

株価指数変動年金保険の解析

山田, 敬一郎 / YAMADA, Keiichiro

(発行年 / Year)

2008-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2008-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

2007年度修士論文

株価指数変動年金保険の解析



法政大学大学院

工学研究科 システム工学専攻
06R6214 山田 敬一郎

指導教員： 浦谷 規 教授

2007 Master's Thesis

Analysis of An Equity-Indexed Annuity



Graduate School of Engineering
Hosei University

06R6214 Keiichiro YAMADA

Supervisor Prof. : Tadashi Uratani

概要

本論文では、終身型株価指数変動年金保険を設計する際に有効な指標となるようなモデルの作成を目指す。モデルの作成において、保険の契約者は死亡時点で資産の価値が最大になるような戦略をとると仮定する。さらに、モデルを作成するにおいて、現在価値で割り引いた保険の効用が市場に投資した場合よりも上回るようにする。ベルマン方程式を用いてモデルを作成することによって、最終的にそれらのモデルを用いて保険の設計や戦略の決定に際して有効な指標を作成する。

Abstract

In this thesis, we discuss a model of equity-indexed annuity for designing annuity products. We assume that buyers of the insurance want to maximize their expected discounted utility of wealth at death time. The expected present value of EIA should be greater than that of investment without EIA. We solve parameters for this condition by using Hamilton-Jacobi-Bellman Equation. Finally, we propose an efficient method to design and determine policy variables of the annuity products from this analysis.

目次

1	はじめに	3
1.1	変額年金とは	3
1.2	株価指数変動型年金保険について	3
2	市場に投資した場合の効用関数	4
3	EIA を契約した場合の効用関数	7
4	保険会社の割引期待支払額	17
5	数値実験	19
5.1	境界条件に関する数値実験	19
5.1.1	数値実験 1	19
5.1.2	数値実験 2	20
5.1.3	数値実験 3	21
5.2	パラメーターごとの感度分析	22
5.2.1	無リスク資産の収益率	22
5.2.2	危険資産の収益率	25
5.2.3	インデックスの中の危険資産の割合 \bar{p}	28
5.2.4	死亡保障のパラメーター \bar{d}	30
5.2.5	補償額のパラメーター \bar{s}	32
5.2.6	一時払い手数料に課される手数料 f_0	35
5.2.7	手数料 f_a	37
6	結論	40
A	Appendix 死力について	41
B	Appendix 相対的リスク回避率 (Constant relative risk aversion :CRRA)	43
C	Appendix	44
D	Appendix	45
E	Appendix	46
F	Appendix	48
G	Appendix	51
H	Appendix	53
I	Appendix	58
J	Appendix	59
K	Appendix	60
L	付録：消費のあるポートフォリオについて	62

M 付録：ベルマン方程式について	65
M.1 ベルマン方程式 (The Hamilton-Jacobi-Bellman Equation)	67
M.1.1 ベルマン方程式	69

1 はじめに

1.1 変額年金とは

従来の個人年金保険は通常生命保険と同じく、払い込まれた保険料はあらかじめ予定利率が固定されているため、将来の年金受取額が決まっている。これに対して、変額年金保険は運用資金の予定利率を定めず、保険会社が用意した複数のファンドから契約者が選び、運用することによって将来の年金の受取額が変額する保険である。一般の投資信託に似た商品であるが、死亡保障がついている、税制面で優遇される、ファンドを定期的に変更することができる商品が一般的である（本論文の EIA では種類の経済指標のみと仮定している）などの特徴がある。保険料は申し込み時に一括して全額を支払う場合が一般的であり、年金を受け取るための運用期間は最短でも 10 年以上や 15 年以上の期間と設定されている。定められた期間を超えて運用した場合、年金を受け取ることが可能になり、さらに運用期間中ならば、契約者の意向で年金受け取り開始年齢の繰上げ、繰り下げも可能である。保険としての特性もあり、運用期間中に死亡した場合は死亡給付金を受け取れる。そのため、死亡リスクと生存リスクと呼ばれる「予定年齢」を超えて長生きする時の経済的負担増を保障することができる金融商品である。死亡給付金は契約者の死亡時におけるファンドの価値によって増減するものが多い。また、年金原資に最低保証額がある商品もある。

1.2 株価指数変動型年金保険について

本論文において、変額年金の一種である終身株価指数変動年金（以下 EIA）について検証する。EIA とは変額年金の一種で、最低基準金額を保障しつつ運用期間内の S & P500 や日経平均などの株式指数の変動が年金原資に反映される金融商品である。保険料は契約時に一時払い保険料として一括で支払われ、運用期間内で契約者が死亡した場合死亡保障がある。さらに、年金原資が最低保障されている商品が一般的であり、10 年もしくは 20 年の運用期間を設けられる。

本論文では、以下の 5 つのパラメータを用いて終身株価指数変動年金（以下 EIA）の価格の解析を行う。それらのパラメータを検証するにあたり、EIA の購入者に対して、遺産として購入者が死亡した時点で資産価値が最大になるような視点で解析していく。まず、EIA の設計に際して以下のパラメータを考慮する。

- 一時払い保険料に掛かる手数料 記号: f_0 （例：アカウントの中の頭金 $= \omega_0 = \tilde{\omega}_0 f_0$ ）
- アカウントの中の危険資産の割合 記号: \bar{p}
- アカウントの頭金に対する死亡給付金の金額の割合 記号: \bar{d} （例：死亡給付金 $= \bar{d}\omega_0$ ）
- アカウントの頭金に対する最低保証額の割合 記号: \bar{s} （例：最低保証額 $= \bar{s}\omega_0$ ）
- 保険の維持費 記号: f_a

変額年金はほかの伝統的な保険商品とは違い、設計する段階での不確定な要素が金利・死亡率のほかに株価や債券の要素もからむ。そのため、変額年金の設計の際には他の保険商品とは違った方法が用いられている。実際、複雑な変額年金では解析解を求めることができず、モンテカルロ法によって感度分析する方法が開発されている。しかし、変額年金は金融オプションと同様の方法で解析するのが難しい事が知られている。なぜなら、変額年金は金融オプションとは違った様々な問題があり、その一つが、変額年金の加入者はアカウントの額が元本を大きく上回ると、利食い解約をすることである。そのため、変額年金の設計にはそれら特殊な事情を考慮しなければならない。

以上より本論文では、まず死亡時に資産が最大になるような戦略をとると仮定し、2 章で戦略に基づいて市場に投資した場合のモデルを作成し、そのモデルを元に EIA を契約した場合のモデルを 3 章で作成する。最後に、4 章において EIA を契約した場合のパラメータを元に保険会社が支払う額を推定するモデルを作成する。それらのモデルを用いて EIA の契約を考えている人に対して魅力がある EIA の設計方法を考える。

2 市場に投資した場合の効用関数

モデルを作成するために、以下の仮定を行う。まず契約者の年齢を x と仮定する。その契約者の資産 ω は単調増加、凹関数、微分可能な相対的リスク回避率¹ u によって定義されるとする。

τ_x を年齢 x における将来のランダムな余命の確率変数とし、 λ_x を τ_x の死力² とする。本論文を通じて、死力は一定だと仮定する (例 $\lambda_x(t) = \lambda$)。それゆえに、現在 (x) 歳の人の将来の余命 T_x はパラメータ λ の指数分布になる。

市場の変動は、時刻 t において以下の幾何ブラウン運動によって推定される。

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (2.1)$$

ここで過程 B は確率空間 $(\omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上の一般的なブラウン運動とし、定数 μ, σ は正の値をとる。また、危険資産は配当がない、もしくは、危険資産の価格は配当金の収益がすでに含まれている価格であるとする。

まず、EIA を解約・行使した後の問題について考察する。EIA の契約者が EIA を解約・行使する前に死亡した場合、解約・行使した後の最適化問題について考える必要はない。しかし、契約者が資産 $W_t = \omega$ とともに時刻 $\tau_s = t < \tau_d$ で EIA を解約・行使した場合、方程式 (2.1) で定義される危険資産か、一定のレート r ($0 \leq r \leq \mu$) の金額が手に入る無リスク資産に投資すると仮定する。また、全ての $s > t = \tau_s$ において、契約者が危険資産に投資する割合 π_s を選択できると仮定する。つまり、時刻 s において資産 $\pi_s^0 = W_s - \pi_s$ を無リスク資産に投資するということになる。EIA を解約・行使した後の資産 W_s を以下のように示すことができる。

$$\begin{cases} dW_s &= \pi_s^0(rds) + \pi_s \left(\frac{dS_s}{S_s}\right) \\ &= (W_s - \pi_s)rds + \pi_s(\mu ds + \sigma dB_s) \\ &= (rW_s + (\mu - r)\pi_s)ds + \sigma\pi_s dB_s \\ W_t &= \omega \end{cases} \quad (2.2)$$

ここで、 $\tau_s = t < s < \tau_d$ とする。

次に、市場に投資した場合の効用関数を以下に定義する。

定理 2.0.1. 市場に投資した場合の効用関数

$$V(\omega, t) = \sup_{\pi_s \in \mathcal{A}} E[e^{-\rho(\tau_d - t)} u(W_{\tau_d}) | W_t = \omega] \quad (2.3)$$

ここで集合 \mathcal{A} は、 \mathcal{F}_t -発展的の可測な許容的な戦略 π_s の集合とする。また \mathcal{F}_s は $\sigma(W_u : t \leq u \leq s)$ の零拡大と積分可能 $E[\int_t^{\tau_d} \pi_s^2 ds] < \infty$ なものとする。

V は時間に対して独立である (つまり、 $V(\omega, t) = V(\omega)$)。そして、 V は (τ_s, τ_d) 上で以下のベルマン方程式の解になる (Appendix C 参照)。

$$\begin{cases} r\omega V' + \max[(\mu - \gamma)\pi V' + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2 V''] + \lambda[u(\omega) - V] = \rho V \\ \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-(\rho + \lambda)(s - t)} E[H(W_s^*) | W_t = \omega] = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

¹Appendix B 参照

²Appendix A 参照

ここで、 W^* は最適にコントロールされた資産過程とする。

V が滑らかな関数だということは、その価値関数はただ一つの滑らかなベルマン方程式の解ということが分かる。ただし、もしその関数が滑らかな関数でなかった場合、ベルマン方程式を粘性解として扱うことができる。方程式 (2.3) の V は滑らかな関数だと仮定する。 V が滑らかな関数なため、最適な投資戦略は方程式 (2.4) より導出することができる。ここで、凹関数の効用関数 u と資産の方程式 (2.2) の線形性より、効用関数が凹関数の特性を引き継いでいる。よって、方程式 (2.4) の最大化は以下に示す事ができる。

$$\pi^*(\omega) = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{V'(\omega)}{V''(\omega)} \quad (2.5)$$

(証明)

(2.4) を最大化するためには以下の関数が最大になることが必要である。

$$\begin{aligned} g(\pi^*) &:= (\mu - r)\pi^*V' + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^{*2}V'' \rightarrow \max \\ g(\pi^*)' &= (\mu - r)V' + \sigma^2\pi^*V'' = 0 \\ \pi^* &= -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{V'}{V''} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

株の空売りを想定しており

$$\begin{aligned} \mu > r \text{ のとき } \pi^* &> 0 \\ r > \mu \text{ ならば } \pi^* &< 0 \end{aligned}$$

