+x(11).*T3+x(12).*T4+x(13).*T5+x(14).*T6+alphaN_3th3.*T7...
+alphaN_2th3.*T8+alphaN_1th3.*T9+alphaNth3.*T10;

%-----%

%各リンクの重心位置
xg1=0;
yg1=-lg1;
xg2=lg2.*sin(th2);
yg2=-l1-lg2.*cos(th2);
xg3=l2.*sin(th2)+lg3.*sin(th2+th3);%以前のプログラムはth2が無く，間違っている .
yg3=-l1-l2.*cos(th2)-lg3.*cos(th2+th3);%以前のプログラムはth2が無く，間違っている .

%全質量
M=m1+m2+m3;

%慣性モーメントの合計
I=l1+l2+l3;

%系全体の慣性モーメントの逆数Jalpha
Jalpha=1./((l+m1.*((m2.*xg2+m3.*xg3)./M).^2+((m1-M).*yg1+m2.*yg2+m3.*yg3)./M).^2)...
+m2.*((m2-M).*xg2+m3.*xg3)./M).^2+((m1.*yg1+(m2-M).*yg2+m3.*yg3)./M).^2)...
+m3.*((m2.*xg2+(m3-M).*xg3)./M).^2+((m1.*yg1+m2.*yg2+(m3-M).*yg3)./M).^2));

%function g
g=Jalpha;

end

%-----%
%      目的関数      %
%-----%
objval=((thp/L)-J1)^2;
f=objval;

end

end

```


付録

```
%::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::%
%      空中姿勢制御コントローラ      %
%      Interactive Physics とリアルタイム相互リンク      %
%      DDE(Dynamic Data Exchange)      %
%      制御系：PD制御      %
%      PD制御系      %
%      T.Seki      %
%::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::%
```

function

```
[tau2, tau3, Deth2, Deth3, Dedth2, Dedth3, Delg, lg, L]=aerial_posture_controller_PD_No7(t, th1, th2, th3, dth1, dth2, dth3, S1x, S1y, S2x, S2y, S3x, S3y, dS1x, dS1y, dS2x, dS2y, dS3x, dS3y)
```

```
%      3links model parameters      %
%Mass
m1=0.182;
m2=0.909;
m3=0.727;
%All mass of model
M=m1+m2+m3;

%Length
l1=0.223;
l2=0.160;
l3=0.267;

%Distance from joint from center of gravity
lg1=0.1115;
lg2=0.0800;
lg3=0.1335;

%moment of inertia
I1=0.00088;
I2=0.00256;
I3=0.00482;

%      目標関節軌道・目標関節角速度軌道 Deth2,Deth3,Dedth2,Dedth3      %
%関節軌道を，有限次元の正規直交基底で近似
%正規直交基底：チェビシェフの多項式(T10)
%基底係数：最小化問題により導出 *program:runsharedvalues2008_2

%チェビシェフの多項式
T0=1;
T1=t;
T2=2*t^2-1;
T3=4*t^3-3*t;
T4=8*t^4-8*t^2+1;
T5=16*t^5-20*t^3+5*t;
T6=32*t^6-48*t^4+18*t^2-1;
T7=64*t^7-112*t^5+56*t^3-7*t;
T8=128*t^8-256*t^6+160*t^4-32*t^2+1;
T9=256*t^9-576*t^7+432*t^5-120*t^3+9*t;
T10=512*t^10-1280*t^8+1120*t^6-400*t^4+50*t^2-1;

%チェビシェフの多項式 導関数
```

```

dT0=0;
dT1=1;
dT2=4*t;
dT3=12*t^2-3;
dT4=32*t^3-16*t;
dT5=80*t^4-60*t^2+5;
dT6=192*t^5-192*t^3+36*t;
dT7=448*t^6-560*t^4+168*t^2-7;
dT8=1024*t^7-1536*t^5+640*t^3-64*t;
dT9=2304*t^8-4032*t^6+2160*t^4-360*t^2+9;
dT10=5120*t^9-10240*t^7+6720*t^5-1600*t^3+100*t;