となる。

また、株価を用いたアカウントでは、最適な投資過程は以下の式で表すことができる。

$$\pi_s^* = \pi^*(W_s^*) = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{V'(W_s^*)}{V''(W_s^*)}, \quad t \geq s \geq \tau_d \quad (2.6)$$

よって、方程式 (2.4) は以下の式に書き換えることができる。

$$r\omega V' - \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{V'^2}{V''} + \lambda[u(\omega) - V] = \rho V \quad (2.7)$$

(証明)

$$\begin{aligned} r\omega V' + \max[(\mu - \gamma)\pi V' + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2V''] + \lambda[u(\omega) - V] &= \rho V \\ r\omega V' + (\mu - \gamma)\pi^*V' + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^{*2}V'' + \lambda[u(\omega) - V] &= \rho V \\ r\omega V' - \frac{(\mu - \gamma)^2}{\sigma^2} \frac{V'^2}{V''} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left\{ -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{V'}{V''} \right\}^2 V'' + \lambda[u(\omega) - V] &= \rho V \\ r\omega V' - \frac{(\mu - \gamma)^2}{\sigma^2} \frac{V'^2}{V''} + \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{V'^2}{V''} + \lambda[u(\omega) - V] &= \rho V \\ r\omega V' - \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{V'^2}{V''} + \lambda[u(\omega) - V] &= \rho V \quad \blacksquare \end{aligned}$$

効用関数 V は実証定理とベルマン方程式の結果を使うことによって、以下で与えられる。(Appendix E 参照)

定義 2.1. パラメーターによって決定された市場に投資した場合

$$V(\omega) = A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (2.8)$$

$$A = \frac{\lambda}{\rho + \lambda - (r + m/\gamma)(1-\gamma)} \quad (2.9)$$

$$m = \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2}$$

A は非負であると仮定する、特に、 A の分母は非負になる。

この条件は、方程式から (2.4) の境界条件を求めることができる。(AppendixF 参照) ただし、もし $\gamma > 1$ ならば A は自動的に非負になる。よって最適な危険資産に投資する割合は以下の式で表せる。

$$\pi_s^* = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu - r}{\sigma^2} W_s^* \quad (2.10)$$

(証明)

$$V = A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad V' = A\omega^{-\gamma}, \quad V'' = -\gamma A\omega^{-\gamma-1}, \quad u = \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$\begin{aligned} \pi_s^* = \pi_s^*(W_s^*) &= -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{V'(W_s^*)}{V''(W_s^*)} \\ &= -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{A(W_s^*)^{-\gamma}}{(-\gamma A(W_s^*)^{-\gamma-1})} \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{\mu - r}{\sigma^2} W_s^* \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3 EIA を契約した場合の効用関数

モデルを推定するにあたりいくつかの仮定を設ける。時刻 0 に契約者が一時払い保険料 $\tilde{\omega}_0$ を払うと仮定し、以下のアカウントの頭金を危険資産に \bar{p} の割合でインデックスに組み込むとする。

$$\omega_0 := (1 - f_0)\tilde{\omega}_0$$

EIA のファンドの変動は、市場 (2.1) に関連付けられていると仮定する。保険会社は維持費を契約者に請求し、その維持費はアカウントの資産に対して f_a の割合でアカウントから常に差し引かれる。EIA のファンドの資産過程は以下の式で与えられる。

$$\begin{cases} dW_t &= (\bar{p}\mu - f_a)W_t dt + \bar{p}\sigma W_t dB_t \\ W_0 &= \omega_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

(証明)

(L.13) より

$$dV_t = V_t \sum_{i=1}^N u_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} - c_t dt$$

代入する

$$\begin{aligned} dW_t &= W_t \left((1 - \bar{p}) \frac{dS_t^0}{S_t^0} + \bar{p} \frac{dS_t^1}{S_t^1} \right) - f_a * W_t dt \\ &= W_t \left((1 - \bar{p}) \frac{dS_t^0}{S_t^0} + \bar{p} \frac{dS_t^1}{S_t^1} - f_a dt \right) \\ &= W_t (\bar{p}\mu dt + \sigma dB_t) - f_a dt \\ &= (\bar{p}\mu - f_a)W_t dt + \bar{p}\sigma W_t dB_t \quad \blacksquare \end{aligned}$$

W_t は以下のようにも表すことができる。

$$W_t = \omega \exp((\bar{p}\mu - f_a - \bar{p}\sigma)t + \bar{p}^2 \sigma^2 B_t)$$

(証明)

$$\begin{aligned} d \log W_t &= \frac{1}{W_t} dW_t - \frac{1}{2} \frac{1}{W_t^2} (dW_t)^2 \\ &= (\bar{p}\mu - f_a) dt + \bar{p}\sigma dB_t - \frac{1}{2} \bar{p}^2 \sigma^2 dt \\ \log W_t - \log W_0 &= \int_0^t \bar{p}\mu - f_a - \frac{1}{2} \bar{p}^2 \sigma^2 dt + \bar{p}\sigma \int_0^t dB_t \\ W_t &= \omega_0 \exp\left((\bar{p}\mu - f_a - \frac{1}{2} \bar{p}^2 \sigma^2)t + \bar{p}\sigma B_t\right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

解約・行使する時刻 τ_s で、契約者は以下の利益を受け取ると定義する。

$$B(W_{\tau_s}, \tau_s) := \max\{\bar{s}\omega_0, W_{\tau_s}\} \quad (3.2)$$

ここで EIA の権利を行使した場合は、契約者は年金の受け取り方法を一括で受け取ると仮定する。また、解約違約金は無いと仮定する。そのため、EIA を行使した場合も解約した場合も同じ効果が生まれるため、解約・行使と表記する。

また、ランダムな死亡時刻 τ_d が解約・行使時刻 τ_s より前であった場合、EIA の契約では以下の死亡給付金を支払うと定義する。

$$D(W_{\tau_d}, \tau_d) := \max\{\bar{d}\omega_0, W_{\tau_d}\}$$

死亡給付金は、保障された死亡給付金もしくはファンドの資産の大きい額とする。もし、契約者が EIA の契約を死亡するより前に解約するならば ($\tau_s < \tau_d$)、その契約者は自身で危険資産もしくは安全資産に投資すると仮定する。

契約者は自ら投資した場合と同様に、ランダムな死亡時刻 τ_d において、割り引かれた資産の期待効用度を最大化する戦略をとるとする。ここでは、死亡時刻は金融市場と独立であると仮定する。契約者は EIA を保有している間は、解約・行使する時点を自由に決定する事ができると仮定する。そのため時点 $t < \tau_d$ で契約者がまだ EIA を保持していた場合、常に購入者は EIA を保持し続けるか解約・行使するかを決定しなければならない。もし契約者が EIA を解約・行使した場合、その利益を、戦略にのっとって危険資産と無リスク資産に投資すると仮定する。以上の仮定を用いてモデルを作成する。

もし、購入者が EIA を解約・行使したならば、 $B(W_{\tau_s}, \tau_s)$ を受け取る。その後その利益を市場に投資し、その効用関数を $V(B(W_{\tau_s}, \tau_s))$ とする。

ここで、 \bar{s} と \bar{d} は全ての実数をとらうと仮定する。ただし、現実には、 $0 \leq \bar{s} \leq 1$ で、 $\bar{s} \leq \bar{d}$ を想定している。また $0 \leq \bar{p} \leq 1, 0 \leq f_0 \leq 1$ とする。以上の仮定によって、EIA を解約・行使する前の価値の関数は以下に定義する。

定義 3.1. EIA を契約した場合の効用関数

$$U(\omega, t) = \sup_{\tau_s} E[e^{-\rho(\tau_s-t)} V(B(W_{\tau_s}, \tau_s)) 1_{\{\tau_s < \tau_d\}} + e^{-\rho(\tau_d-t)} u(D(W_{\tau_d}, \tau_d)) 1_{\{\tau_d \leq \tau_s\}} | W_t = \omega] \quad (3.3)$$

この最適解問題の中で、契約者はいつ EIA を解約・行使するかを決定しなければならない。 V と同様に効用関数 U は時間に対して独立となる ($U(\omega, t) = U(\omega)$)。 U は不等式として以下のようにとく事ができる (Appendix D 参照)

$$\rho U \geq (\bar{p}\mu - g)\omega U' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 U'' + \lambda[u\{D(W_{\tau_d}, \tau_d)\} - U] \quad (3.4)$$

$$U(\omega) \geq V(B(W_{\tau_s}, \tau_s)) \quad (3.5)$$

方程式 (3.4)(3.5) のうち少なくともどちらかは等式が成り立つ。もし方程式 (3.5) が等式であるとき、最適な EIA 保持者の解約する時間は初期の時点になる。逆に、EIA を保持し続けるのに最適な時刻はベルマン方程式が成立し、方程式 (3.5) が不等式で、方程式 (3.4) が等式になる。

初期の時点で、EIA を購入する誘引となるために、 f_0 は $U(\omega_0)$ と $V(\omega_1)$ の価格と比べる必要がある。解析するにあたって、初期の時点で解約・行使せずに、EIA を保持し続ける方が最適であると仮定する。そのため、ベルマン方程式が成立するために (3.4) が等式となり、 U の解は以下の式で表されるとする。

定理 3.1.1. パラメーターによって決定された EIA を保有している場合の効用度関数

$$(\rho + \lambda)U = (\bar{p}\mu - g)\omega U' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 U'' + \lambda \frac{(\max\{\bar{d}\omega_0, \omega\})^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (3.6)$$

ここで、 U は以下で与えられると仮定する。

$$U(\omega) = \begin{cases} C_1\omega^{a_1} + C_2\omega^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho+\lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} & , 0 < \omega < \bar{d}\omega_0 \\ \tilde{C}_1\omega^{a_1} + \tilde{C}_2\omega^{a_2} + \tilde{A} \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} & , \omega \geq \bar{d}\omega_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

ここで、 a_1 と a_2 はそれぞれ以下の式の正、負の解であるとする。

$$\frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 a^2 + (\bar{p}\mu - f_a - \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2)a - (\rho + \lambda) = 0 \quad (3.8)$$

そして、 \tilde{A} を以下の式で与えられるとする。

$$\tilde{A} = \frac{\lambda}{\rho + \lambda - (\bar{p}\mu - f_a)(1 - \gamma) + \bar{p}^2\sigma^2\gamma(1 - \gamma)/2} \quad (3.9)$$

ここで $C_1, C_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ は、自由境界条件と、 $\omega = \bar{d}\omega_0$ のとき滑らかであるという事によって決定された、定数とする (AppendixG 参照)。 U'' は連続な関数とする。

(3.5) より、解約・行使しない (no surrender) 境界は以下であると仮定する。

$$U(\omega) = V(\max\{\bar{s}\omega_0, \omega\}) \quad (3.10)$$

解約・行使しない領域は (ω_l, ω_u) の間だと仮定する。なぜなら、もし EIA アカウムの価値が十分に低かったならば、EIA の購入者が最低補償額 $\bar{s}\omega_0$ を受け取り、市場に投資したほうが最適なためである。反対に、もし EIA アカム上の価値が十分に高かつ r が 0 よりも大きい場合で、インデックスの中の危険資産の割合が \bar{p} が方程式 (2.10) で与えられた最適投資戦略より大きく違っていた場合も同様に、EIA の購入者は自身で最適投資戦略で投資したくなるためである。