%基底係数x x(0)からx(14)まで
%準ニュートン法(BFGS法)で算出された値を入力
x=[1.0340 0.9589 1.2190 1.0878 0.8868 0.9385 1.0242 -0.0211 1.0807 0.6102 0.8281 1.1920 1.1196 0.9669];

%境界条件を満たす, 高次調波成分の基底基底係数
%準ニュートン法(BFGS法)で算出された値を入力
alphaN_3th2=-1.5563;
alphaN_2th2=1.8667;
alphaN_1th2=-1.4758;
alphaNth2=0.6715;

alphaN_3th3=3.1679;
alphaN_2th3=-0.3050;
alphaN_1th3=1.9978;
alphaNth3=-0.7112;

%目標関節軌道 : Deth2,Deth3

Deth2=x(1)*T0+x(2)*T1+x(3)*T2+x(4)*T3+x(5)*T4+x(6)*T5+x(7)*T6+alphaN_3th2*T7+alphaN_2th2*T8+alphaN_1th2*T9+alphaNth2*T10;

Deth3=x(8)*T0+x(9)*T1+x(10)*T2+x(11)*T3+x(12)*T4+x(13)*T5+x(14)*T6+alphaN_3th3*T7+alphaN_2th3*T8+alphaN_1th3*T9+alphaNth3*T10;

%目標関節角速度軌道 : Dedth2,Dedth3

Dedth2=x(1)*dT0+x(2)*dT1+x(3)*dT2+x(4)*dT3+x(5)*dT4+x(6)*dT5+x(7)*dT6+alphaN_3th2*dT7+alphaN_2th2*dT8+alphaN_1th2*dT9+alphaNth2*dT10;

Dedth3=x(8)*dT0+x(9)*dT1+x(10)*dT2+x(11)*dT3+x(12)*dT4+x(13)*dT5+x(14)*dT6+alphaN_3th3*dT7+alphaN_2th3*dT8+alphaN_1th3*dT9+alphaNth3*dT10;

% 合成重心まわりの慣性モーメント %
%合成重心まわりの目標慣性モーメントDeIgの計算
%各リンクの重心位置
DeS1x=0;
DeS1y=-lg1;
DeS2x=lg2*sin(Deth2);
DeS2y=-l1-lg2*cos(Deth2);
DeS3x=l2*sin(Deth2)+lg3*sin(Deth2+Deth3);
DeS3y=-l1-l2*cos(Deth2)-lg3*cos(Deth2+Deth3);

%合成重心位置DerG=(DexG,DeyG)
DexG=(m1*DeS1x+m2*DeS2x+m3*DeS3x)/M;

```

付録

```
DeyG=(m1*DeS1y+m2*DeS2y+m3*DeS3y) ./M;
```

```
%合成重心まわりの目標慣性モーメントDeIg
```

```
DeIg=(I1+I2+I3)+m1*((DeS1x-DexG)^2+(DeS1y-DeyG)^2)+m2*((DeS2x-DexG)^2+(DeS2y-DeyG)^2)+m3*((DeS3x-DexG)^2+(DeS3y-DeyG)^2);
```

```
%シミュレーションにおける合成重心まわりの慣性モーメントIgの計算
```

```
%シミュレーション(IP)からの合成重心位置rG=(xG,yG)
```

```
xG=(m1*S1x+m2*S2x+m3*S3x)/M;
```

```
yG=(m1*S1y+m2*S2y+m3*S3y)/M;
```

```
%シミュレーション(IP)からの慣性モーメントIg
```

```
Ig=(I1+I2+I3)+m1*((S1x-xG)^2+(S1y-yG)^2)+m2*((S2x-xG)^2+(S2y-yG)^2)+m3*((S3x-xG)^2+(S3y-yG)^2);
```