最適停止問題において時間が定常な場合は、時間が境界 $\{\omega_l, \omega_u\}$ と独立であるということが導ける。反対に、一般的に制限のある領域 $\{\omega_l, \omega_u\}$ は時間に独立となる。

さらに、 $\bar{s}\omega_0$ と $\bar{d}\omega_0$ は $[\omega_l, \omega_u]$ の間にあると仮定する。それゆえに以下の式となる。

$$U(\omega_l) = V(\bar{s}\omega_0) \quad , \quad U(\omega_u) = V(\omega_u) \quad (3.11)$$

(証明)

方程式 (3.10)、 $\bar{s}\omega_0 > \omega_l$ より

$$\begin{aligned} U(\omega) &= V(\max\{\bar{s}\omega_0, \omega\}) \\ U(\omega_l) &= V(\max\{\bar{s}\omega_0, \omega_l\}) \\ &= V(\bar{s}\omega_0) \end{aligned}$$

同様に、 $\omega_u > \bar{s}\omega_0$ より

$$\begin{aligned} U(\omega_u) &= V(\max\{\bar{s}\omega_0, \omega_u\}) \\ &= V(\omega_u) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

自由境界上で滑らかだということは以下を意味する。

$$U'(\omega_l) = 0 \quad , \quad U'(\omega_u) = V'(\omega_u) \quad (3.12)$$

U は連続で、時点 $\omega = \bar{d}\omega_0$ の微分係数は以下になると仮定する。

$$U(\bar{d}\omega_0-) = U(\bar{d}\omega_0+) \quad , \quad U'(\bar{d}\omega_0-) = U'(\bar{d}\omega_0+) \quad (3.13)$$

以上の事より、6 個の不明な項 $\omega_l, \omega_u, C_1, C_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ に対して 6 つの方程式が存在する。方程式 (3.4)-(3.5) を解くことが出来き、その解は実証定理によって効用関数 U になる。導出した結果は以下の式になる。(AppendixH 参照)

定理 3.1.2. パラメーターによって決定された $C_1, C_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$

$$C_1 = -\frac{a_2}{a_1 - a_2} \frac{\omega_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left(A\bar{s}^{1-\gamma} - \frac{\lambda}{\rho+\lambda} \bar{d}^{1-\gamma} \right) \omega_l^{-a_1} \quad (3.14)$$

$$C_2 = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \frac{\omega_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left(A\bar{s}^{1-\gamma} - \frac{\lambda}{\rho+\lambda} \bar{d}^{1-\gamma} \right) \omega_l^{-a_2} \quad (3.15)$$

$$\tilde{C}_1 = -\frac{A - \tilde{A}}{a_1 - a_2} \left(\frac{a_2}{1-\gamma} - 1 \right) \omega_u^{1-\gamma-a_1} \quad (3.16)$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{A - \tilde{A}}{a_1 - a_2} \left(\frac{a_1}{1-\gamma} - 1 \right) \omega_u^{1-\gamma-a_2} \quad (3.17)$$

定理 3.1.3. パラメーターによって決定された ω_l, ω_u

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_u}{\omega_l} \right)^{a_1} &= \frac{1}{a_2} \frac{1}{A(\bar{s})^{1-\gamma} - \frac{\lambda}{\rho+\lambda} (\bar{d})^{1-\gamma}} \\ &\times \left\{ (A - \tilde{A})(a_2 - (1-\gamma)) \left(\frac{\omega_u}{\omega_0} \right)^{1-\gamma} - \left[a_2 \left(\frac{\lambda}{\rho+\lambda} - \tilde{A} \right) + \tilde{A}(1-\gamma) \right] (\bar{d})^{1-\gamma-a_1} \left(\frac{\omega_u}{\omega_0} \right)^{a_1} \right\} \quad (3.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_u}{\omega_l} \right)^{a_2} &= \frac{1}{a_1} \frac{1}{A(\bar{s})^{1-\gamma} - \frac{\lambda}{\rho+\lambda} (\bar{d})^{1-\gamma}} \\ &\times \left\{ (A - \tilde{A})(a_1 - (1-\gamma)) \left(\frac{\omega_u}{\omega_0} \right)^{1-\gamma} - \left[a_1 \left(\frac{\lambda}{\rho+\lambda} - \tilde{A} \right) + \tilde{A}(1-\gamma) \right] (\bar{d})^{1-\gamma-a_2} \left(\frac{\omega_u}{\omega_0} \right)^{a_2} \right\} \quad (3.19) \end{aligned}$$

以上の式について、 ω_l, ω_u について解く必要がある。その計算をするにあたって以下の境界条件について考察する。まず、以下の定義をする。

$$Q := A\bar{s}^{1-\gamma} - \frac{\lambda}{\rho+\lambda} \bar{d}^{1-\gamma}$$

さらに、以下の定義をする。

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{1}{a_2} \frac{1}{A(\bar{s})^{1-\gamma} - \frac{\lambda}{\rho+\lambda}(\bar{d})^{1-\gamma}} = \frac{1}{a_2 Q} \\
B_{21} &= \frac{1}{a_1} \frac{1}{A(\bar{s})^{1-\gamma} - \frac{\lambda}{\rho+\lambda}(\bar{d})^{1-\gamma}} = \frac{1}{a_1 Q} \\
B_{12} &= (A - \tilde{A})(a_2 - (1 - \gamma)) \\
B_{22} &= (A - \tilde{A})(a_1 - (1 - \gamma)) \\
B_{13} &= [a_2(\frac{\lambda}{\rho + \lambda} - \tilde{A}) + \tilde{A}(1 - \gamma)](\bar{d})^{1-\gamma-a_1} \\
B_{23} &= [a_1(\frac{\lambda}{\rho + \lambda} - \tilde{A}) + \tilde{A}(1 - \gamma)](\bar{d})^{1-\gamma-a_2}
\end{aligned}$$

次に χ を以下に定義する。

$$\chi := \frac{\omega_u}{\omega_0}$$

以上の定義を用いて、(3.18)(3.19)を表す。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\omega_u}{\omega_l}\right)^{a_1} &= B_{11}\{B_{12}\chi^{1-\gamma} - B_{13}\chi^{a_1}\} \\
\left(\frac{\omega_u}{\omega_l}\right)^{a_2} &= B_{21}\{B_{22}\chi^{1-\gamma} - B_{23}\chi^{a_2}\}
\end{aligned}$$

ここで、 $(\frac{\omega_u}{\omega_l})^{a_1}, (\frac{\omega_u}{\omega_l})^{a_2}$ を以下に表記する。

$$\begin{aligned}
\eta_1(\chi) &:= B_{11}\{B_{12}\chi^{1-\gamma} - B_{13}\chi^{a_1}\} \\
\eta_2(\chi) &:= [B_{21}\{B_{22}\chi^{1-\gamma} - B_{23}\chi^{a_2}\}]^{\frac{a_1}{a_2}}
\end{aligned}$$

以上の関数を使って $\eta(\chi)$ を以下に定義する。

$$\begin{aligned}
\eta(\chi) &:= B_{11}\{B_{12}\chi^{1-\gamma} - B_{13}\chi^{a_1}\} - [B_{21}\{B_{22}\chi^{1-\gamma} - B_{23}\chi^{a_2}\}]^{\frac{a_1}{a_2}} \\
&= \eta_1(\chi) - \eta_2(\chi)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

仮定 3.1.1. 境界条件を決定する条件の仮定

以下の条件を仮定する。

$$\begin{aligned}
(A1) &: B_{12} > 0 \\
(A2) &: B_{13}, B_{22}, B_{23} < 0 \\
(A3) &: a_2 < 1 - \gamma \\
(A4) &: B_{23} < B_{22} < 0 \\
(A5) &: a_1 > 1
\end{aligned}$$

a_1 が (3.8) の正の解であるという仮定より、 $a_1 > 1$ という仮定は

$$\bar{p}\mu - f_a - (\rho + \lambda) < 0$$

ということ同値になる。

仮定 3.1.2. 境界条件

- もし、仮定 3.1.1 の条件 (A1),(A2) を満たし、そして $Q > 0$ ならば、(3.6) の自由境界は、 ω_u の自由境界のみ持つ。つまり、解約しない境界条件は $(0, \omega_u)$ の間になる。
- もし、仮定 3.1.1 の条件 (A1)-(A4) を満たしそして $Q < 0$ のとき、(3.6) の自由境界は、2つの自由境界 $0 < \omega_l < \omega_u$ を持つ。つまり、解約しない境界条件は (ω_l, ω_u) の間となる。
- もし、仮定 3.1.1 の条件 (A5) を満たしそして $Q = 0$ のとき、解約の境界条件の下限は $\omega_l = 0$ から始まる。

仮定 3.1.3. 境界条件

もし、CRRA を $\gamma \in (0, 1)$ と仮定すると、上記の定理の値は逆になる。つまり、 $Q > 0$ のときは2つの自由境界になり、 $Q < 0$ のときはただ一つの自由境界条件になる。

定理 3.1.4. 境界条件

$\gamma > 1$ で、かつ仮定 3.1.1 の条件 (A1),(A2) を $Q > 0$ を満たすと仮定する場合、(3.20) の η は実数の根を持たない。

(証明)

もし、 $Q > 0, B_{11}, B_{21} > 0$ 、仮定 3.1.1 の条件 (A1)(A2) を満たす場合は $(0, \infty)$ 上で $\eta < 0$ になる。 a_1/a_2 より、 η_2 は正の値か、もしくは虚数になる。どちらの場合でも、 $\eta_1 < 0$ より、 η は実数の根にならない。■

定理 3.1.5. χ の近似値

$\gamma > 1$ で仮定 3.1.1 の条件 (A1) - (A4) を満たし、 $Q < 0$ と仮定する。その場合式 (3.20) の η は $\chi > 1$ の一つの実数の根を持つ。そしてその近似値は以下に表す事ができる。

$$\chi \simeq \left(\frac{B_{23}}{B_{22}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma-a_2}} \quad (3.21)$$

(証明)

まず、 $Q < 0$ という仮定より、 $B_{11} > 0, B_{21} < 0$ ということが導ける。以下を定義する。

$$\tilde{\eta}_2(\chi) = \eta_2(\chi)^{\frac{a_2}{a_1}} = B_{21} \{ B_{22} \chi^{1-\gamma} - B_{23} \chi^{a_2} \}$$

そして、 $\tilde{\eta}_2$ は仮定 3.1.1 の条件 (A2) - (A4) より以下の場合に値が 0 になることに注意する。

$$\chi = \chi^* := \left(\frac{B_{23}}{B_{22}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma-a_2}} \quad (3.22)$$

(証明)