```
% 角運動量Lの計算 %
```

```
%シミュレーション(IP)からの合成重心位置rG=(xG,yG)
```

```
%125行目で計算済み
```

```
%シミュレーション(IP)からの合成重心速度VG=(VxG,VyG)
```

```
VxG=(m1*dS1x+m2*dS2x+m3*dS3x)/M;
```

```
VyG=(m1*dS1y+m2*dS2y+m3*dS3y)/M;
```

```
%シミュレーション(IP)からの慣性モーメントL
```

```
L=I1*dth1+I2*(dth1+dth2)+I3*(dth1+dth2+dth3)+...  
m1*((S1x-xG)*(dS1y-VyG)-(S1y-yG)*(dS1x-VxG))+...  
m2*((S2x-xG)*(dS2y-VyG)-(S2y-yG)*(dS2x-VxG))+...  
m3*((S3x-xG)*(dS3y-VyG)-(S3y-yG)*(dS3x-VxG));
```

```
% 入力トルク算出
```

```
%肩関節, 腰関節のアクチュエータに与えるトルクの計算
```

```
%制御系:PD制御
```

```
%比例ゲイン・微分ゲインの設定 : Kp,Kd
```

```
%肩関節 比例ゲイン・微分ゲイン : K1p,K1d
```

```
K2p=10; K2d=10;
```

```
%腰関節 比例ゲイン・微分ゲイン : K2p,K2d
```

```
K3p=10; K3d=10;
```

```
%肩関節のアクチュエータに与えるトルク : tau2
```

```
tau2=K2p*(Deth2-th2)+K2d*(Dedth2-dth2);
```

```
%腰関節のアクチュエータに与えるトルク : tau3
```

```
tau3=K3p*(Deth3-th3)+K3d*(Dedth3-dth3);
```

付録

```
%::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::%  
%      空中姿勢制御コントローラ      %  
%      Interactive Physics とリアルタイム相互リンク      %  
%      DDE(Dynamic Data Exchange)      %  
%      制御系：非線形補償（計算トルク法）      %  
%      （線形化補償とサーボ補償の2段階制御）      %  
%      T.Seki      %  
%::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::%
```

function

```
[tau2, tau3, Deth2, Deth3, Dedth2, Dedth3, Delg, lg, L]=aerial_posture_controller_computed_torque_method_No3(t, th1  
, th2, th3, dth1, dth2, dth3, S1x, S1y, S2x, S2y, S3x, S3y, dS1x, dS1y, dS2x, dS2y, dS3x, dS3y)
```

```
%      3links model parameters      %  
%Mass  
m1=0.182;  
m2=0.909;  
m3=0.727;  
%All mass of model  
M=m1+m2+m3;  
  
%Length  
l1=0.223;  
l2=0.160;  
l3=0.267;  
  
%Distance from joint from center of gravity  
lg1=0.1115;  
lg2=0.0800;  
lg3=0.1335;  
  
%moment of inertia  
I1=0.00088;  
I2=0.00256;  
I3=0.00482;  
  
%G-forces  
G=9.807;  
  
%      目標関節軌道・目標関節角速度軌道 Deth2,Deth3,Dedth2,Dedth3      %  
%関節軌道を,有限次元の正規直交基底で近似  
%正規直交基底:チェビシェフの多項式(T10)  
%基底係数:最小化問題により導出 *program:runsharedvalues2008_2  
  
%チェビシェフの多項式  
T0=1;  
T1=t;  
T2=2*t^2-1;  
T3=4*t^3-3*t;  
T4=8*t^4-8*t^2+1;  
T5=16*t^5-20*t^3+5*t;  
T6=32*t^6-48*t^4+18*t^2-1;  
T7=64*t^7-112*t^5+56*t^3-7*t;  
T8=128*t^8-256*t^6+160*t^4-32*t^2+1;  
T9=256*t^9-576*t^7+432*t^5-120*t^3+9*t;  
T10=512*t^10-1280*t^8+1120*t^6-400*t^4+50*t^2-1;
```

%チェビシエフの多項式 導関数

```
dT0=0;
dT1=1;
dT2=4*t;
dT3=12*t^2-3;
dT4=32*t^3-16*t;
dT5=80*t^4-60*t^2+5;
dT6=192*t^5-192*t^3+36*t;
dT7=448*t^6-560*t^4+168*t^2-7;
dT8=1024*t^7-1536*t^5+640*t^3-64*t;
dT9=2304*t^8-4032*t^6+2160*t^4-360*t^2+9;
dT10=5120*t^9-10240*t^7+6720*t^5-1600*t^3+100*t;
```

%チェビシエフの多項式 2回微分

```
ddT0=0;
ddT1=0;
ddT2=4;
ddT3=24*t;
ddT4=96*t^2-16;
ddT5=320*t^3-120*t;
ddT6=960*t^4-576*t^2+36;
ddT7=2688*t^5-2240*t^3+336*t;
ddT8=7168*t^6-7680*t^4+1920*t-64;
ddT9=18432*t^7-24192*t^5+8640*t^3-720*t;
ddT10=46080*t^8-71680*t^6+33600*t^4-4800*t^2+100;
```

%基底係数x x(0)からx(14)まで

%準ニュートン法(BFGS法)で算出された値を入力

```
x=[1.0340 0.9589 1.2190 1.0878 0.8868 0.9385 1.0242 -0.0211 1.0807 0.6102 0.8281 1.1920 1.1196 0.9669];
```

%境界条件を満たす, 高次調波成分の基底基底係数

%準ニュートン法(BFGS法)で算出された値を入力

```
alphaN_3th2=-1.5563;
alphaN_2th2=1.8667;
alphaN_1th2=-1.4758;
alphaNth2=0.6715;
```

```
alphaN_3th3=3.1679;
alphaN_2th3=-0.3050;
alphaN_1th3=1.9978;
alphaNth3=-0.7112;
```

%目標関節軌道 : Deth2,Deth3

```
Deth2=x(1)*T0+x(2)*T1+x(3)*T2+x(4)*T3+x(5)*T4+x(6)*T5+x(7)*T6+alphaN_3th2*T7+alphaN_2th2*T8+alphaN_1th2*T9+alphaNth2*T10;
```

```
Deth3=x(8)*T0+x(9)*T1+x(10)*T2+x(11)*T3+x(12)*T4+x(13)*T5+x(14)*T6+alphaN_3th3*T7+alphaN_2th3*T8+alphaN_1th3*T9+alphaNth3*T10;
```

%目標関節角速度軌道 : Dedth2,Dedth3

```
Dedth2=x(1)*dT0+x(2)*dT1+x(3)*dT2+x(4)*dT3+x(5)*dT4+x(6)*dT5+x(7)*dT6+alphaN_3th2*dT7+alphaN_2th2*dT8+alphaN_1th2*dT9+alphaNth2*dT10;
```