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}^* &= B_{21}\{B_{22}(\chi^*)^{1-\gamma} - B_{23}(\chi^*)^{a_2}\} \\
&= B_{21}\{B_{22}\left(\frac{B_{23}}{B_{22}}\right)^{\frac{1-\gamma}{1-\gamma-a_2}} - B_{23}\left(\frac{B_{23}}{B_{22}}\right)^{\frac{a_2}{1-\gamma-a_2}}\} \\
&= B_{21}\{B_{22}\left(\frac{B_{23}}{B_{22}}\right)^{1+\frac{a_2}{1-\gamma-a_2}} - B_{23}\left(\frac{B_{23}}{B_{22}}\right)^{\frac{a_2}{1-\gamma-a_2}}\} \\
&= B_{21}\{B_{23}\left(\frac{B_{23}}{B_{22}}\right)^{\frac{a_2}{1-\gamma-a_2}} - B_{23}\left(\frac{B_{23}}{B_{22}}\right)^{\frac{a_2}{1-\gamma-a_2}}\} \\
&= 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

仮定 3.1.1 の (A4) は $\tilde{\eta}_2(1) < 0$ を意味している。(A4) より $\tilde{\chi} < 1$ なことから、領域 $(0, \chi^*)$ 上で $\tilde{\eta}_2 < 0$ となる。つまり、 $(0, \chi^*)$ 上では、 η_2 は実数を取らない。

$\tilde{\eta}_2 > 0$ である必要があると考えられる。これを証明するために、まず新しい χ_c を以下に定義する。

$$\chi_c > \chi^*$$

明らかに

$$\tilde{\eta}_2(\chi_c) > 0$$

となる。

$\tilde{\eta}_2$ は連続で (χ^*, ∞) 上でほかに根を持たないため、 (χ^*, ∞) 上では $\eta_2 > 0$ となる。 χ_c を $\tilde{\eta}_2$ を決定するポイントとする。 χ_c を以下の値をとると仮定する。

$$\chi_c = \left[\frac{B_{22}(1-\gamma)}{B_{23}a_2} \right]^{\frac{1}{\gamma-1+a_2}}$$

以下に注目する

$$\begin{aligned}
\chi_c &= \left(\frac{B_{22}}{B_{23}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1+a_2}} \left(\frac{1-\gamma}{a_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1+a_2}} \\
&= \left(\frac{B_{22}}{B_{23}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1+a_2}} \mathcal{L} \\
&= \chi^* \mathcal{L}
\end{aligned}$$

一方で、仮定 3.1.1 の (A3) より、 $\mathcal{L} > 1$ となる。それゆえに上式より、 $\chi^* < \chi_c$ となる。

$\tilde{\eta}_2(\chi_c) > 0$ であるという必要性についての考察に戻る。これを証明するために、以下に注目する。

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\eta}_2(\chi_c)}{B_{21}} &= \frac{1}{B_{21}} B_{21} [B_{22}\chi_c^{1-\gamma} - B_{23}\chi_c^{a_2}] \\
&= B_{22}\chi_c^{1-\gamma} - B_{23}\chi_c^{a_2} \\
&= B_{22}(\chi^* \mathcal{L})^{1-\gamma} - B_{23}(\chi^* \mathcal{L})^{a_2} \\
&= \mathcal{L}^{1-\gamma} [B_{22}(\chi^*)^{1-\gamma} - B_{23}(\chi^*)^{a_2} \mathcal{L}^{a_2-1+\gamma}]
\end{aligned}$$

仮定 3.1.1 の (A4) $\mathcal{L} > 1$ より、 $\mathcal{L}^{a_2-(1-\gamma)} < 1$ は明らかである。 χ^* において $\tilde{\eta}_2$ が 0 になるという事、仮定 3.1.1 の (A3) より、以下がもとまる。ただし、 $Q < 0$ であることから $B_{21} < 0$ になり、 $\tilde{\eta}_2(\chi_c) > 0$ なることから、 $\frac{\tilde{\eta}_2(\chi_c)}{B_{21}} < 0$ になることに注意する。

$$B_{22}(\chi^*)^{1-\gamma} = B_{23}(\chi^*)^{a_2} < B_{23}(\chi^*)^{a_2} \mathcal{L}^{a_2-1+\gamma}$$

(証明)

$B_{22}(\chi^*)^{1-\gamma} = B_{23}(\chi^*)^{a_2}$ は式 (3.22) より明らか。

$B_{23}(\chi^*)^{a_2} < B_{23}(\chi^*)^{a_2} \mathcal{L}^{a_2-1+\gamma}$ は条件より明らか ■

以上より、 (χ^*, χ_c) 上で以下のことがもとまる

- $\tilde{\eta}_2 > 0$ になる、それゆえに $\eta_2 > 0$ となる
- $\tilde{\eta}_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \chi \rightarrow \chi^*$ and $\chi \rightarrow \infty$
- $\eta_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \chi \rightarrow \chi^*$ and $\chi \rightarrow \infty$
- $\chi = \chi_c$ は全体的な χ_2 の最小値

η が (χ^*, ∞) 上で 0 をとるために、 $Q < 0$ (A1)(A2) の条件を用いることによって $(0, \infty)$ 上で $\eta \geq 0$ になることに注目してきた。時点 $\chi = \chi^*$ のとき $\eta_2 \rightarrow \infty$ になることより、 $\chi = \chi^*$ の近くで $\eta_1 < \eta_2$ であることが分かる。また、 $\eta(\tilde{x}) > \eta_2(\tilde{x})$ となるような一つの $\tilde{x} > \chi^*$ が存在する。それゆえに、 (χ^*, \tilde{x}) 上で η_1 と η_2 が交わっている。

次に、大きい値の χ について考察する。(A2)-(A4) より以下がもとまる。

$$\begin{aligned} \eta_1(\chi) &\approx \eta_1^a(\chi) := -B_{11}B_{13}\chi^{a_1} < \eta_1(\chi) \\ \eta_2(\chi) &\approx \eta_2^a(\chi) := [B_{21}B_{22}\chi^{1-\gamma}] < \eta_2(\chi) \end{aligned}$$

ここで η_j^a は $\eta_j, j = 1, 2$ の漸近極限とする。

また、 χ が大きな値をとるとき $\eta_1^a > \eta_2^a$ になる。これは、単純に η_1^a の方が χ をより大きい値の乗数をかけているからである。より厳密にするために、大きい値の χ について考察する。(A3) は以下を示している。

$$\begin{aligned} (-B_{11}B_{13})^{\frac{1}{a_1}} \chi &> (B_{21}B_{22})^{\frac{1}{a_2}} \chi^{\frac{1-\gamma}{a_2}} \\ \eta_1^a(\chi)^{\frac{1}{a_1}} &> \eta_2^a(\chi)^{\frac{1}{a_1}} \\ \eta_1^a(\chi) &> \eta_2^a(\chi) \end{aligned}$$

上式は $\eta_1^a(\chi) > \eta_2^a(\chi)$ となることを表している。しかし、実際の数値実験の結果は、 η_1^a と η_2^a の値の差は増加している。

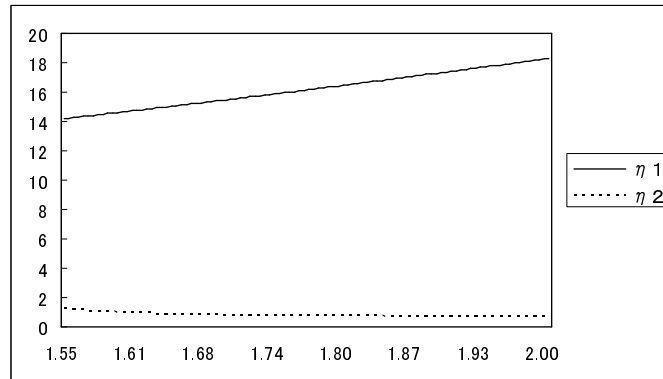


図 3.1: η_1 と η_2 の図

結論として、時点 $\chi = \tilde{x}$ の時点で $\eta_1 > \eta_2$ となることより、 (χ^*, \tilde{x}) の間で η が 0 になることがわかる。■

定理 3.1.6. 境界条件

ここでは、 $\gamma > 1$ 、仮定 3.1.1 の (A5)、 $Q = 0$ を仮定する。それらの条件のもとでは、解約の資産の下限は $\omega_l = 0$ から始まる。

(証明)

式 (3.7) において、 $C_2 = 0$ とする。 $\omega \in (0, \bar{d}\omega_0)$ とするするために、式 (3.7) は以下になる。

$$\begin{aligned}
 U(\omega) &= C_1\omega^{a_1} + C_2\omega^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 &= C_1\omega^{a_1} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 &= C_1\omega^{a_1} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 &= C_1\omega^{a_1} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \bar{d}^{1-\gamma} \frac{(\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

ここで、 $Q = 0$ の場合について考察する。 $Q = 0$ より

$$\begin{aligned}
 Q &= A\bar{s}^{1-\gamma} - \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \bar{d}^{1-\gamma} = 0 \\
 \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \bar{d}^{1-\gamma} &= A\bar{s}^{1-\gamma}
 \end{aligned}$$

以上の結果を $\omega = 0$ とした場合の (3.23) に代入する。

$$\begin{aligned}
 U(0) &= C_1 0^{a_1} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \bar{d}^{1-\gamma} \frac{(\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 &= A\bar{s}^{1-\gamma} \frac{(\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 &= A \frac{(\bar{s}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 &= V(\bar{s}\omega_0) \\
 &= (V \circ B)(0)
 \end{aligned}$$

以上より、以下がもとまる。

$$\frac{\partial}{\partial \omega} U(\omega)|_{\omega=0} = C_1 a_1 \omega^{a_1-1} = 0$$

左辺が 0 になることより

$$\begin{aligned}
 C_1 a_1 \omega^{a_1-1} &= 0 \\
 C_1 \omega^{a_1-1} &= 0
 \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\partial}{\partial \omega} U(\omega)|_{\omega=0} = C_1 \omega^{a_1-1} = 0 = \frac{\partial}{\partial \omega} (V \circ B)(0)$$

以上のより、滑らかな時点 $\omega = 0$ において効用関数 U は効用関数 V と交わることが分かる。境界条件 $U(\omega) \geq V(\max\{\bar{s}\omega_0, \omega\})$ より、 $\omega_l = 0$ から始まっていることがわかる。ここで、 $a_1 > 1$ という仮定 3.1.1 の (A5) 以外の条件は使っていないことに注意する。■

以上の境界条件に従って、効用関数 U を導出するアルゴリズムを以下に示す。

1. $\frac{\omega_u}{\omega_0}$ を定理 3.1.5 より近似値 $\frac{\omega_u}{\omega_0} \simeq \chi^* = \left(\frac{[a_1(\frac{\lambda}{\rho+\lambda} - \bar{A}) + \bar{A}(1-\gamma)]\bar{d}^{1-\gamma-a_2}}{(A-\bar{A})(a_1-(1-\gamma))} \right)^{\frac{1}{1-\gamma-a_2}}$ を用いて導出する
2. ω_u を導出する
3. ω_u を方程式 (H.7)(H.8) に代入し、 \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 を導出する。
4. 定理 3.1.4 より境界条件を確認する
5. ω_l がある場合は方程式 (3.18) を ω_u を用いて、 ω_l を導出する
6. 最後に、 ω_l を方程式 (3.14)(3.15) に代入し、 C_1, C_2 を導出する。

注意:計算した戦略が適切であることを示すために、 $\bar{s}\omega_0$ と $\bar{d}\omega_0$ が ω_l と ω_u の間にある事も確認する。

4 保険会社の割引期待支払額

ここでは、EIA を提供している保険会社の割引期待支払額を、 $\bar{p}, \bar{d}, \bar{s}, f_0, f_a$ の関数としてモデル化する。そして保険会社が健全に運営できることに役立つような指標を目指す。

保険会社は多くの種類の独立な保険商品売っていると仮定する。そして、多くの種類の独立な保険商品売っていることより、死亡リスクは多様化され年金市場は完備な市場であると考えられる。リスク中立的な金融の測度 Q は、危険資産の割り引かれた価格過程が測度 Q によってマルチンゲールとなるような測度とする。ここで、割引率を r とする。 B をブラウン運動であることより、 \tilde{B} は測度 Q 上のブラウン運動と仮定する。そして \tilde{B} は以下に定義する。

$$\tilde{B}_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t \quad (4.1)$$

EIA を売っている保険会社の割引期待支払額は以下で定義する。

定義 4.1. 割引期待支払額

$$H(\omega) = \tilde{E}[e^{-r\tau} P(W_\tau, \tau) | W_0 = \omega] \quad (4.2)$$

ここで、 P は解約・行使した時刻 ($\tau = \tau_s$) もしくは購入者が死亡した時刻 ($\tau = \tau_d$) の支払額とする。そして \tilde{E} はリスク中立的な測度を使った期待値とする。支払額 P は以下に定義される。

$$P(W_\tau, \tau) = \begin{cases} \bar{s}\omega_0, & \tau = \tau_s, W_\tau = \omega_l \\ W_\tau, & \tau = \tau_s, W_\tau = \omega_u \\ \bar{d}\omega_0, & \tau = \tau_d, W_\tau < \bar{d}\omega_0 \\ W_\tau, & \tau = \tau_d, W_\tau \geq \bar{d}\omega_0 \end{cases} \quad (4.3)$$

方程式 (4.1) を方程式 (3.1) に用いることで、EIA アカウントの中の資産がリスク中立的な測度の元で、以下の式になる。

$$\begin{cases} dW_t &= (\bar{p}\mu - g)W_t dt + \bar{p}\sigma W_t (d\tilde{B}_t - \frac{\mu - r}{\sigma} dt) \\ &= (\bar{p}r - g)W_t dt + \bar{p}\sigma W_t d\tilde{B}_t \\ W_0 &= \omega \end{cases} \quad (4.4)$$

H の解は、 ω が ω_l と ω_u の間にあるとすると、一般的な微分方程式の解になる。(Appendix I 参照)

定理 4.1.1. パラメーターによって決定された割引期待支払額

$$\begin{cases} (\bar{p}r - g)\omega H' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 H'' + \lambda(\max\{\bar{d}\omega_0, \omega\} - H) = rH \\ H(\omega_l) = \bar{s}\omega_0 \\ H(\omega_u) = \omega_u \end{cases} \quad (4.5)$$

そして、 H が以下によって与えられる (Appendix J 参照)。

$$H(\omega) = \begin{cases} D_1\omega^{b_1} + D_2\omega^{b_2} + \frac{\lambda}{r+\lambda}\bar{d}\omega_0 & 0 < \omega < \bar{d}\omega_0 \\ \tilde{D}_1\omega^{b_1} + \tilde{D}_2\omega^{b_2} + \frac{\lambda}{(1-\bar{p})r+g+\lambda}\omega, & \omega \geq \bar{d}\omega_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

ここで b_1 と b_2 は以下の式の正または負の解になる。

$$\frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 b^2 + (\bar{p}r - g - \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2)b - (\lambda + r) = 0 \quad (4.7)$$

$D_1, D_2, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2$ は定数で、(4.5) の境界条件と (4.6) によって決定される。ここで、 H は、 $\omega = \bar{d}\omega_0$ 上で連続である。

$D_1, D_2, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2$ を計算した結果は以下の式になる (AppendixK 参照)。

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left(\bar{s} - \frac{\lambda}{r + \lambda} \bar{d}\right) \omega_0 \omega_l^{-b_1} - D_2 \omega_l^{b_2 - b_1} \\
D_2 &= \left(\bar{s} - \frac{\lambda}{r + \lambda} \bar{d}\right) \omega_0 \omega_l^{-b_2} - D_1 \omega_l^{b_1 - b_2} \\
\tilde{D}_1 &= \left(1 - \frac{\lambda}{(1 - \bar{p})r + f_a + \lambda}\right) \omega_u^{1 - b_1} - \tilde{D}_2 \omega_u^{b_2 - b_1} \\
\tilde{D}_2 &= \left(1 - \frac{\lambda}{(1 - \bar{p})r + f_a + \lambda}\right) \omega_u^{1 - b_1} - \tilde{D}_1 \omega_u^{b_2 - b_1} \\
\tilde{D}_1 &= D_1 + \frac{1 - b_2}{b_2 - b_1} \left(\frac{\lambda}{(1 - \bar{p})r + f_a + \lambda} - \frac{\lambda}{r + \lambda}\right) (\bar{d}\omega_0)^{1 - b_1} \\
\tilde{D}_2 &= D_2 + \frac{1 - b_1}{b_1 - b_2} \left(\frac{\lambda}{(1 - \bar{p})r + f_a + \lambda} - \frac{\lambda}{r + \lambda}\right) (\bar{d}\omega_0)^{1 - b_2}
\end{aligned}$$

以上の連立方程式を解くことによってパラメーター $D_1, D_2, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2$ を求めることができ。最終的に、 $H(\omega_0)$ を求めることができる。

5 数値実験

この章では、3 で求めた解析解を用いて、数値実験を行う。基礎となるシナリオを以下に設定する。

- 相対的リスク回避率： $\gamma = 2$
- 無リスク資産の収益率： $r = 0.04$
- 危険資産の収益率： $\mu = 0.08$
- 危険資産のボラティリティ： $\sigma = 0.2$
- インデックスの中の危険資産の割合： $\bar{p} = 0.9$
- 死亡給付金のパラメーター： $\bar{d} = 1.4$
- 保障された解約金のパラメーター： $\bar{s} = 0.9$
- 死力： $\lambda = 0.04$
- 個人の割引率： $\rho = 0.04$
- 初期における一時払い保険料： $\tilde{\omega}_0 = 1.0$
- 購入時の手数料： $f_0 = 0.05$
- 保険の維持、管理費 $f_a = 0.02$

また、個々の試行では $V(\tilde{\omega}_0) < U(\omega_0)$ であることを確認する。

5.1 境界条件に関する数値実験

ここでは、まず定理 3.1.4 の境界条件について検証する。

5.1.1 数値実験 1

まず、 $Q < 0$ と $Q > 0$ の場合について検証する。図 5.1 は基礎シナリオで数値実験を行った結果である。ここで、直線は U 、点線は V を表している。基礎シナリオでは、 $Q = -0.0152625 < 0$ であることより上下の境界条件を求めることができ、 $\omega_u = 1.42357, \omega_l = 0.211886$ となる。もし、EIA のファンドが (ω_l, ω_u) の範囲にないのであるならば、仮定により EIA の契約者は EIA を解約・行使し、自分で市場に戦略 π_t^* で投資しなければならない。相対的リスク回避率の関数 u によって、効用度が $\gamma < 1$ の場合には負をとることに注意しなければならない。また、 U の効用関数が、(3.13) で定義した通りに滑らかになっていることに注意する。

図 5.2 は死力を $\lambda = 0.055$ とした場合の検証結果である。その場合、 $Q = 0.0079221 > 0$ となる。そのため、境界条件より上界の境界条件 $\omega_u = 1.44847$ しか求めることができない。その場合、契約者は EIA のファンドの価値が ω_u に達したときに解約・行使するにも関わらず、ファンドの価値がどこまで下がったとしても EIA を保有し続けなければならないことになる。これは、契約者の死亡率が高い場合、期待生存期間が短く、保障された死亡給付金より価値のあるものとして考えられるためである。

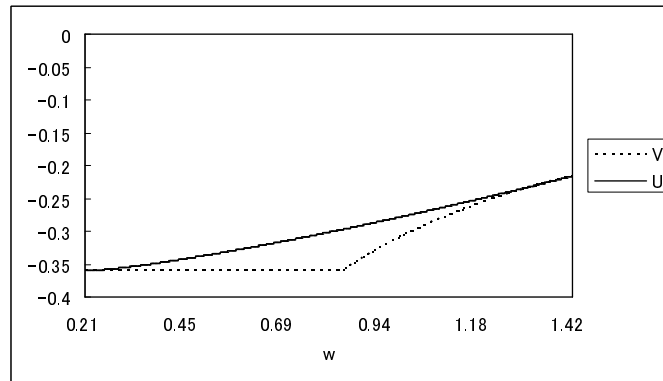


図 5.1: $Q = -0.0152625 < 0$ の場合

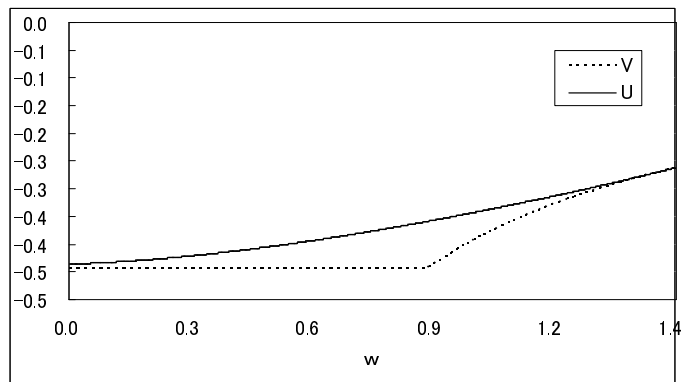


図 5.2: $Q = 0.0079221 > 0$ の場合

5.1.2 数値実験 2

$Q < 0$ と $Q = 0$ の場合について検証する。図 5.3 は、金利を $r = 0.026663308449182$ として数値実験を行った結果である。この場合、 $Q \approx 0$ となり、上下の境界条件は $\omega_u = 1.51331, \omega_l = 0$ となる。

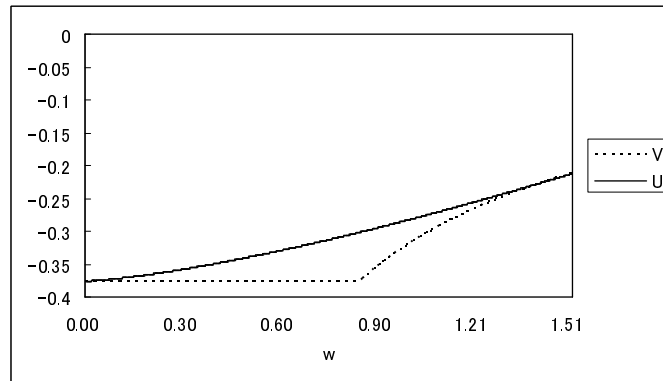


図 5.3: $Q \equiv 0$ の場合

5.1.3 数値実験 3

ここでは、相対的リスク回避率 $\gamma < 1$ の場合について検証を行う。まず、図 5.4 では相対的リスク回避率 $\gamma = 0.8$ とする。その結果、 $Q = 0.049761 > 0$ となり、上下の境界条件を持つ。 $(\gamma < 1$ の場合、境界条件に関する項目が逆になる。定理 3.1.2 参照) よって、 $\omega_u = 1.21929, \omega_l = 0.612878$ となる。また、相対的リスク回避率の関数より、 $\gamma \in (0, 1)$ では効用度が正の値に反転することに注意する。