```
Dedth3=x(8)*dT0+x(9)*dT1+x(10)*dT2+x(11)*dT3+x(12)*dT4+x(13)*dT5+x(14)*dT6+alphaN_3th3*dT7+alphaN_2th3*dT8+alphaN_1th3*dT9+alphaNth3*dT10;
```

%目標関節角加速度軌道 : Deddth2,Deddth3

Deddt2=x(1)*ddT0+x(2)*ddT1+x(3)*ddT2+x(4)*ddT3+x(5)*ddT4+x(6)*ddT5+x(7)*ddT6+alphaN_3th2*ddT7+alphaN_2th2*ddT8+alphaN_1th2*ddT9+alphaNth2*ddT10;

Deddt3=x(8)*ddT0+x(9)*ddT1+x(10)*ddT2+x(11)*ddT3+x(12)*ddT4+x(13)*ddT5+x(14)*ddT6+alphaN_3th3*ddT7+alphaN_2th3*ddT8+alphaN_1th3*ddT9+alphaNth3*ddT10;

% 合成重心まわりの慣性モーメント %
 %合成重心まわりの目標慣性モーメントDeIgの計算
 %各リンクの重心位置

DeS1x=0;
 DeS1y=-lg1;
 DeS2x=lg2*sin(Deth2);
 DeS2y=-l1-lg2*cos(Deth2);
 DeS3x=l2*sin(Deth2)+lg3*sin(Deth2+Deth3);
 DeS3y=-l1-l2*cos(Deth2)-lg3*cos(Deth2+Deth3);

%合成重心位置DerG=(DexG,DeyG)

DexG=(m1*DeS1x+m2*DeS2x+m3*DeS3x)/M;

DeyG=(m1*DeS1y+m2*DeS2y+m3*DeS3y)/M;

%合成重心まわりの目標慣性モーメントDeIg

DeIg=(I1+I2+I3)+m1*((DeS1x-DexG)^2+(DeS1y-DeyG)^2)+m2*((DeS2x-DexG)^2+(DeS2y-DeyG)^2)+m3*((DeS3x-DexG)^2+(DeS3y-DeyG)^2);

%シミュレーションにおける合成重心まわりの慣性モーメントIgの計算

%シミュレーション(IP)からの合成重心位置rG=(xG,yG)

xG=(m1*S1x+m2*S2x+m3*S3x)/M;

yG=(m1*S1y+m2*S2y+m3*S3y)/M;

%シミュレーション(IP)からの慣性モーメントIg

Ig=(I1+I2+I3)+m1*((S1x-xG)^2+(S1y-yG)^2)+m2*((S2x-xG)^2+(S2y-yG)^2)+m3*((S3x-xG)^2+(S3y-yG)^2);

% 角運動量Lの計算 %

%シミュレーション(IP)からの合成重心位置rG=(xG,yG)

%143行目で計算済み

%シミュレーション(IP)からの合成重心速度VG=(VxG,VyG)

VxG=(m1*dS1x+m2*dS2x+m3*dS3x)/M;

VyG=(m1*dS1y+m2*dS2y+m3*dS3y)/M;

%シミュレーション(IP)からの慣性モーメントL

L=I1*dth1+I2*(dth1+dth2)+I3*(dth1+dth2+dth3)+...
 m1*((S1x-xG)*(dS1y-VyG)-(S1y-yG)*(dS1x-VxG))+...
 m2*((S2x-xG)*(dS2y-VyG)-(S2y-yG)*(dS2x-VxG))+...
 m3*((S3x-xG)*(dS3y-VyG)-(S3y-yG)*(dS3x-VxG));

% 線形化とサーボ補償の2段階制御(計算トルク法) %

%運動方程式

%慣性項M

m11=m1+m2+m3;

m12=0;

$$\begin{aligned} m13 &= (m1 * l g1 + m2 * l1 + m3 * l1) * \cos(th1) + (m2 * l g2 + m3 * l2) * \cos(th1 + th2) + m3 * l g3 * \cos(th1 + th2 + th3); \\ m14 &= (m2 * l g2 + m3 * l2) * \cos(th1 + th2) + m3 * l g3 * \cos(th1 + th2 + th3); \\ m15 &= m3 * l g3 * \cos(th1 + th2 + th3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m22 &= m1 + m2 + m3; \\ m23 &= (m1 * l g1 + m2 * l1 + m3 * l1) * \sin(th1) + (m2 * l g2 + m3 * l2) * \sin(th1 + th2) + m3 * l g3 * \sin(th1 + th2 + th3); \\ m24 &= (m2 * l g2 + m3 * l2) * \sin(th1 + th2) + m3 * l g3 * \sin(th1 + th2 + th3); \\ m25 &= m3 * l g3 * \sin(th1 + th2 + th3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m33 &= m1 * l g1^2 + (m2 + m3) * (l1^2) + m2 * (l g2^2) + m3 * (l2^2) + m3 * (l g3^2) + (2 * m2 * l1 * l g2 + 2 * m3 * l1 * l2) * \cos(th2) + 2 * m3 * l1 * l g3 * \cos(th2 + th3) + 2 * m3 * l2 * l g3 * \cos(th3) + l1 + l2 + l3; \\ m34 &= m2 * (l g2^2) + m3 * (l2^2) + m3 * (l g3^2) + (m2 * l1 * l g2 + m3 * l1 * l2) * \cos(th2) + m3 * l1 * l g3 * \cos(th2 + th3) + 2 * m3 * l2 * l g3 * \cos(th3) + l2 + l3; \\ m35 &= m3 * (l g3^2) + m3 * l1 * l g3 * \cos(th2 + th3) + m3 * l2 * l g3 * \cos(th3) + l3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m44 &= m2 * (l g2^2) + m3 * (l2^2) + m3 * (l g3^2) + 2 * m3 * l2 * l g3 * \cos(th3) + l2 + l3; \\ m45 &= m3 * (l g3^2) + m3 * l2 * l g3 * \cos(th3) + l3; \end{aligned}$$