図 5.5 では、 $\gamma = 0.8$ とし、さらに死力を $\gamma = 0.15$ とした。この場合、 $Q = -0.0146425 < 0$ となり、境界条件より下界の境界条件を持たず、 $\omega_u = 1.43362$ となる。

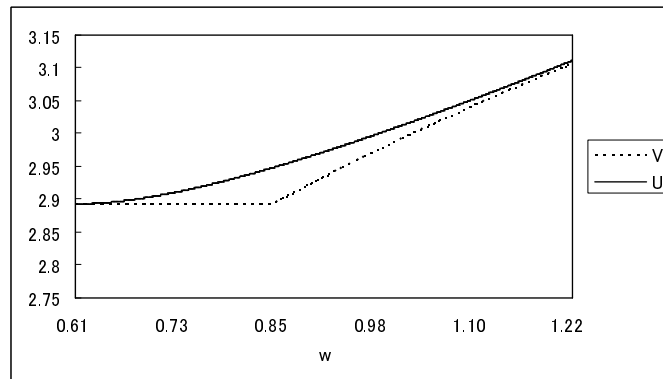


図 5.4: $Q = 0.049761 > 0$ の場合

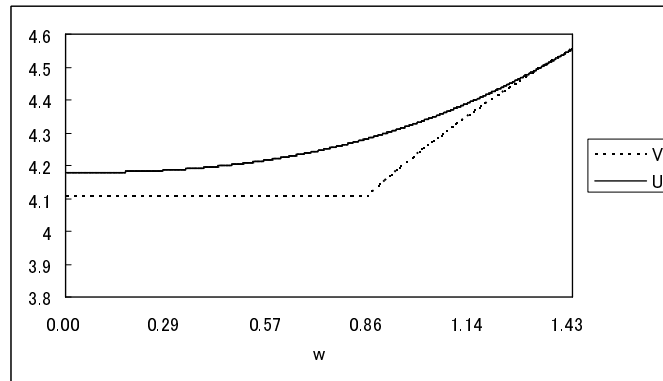


図 5.5: $Q = -0.0146425 < 0$

5.2 パラメーターごとの感度分析

ここでは、各パラメーターを変化させることによって、自由境界条件 ω_l, ω_u と各効用度 $V(\tilde{\omega}_0), U(\omega_0)$ がどのように変化するかを調べる。また、購入者のリスク回避率が高い場合は $\gamma = 0.8$ として検証を行う。

5.2.1 無リスク資産の収益率

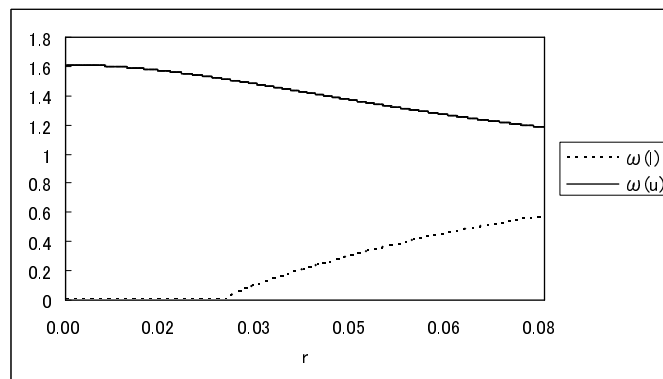


図 5.6: リスク回避的な場合の無リスク資産の収益率に関する解約の指標

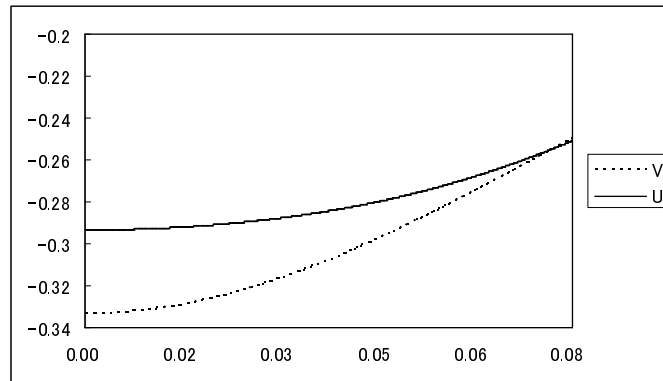


図 5.7: リスク回避的な場合の無リスク資産の収益率に関する効用

ここでは、無リスク資産の収益率 r について検証を行う。収益率の推定範囲は $r = [0, 0.08]$ とした。これは、リスク資産の収益率より無リスク資産の収益率を上回らないためである。図 5.6 の結果より、収益率の増加に伴って ω_l, ω_u の値が狭まっていることが分かる。なぜならリスク回避的な個人は、無リスク資産の収益率が低い場合は安定的な EIA を魅力的に考えるが、無リスク資産の収益率が高い場合は自身でリスク無しに資産を増やすことができるようになるため、EIA を購入する誘因が低くなるといえる。

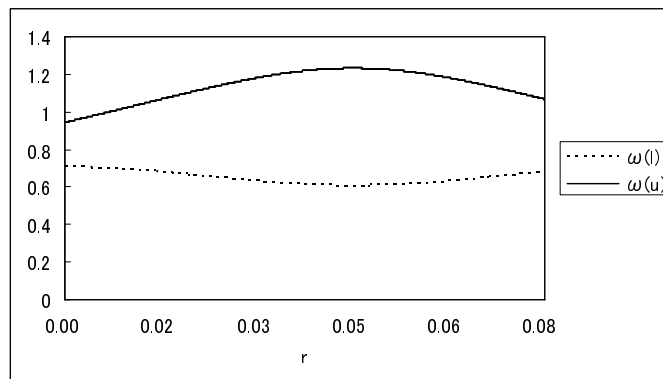


図 5.8: リスク回避的でない場合の無リスク資産の収益率に対する解約の指標

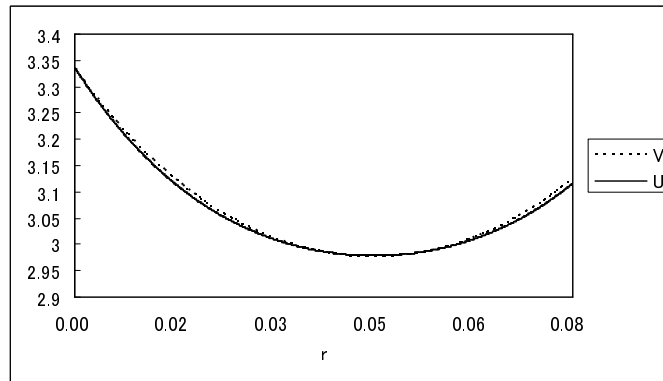


図 5.9: リスク回避的でない場合の無リスク資産の収益率に対する効用

図 5.8, 5.9 は、 $\gamma = 0.8$ とし、契約者がリスク回避的でないとして仮定した場合の結果を示した。ここで、相対的リスク回避率の関数より、 $\gamma \in (0, 1)$ の範囲では効用度が正の値をとることに注意する。数値実験の結果より、リスク回避的でない契約者には安定性が高くても、収益率が自ら投資するよりも低い EIA はあまり魅力的ではないことが分かる。また、金利が大きくなると EIA・投資の両面から効用度が増加するが、これは収益率の高い無リスク資産に投資をしたい効用度が上がるためである。これは、 $r = 0.8$ 近辺ではリスク資産への最適投資戦略がほぼ 0 に近づいていることから分かる。

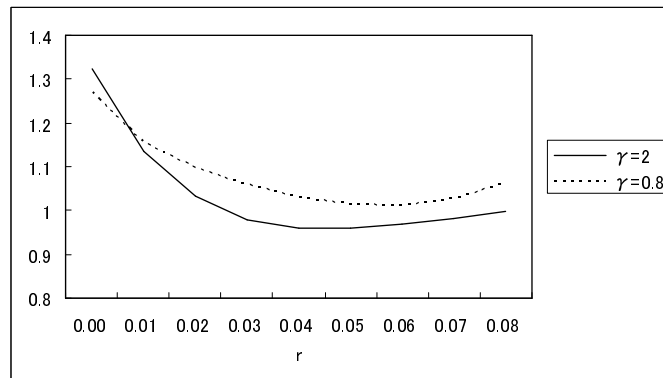


図 5.10: リスク回避的な場合の無リスク資産に対する割引期待支払額

最後に、保険会社が EIA を保険商品として提供できるかどうかを検証した図を図 5.10 に示す。ここでは、 $H(\omega_0) < \tilde{\omega}_0 = 1$ な場合は保険商品として運営できることを意味する。図より収益率が低い場合は、商品として提供することが難しい事が分かる。

5.2.2 危険資産の収益率

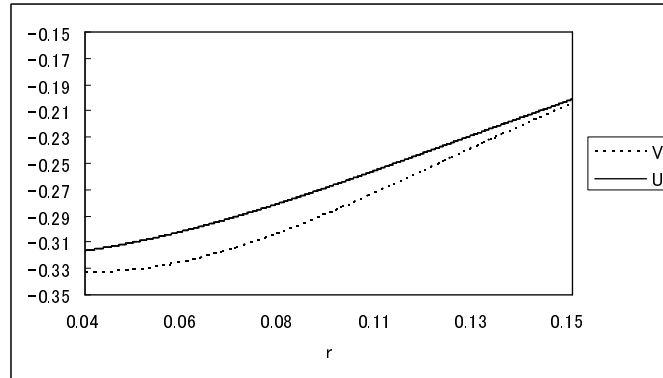


図 5.11: リスク回避的な場合の危険資産の収益率に対する解約率の指標

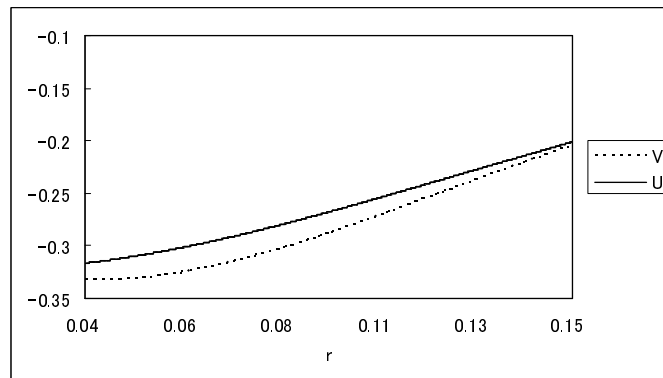


図 5.12: リスク回避的な場合の危険資産の収益率に対する効用

ここでは、リスク回避的な購入者の危険資産の収益率の変化に関する図を図 5.11・5.12 に示す。検証範囲は収益率の推定範囲は $r = [0.04, 0.15]$ とした。これは、リスク資産の収益率より無リスク資産の収益率を上回らないためである。

図 5.11 を見ると μ の上昇に伴って、 ω_u にあまり変化が無いにも関わらず、 ω_l が上昇しているのが分かる。これは、資産が増加した場合の利益確定売りと考えられる。また市場の収益率の増加に伴って、安定性の高い EIA を契約するよりも自ら投資する方が効用が高くなっていくことが分かる。

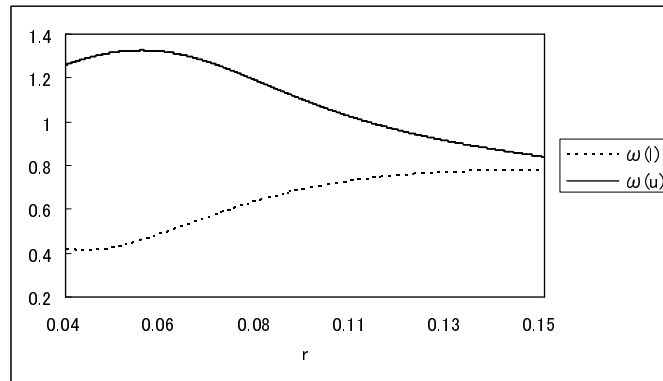


図 5.13: リスク回避的でない場合の危険資産の収益率に対する解約率の指標

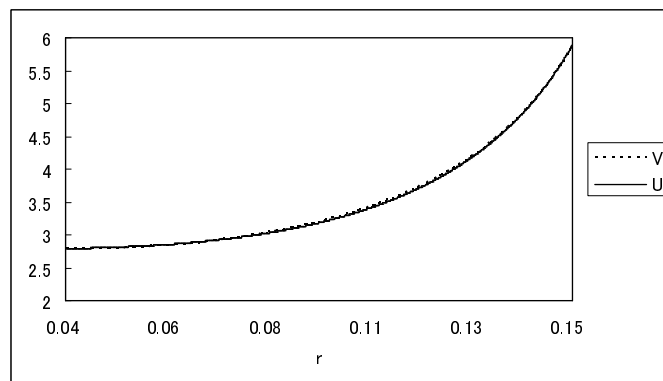


図 5.14: リスク回避的でない場合の危険資産の収益率に対する効用

図 5.13・5.14 はリスク回避的でない契約者に対して検証を行った結果である。データから検証すると、 $\mu \in [0.04, 0.08]$ の範囲で若干 $U(\omega_0)$ が $V(\tilde{\omega}_0)$ より優っている。しかし、図 5.12 の結果と比べて、リスクを許容できる購入者には市場の高収益に伴って EIA が誘因を持つ範囲が狭く、また、購入したとしてもすぐに解約するということが分かる。

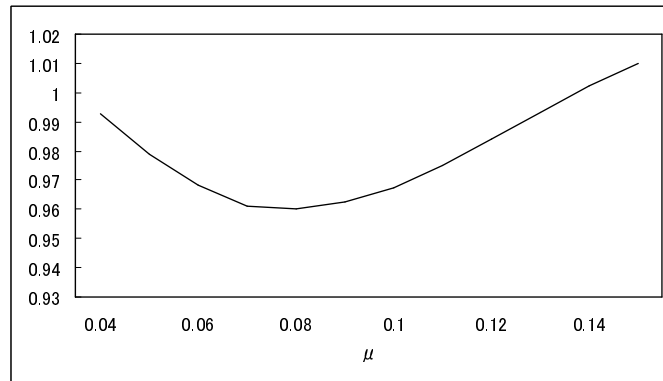


図 5.15: リスク回避的でない場合の危険資産の収益率に対する割引期待支払い額

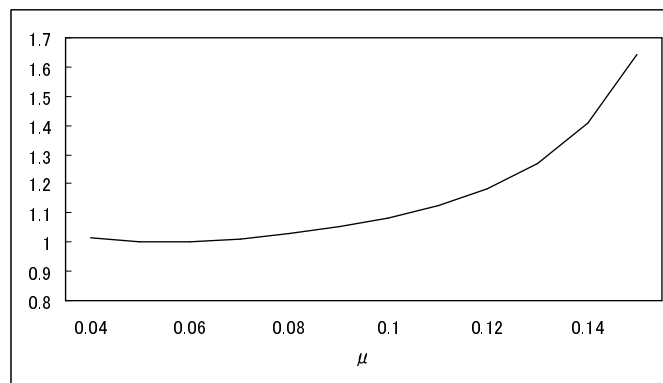


図 5.16: リスク回避的でない場合の危険資産の収益率に対する割引期待支払額

図 5.15・5.16 は危険資産の収益率に対して期待支払額の変化を示した。リスク回避的な契約は、危険資産の収益率が高いと資産が増えた場合は利益確定を見込んで解約・行使してしまい、結果として保険会社の支払いを増加させる恐れがある。

リスク回避的でない契約者の場合は、契約して資産が多少増加した場合に利益確定のためにすぐに解約・行使してしまい、また、資産が多少でも減額した場合は解約・行使し、補償額を受け取るため、結果としてあらゆる時点で $H(\omega_0) > 1$ となってしまう、保険会社の支払いが多くなり保険商品として運営が難しい。

5.2.3 インデックスの中の危険資産の割合 \bar{p}

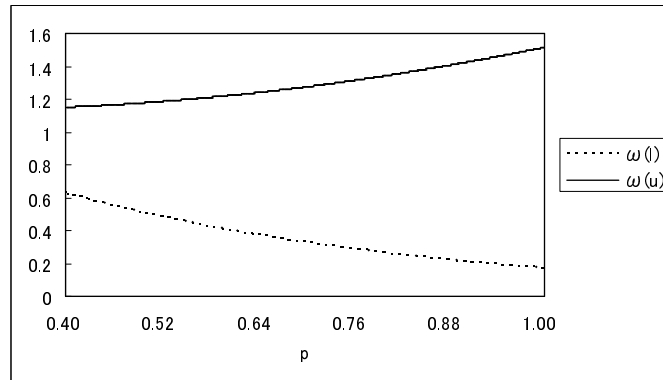


図 5.17: リスク回避的な場合の \bar{p} に対する解約の指標

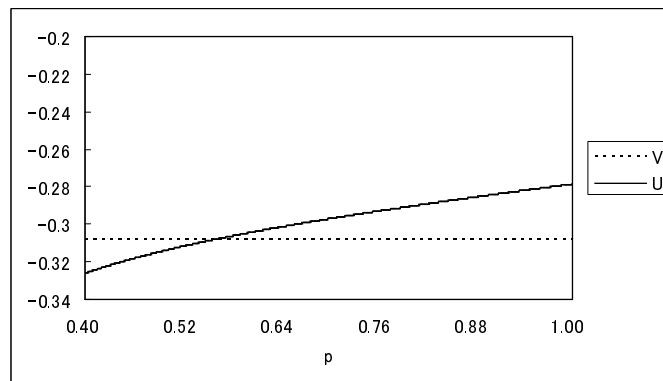


図 5.18: リスク回避的な場合の \bar{p} に対する効用

図 5.17・5.18 では契約者がリスク回避的な場合のパラメーター \bar{p} に対して検証を行った。パラメーター \bar{p} の増加に伴って、 ω_l, ω_u も増加し、解約・行使しなくなっている。これは、EIA のインデックスの中の無リスク資産の収益率が 0 であるため、 \bar{p} の増加は収益の増大が見込まれること。 \bar{p} の増大で資産の危険度が増し、より補償額が重要になってきていることを意味する。

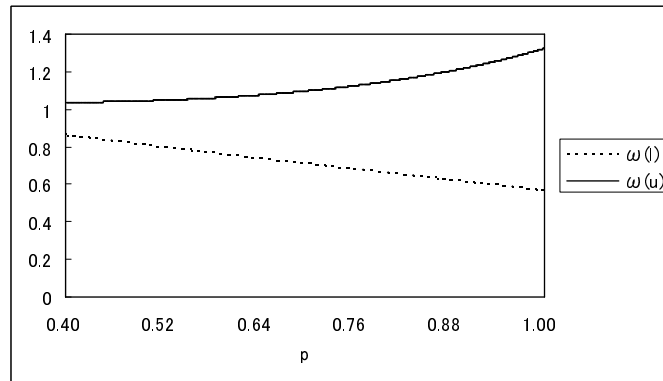


図 5.19: リスク回避的でない場合の \bar{p} に対する解約の指標

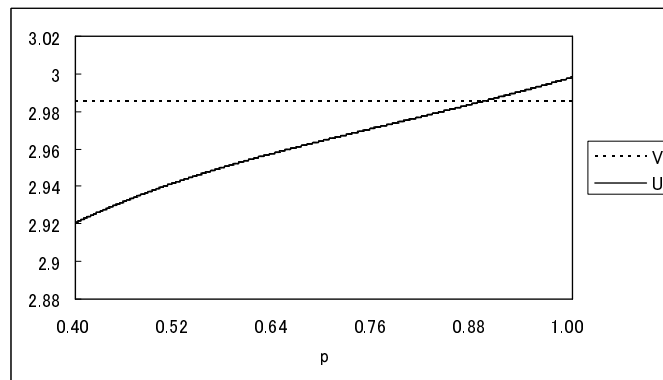


図 5.20: リスク回避的でない場合の \bar{p} に対する効用

図 5.19・5.20 では購入者がリスク回避的な場合のパラメーター \bar{p} に対して検証を行った。なお、効用 $V(\tilde{\omega}_0)$ はパラメーター \bar{p} とは無関係なので \bar{p} に対して変化しない。

ある程度 \bar{p} の値が大きい場合、つまりリスクと収益率が高い場合にのみ EIA を契約すると考えられ、リスク回避的でない契約者にも、 \bar{p} を調整し購入者の望むリスクに合わせることによって EIA を契約することができることを示している。しかし、次の図で明らかのようにリスク回避的でない契約者に EIA を契約することは不採算なので、別のパラメーターの変更が必要である。

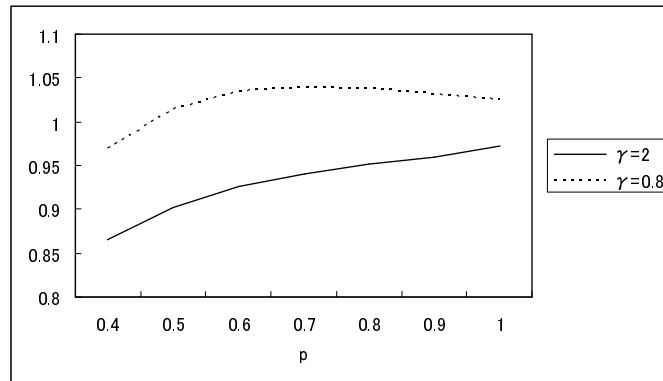


図 5.21: \bar{p} に対する割引期待支払額

図 5.21 では、 \bar{p} に対しての期待支払額を検証した。 \bar{p} の増加に伴って、期待支払額が増加した。これは、 \bar{p} が増加することによってインデックスの中の危険資産が増え、結果としてボラティリティがあがったため、解約・行使などの支払額が増えたためとである。