$$m55 = m3 * (l g3^2) + l3;$$

$$M = \begin{bmatrix} m11 & m12 & m13 & m14 & m15 \\ m12 & m22 & m23 & m24 & m25 \\ m13 & m23 & m33 & m34 & m35 \\ m14 & m24 & m34 & m44 & m45 \\ m15 & m25 & m35 & m45 & m55 \end{bmatrix};$$

%遠心力・コリオリ力項h

$$\begin{aligned} h1 &= -((m1 * l g1 + m2 * l2 + m3 * l3) * \sin(th1) + (m2 * l g2 + m3 * l2) * \sin(th1 + th2) + m3 * l g3 * \sin(th1 + th2 + th3)) * (dth1^2) \dots \\ &\quad - ((m2 * l g2 + m3 * l2) * \sin(th1 + th2) + m3 * l g3 * \sin(th1 + th2 + th3)) * (dth2^2) \dots \\ &\quad - (m3 * l g3 * \sin(th1 + th2 + th3)) * (dth3^2) \dots \\ &\quad - ((2 * m2 * l g2 + 2 * m3 * l2) * \sin(th1 + th2) + 2 * m3 * l g3 * \sin(th1 + th2 + th3)) * (dth1 * dth2) \dots \\ &\quad - (2 * m3 * l g3 * \sin(th1 + th2 + th3)) * (dth1 * dth3) \dots \\ &\quad - (2 * m3 * l g3 * \sin(th1 + th2 + th3)) * (dth2 * dth3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h2 &= ((m1 * l g1 + m2 * l2 + m3 * l3) * \cos(th1) + (m2 * l g2 + m3 * l2) * \cos(th1 + th2) + m3 * l g3 * \cos(th1 + th2 + th3)) * (dth1^2) \dots \\ &\quad + ((m2 * l g2 + m3 * l2) * \cos(th1 + th2) + m3 * l g3 * \cos(th1 + th2 + th3)) * (dth2^2) \dots \\ &\quad + (m3 * l g3 * \cos(th1 + th2 + th3)) * (dth3^2) \dots \\ &\quad + ((2 * m2 * l g2 + 2 * m3 * l2) * \cos(th1 + th2) + 2 * m3 * l g3 * \cos(th1 + th2 + th3)) * (dth1 * dth2) \dots \\ &\quad + (2 * m3 * l g3 * \cos(th1 + th2 + th3)) * (dth1 * dth3) \dots \\ &\quad + (2 * m3 * l g3 * \sin(th1 + th2 + th3)) * (dth2 * dth3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h3 &= -((m2 * l1 * l g2 + m3 * l1 * l2) * \sin(th2) + m3 * l1 * l g3 * \sin(th2 + th3)) * (dth2^2) \dots \\ &\quad - (m3 * l2 * l g3 * \sin(th3) + m3 * l1 * l g3 * \sin(th2 + th3)) * (dth3^2) \dots \\ &\quad - ((2 * m2 * l1 * l g2 + 2 * m3 * l1 * l2) * \sin(th2) + 2 * m3 * l1 * l g3 * \sin(th2 + th3)) * (dth1 * dth2) \dots \\ &\quad - (2 * m3 * l2 * l g3 * \sin(th3) + 2 * m3 * l1 * l g3 * \sin(th2 + th3)) * (dth1 * dth3) \dots \\ &\quad - (2 * m3 * l2 * l g3 * \sin(th3) + 2 * m3 * l1 * l g3 * \sin(th2 + th3)) * (dth2 * dth3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h4 &= (m2 * l1 * l g2 + m3 * l1 * l2) * \sin(th2) + m3 * l1 * l g3 * \sin(th2 + th3)) * (dth1^2) \dots \\ &\quad - (m3 * l2 * l g3 * \sin(th3)) * (dth3^2) \dots \\ &\quad - (2 * m3 * l2 * l g3 * \sin(th3)) * (dth1 * dth3) \dots \\ &\quad - (2 * m3 * l2 * l g3 * \sin(th3)) * (dth2 * dth3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h5 &= (m3 * l2 * l g3 * \sin(th3) + m3 * l1 * l g3 * \sin(th2 + th3)) * (dth1^2) \dots \\ &\quad + (m3 * l2 * l g3 * \sin(th3)) * (dth2^2) \dots \\ &\quad + (2 * m3 * l2 * l g3 * \sin(th3)) * (dth1 * dth2); \end{aligned}$$

$$h = \begin{bmatrix} h1 \\ h2 \\ h3 \\ h4 \\ h5 \end{bmatrix};$$

付録

```
%重力項g
g1=0;

g2=(m1+m2+m3)*G;

g3=((m1*lg1+m2*l1+m3*l1)*sin(th1)+(m2*lg2+m3*l2)*sin(th1+th2)+m3*lg3*sin(th1+th2+th3))*G;

g4=((m2*lg2+m3*l2)*sin(th1+th2)+m3*lg3*sin(th1+th2+th3))*G;

g5=(m3*lg3*sin(th1+th2+th3))*G;

g=[g1
   g2
   g3
   g4
   g5];

%トルク係数行列D
D=[0 0
   0 0
   -1 0
   1 -1
   0 1];

%運動方程式の変換 dd =f+v
f=-1*inv(M)*(h+g);
v=inv(M)*D;

%関節 =(th2, th3)についての取り出し, fphi,vphiを生成
fphi=[f(4,1)
      f(5,1)];

vphi=[v(4,1) v(4,2)
      v(5,1) v(5,2)];

%      入力トルク計算
%肩関節, 腰関節のアクチュエータに与えるトルクの計算
%制御系:非線形補償(計算トルク法)(線形化補償とサーボ補償の2段階制御)

%比例ゲイン・微分ゲインの設定 : Kp,Kd
%粘性減衰係数比
dzeta=0.5;
%固有角周波数 n
omegan=350;

%肩関節 比例ゲイン・微分ゲイン : K1p,K1d
K2p=omegan^2; K2d=2*dzeta*omegan;

%腰関節 比例ゲイン・微分ゲイン : K2p,K2d
K3p=omegan^2; K3d=2*dzeta*omegan;

%比例ゲイン行列 Kp
Kp=[K2p 0
    0 K3p];

%微分ゲイン行列 Kd
Kd=[K2d 0
    0 K3d];

%目標関節ベクトル Dephi
```

```
Dephi=[Deth2
        Deth3];

%関節行列 phi シミュレーション上での値
phi=[th2
      th3];

%目標角速度ベクトル Dedphi
Dedphi=[Dedth2
         Dedth3];

%角速度ベクトル dphi シミュレーション上での値
dphi=[dth2
       dth3];

%目標角加速度ベクトル Deddphi
Deddphi=[Deddth2
          Deddth3];

%入力ベクトル u
u=Deddphi+Kp*(Dephi-phi)+Kd*(Dedphi-dphi);

%入力トルクベクトル
tau=-1*inv(vphi)*fphi+inv(vphi)*u;

%肩関節のアクチュエータに与えるトルク : tau2
tau2=tau(1,1);

%腰関節のアクチュエータに与えるトルク : tau3
tau3=tau(2,1);
```