5.2.4 死亡保障のパラメーター \bar{d}

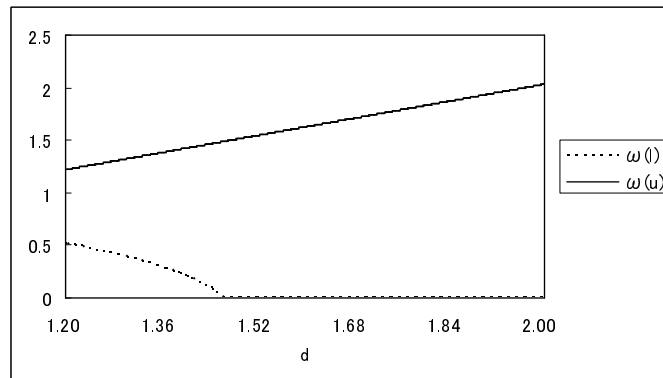


図 5.22: リスク回避的な場合の \bar{d} に関する解約の指標

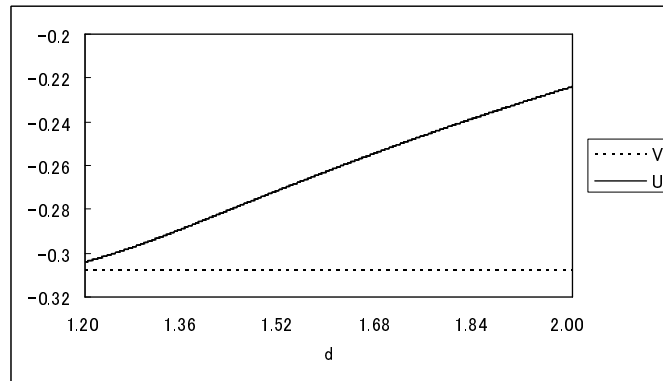


図 5.23: リスク回避的な場合の \bar{d} に関する効用

図 5.22・5.23 では契約者がリスク回避的な場合のパラメーター \bar{p} に対して検証を行った。 \bar{d} の増加に伴って、 ω_u, ω_l が増加している。さらに、死亡給付金が高くなると死亡給付金を目当てに資産が 0 になっても EIA を解約・行使しないと推定される。

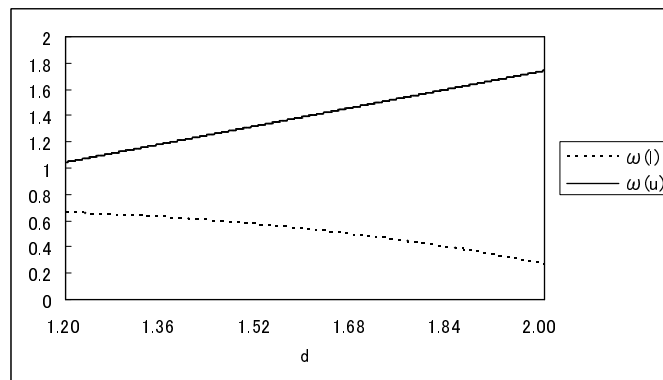


図 5.24: リスク回避的でない場合の \bar{d} に関する解約の指標

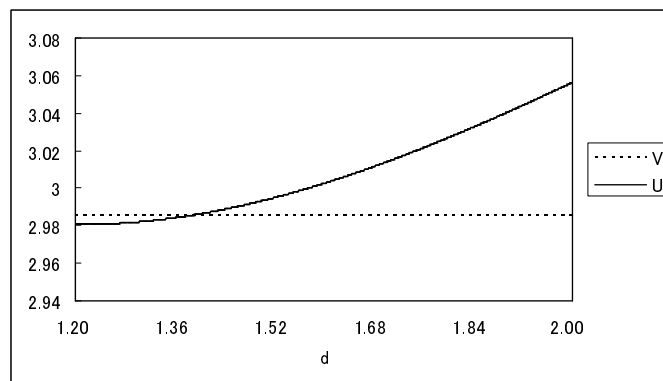


図 5.25: リスク回避的でない場合の \bar{d} に関する効用度

図 5.19・5.20 では契約者がリスク回避的な場合のパラメーター \bar{d} に対して検証を行ったリスク回避的な購入者の場合でも、同様な結果が得られる。

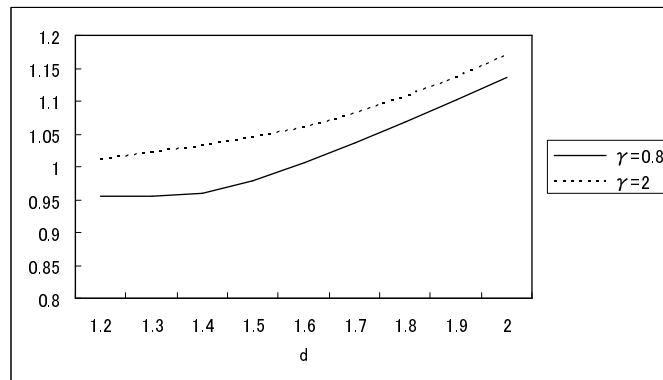


図 5.26: \bar{d} に関する割引期待支払額

図 5.26 は \bar{d} に関する期待支払額を検証した結果を示した。当然ながら \bar{d} の増加に伴って支払額も増加している。しかし、死力 λ との関連もあるが、支払額の増加額はほかのパラメーターに比べても増加の割合が少ない。

5.2.5 補償額のパラメーター \bar{s}

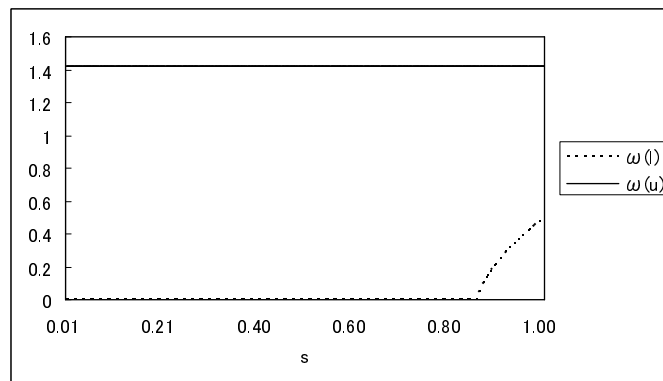


図 5.27: リスク回避的な場合の \bar{s} に関する解約の指標

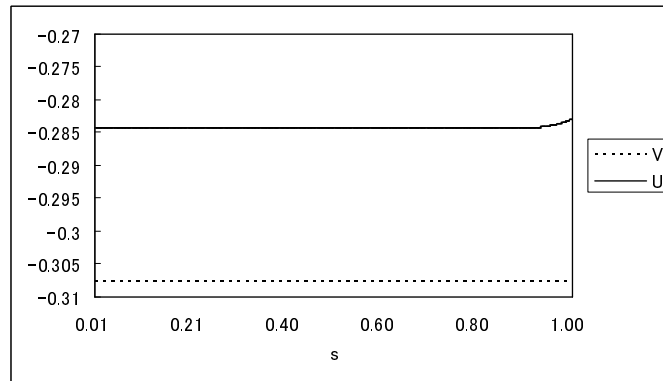


図 5.28: リスク回避的な場合の \bar{s} に関する効用度

図 5.27・5.28 では購入者がリスク回避的な場合のパラメーター \bar{s} に対して検証を行った。 $\bar{s} = 0.86$ まではパラメーターに変化が見られない。つまり $\bar{s} \geq 0.86$ と設定しても、EIA の商品に効果がまったく現れないという事がわかる。また、 \bar{s} の変化に ω_u がほとんど変化していない。これは、補償額がいくら上がっても利益確定の動きにはほとんど変化をもたらさないということである。

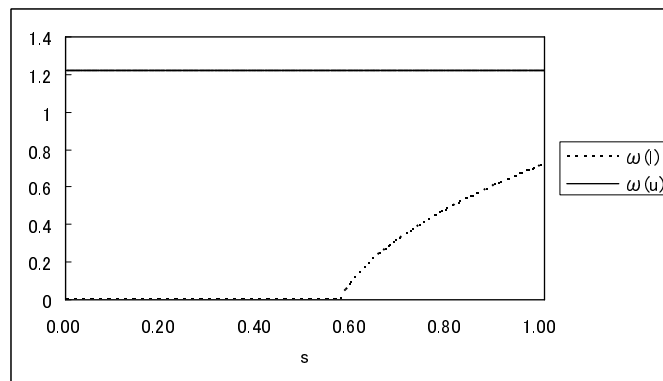


図 5.29: リスク回避的でない場合の \bar{s} に関する解約の指標

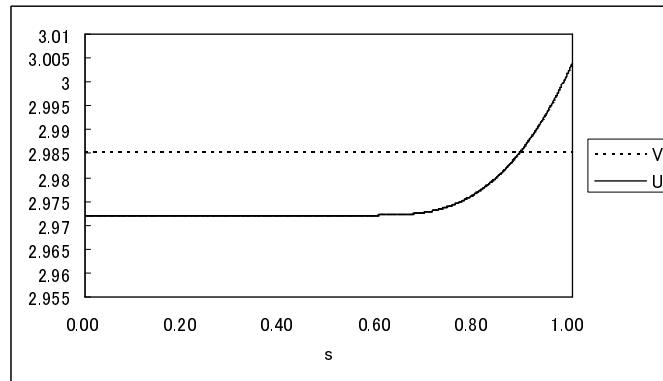


図 5.30: リスク回避的でない場合の \bar{s} に関する効用

図 5.29・5.30 では購入者がリスク回避的な場合のパラメーター \bar{s} に対して検証を行ったリスク回避的な購入者の場合でも、同様な結果が得られる。

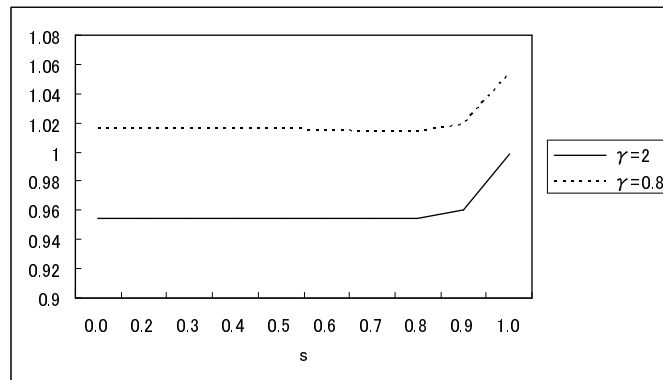


図 5.31: \bar{s} に関する割引期待支払額

図 5.31 の結果より、効果の無い \bar{s} を設定しても契約者にはなんら影響を与えないので支払額が変化することは無い。

5.2.6 一時払い手数料に課される手数料 f_0

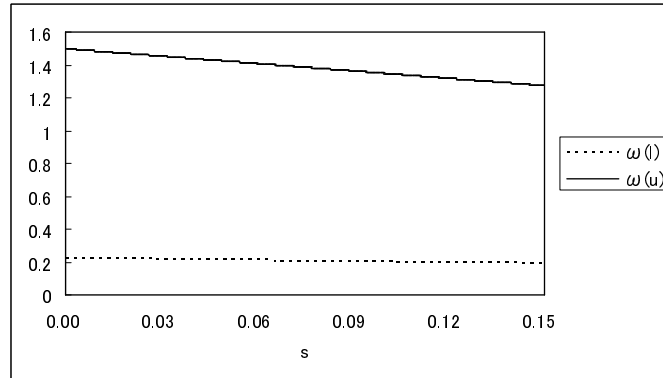


図 5.32: リスク回避的な場合の f_0 に関する解約の指標

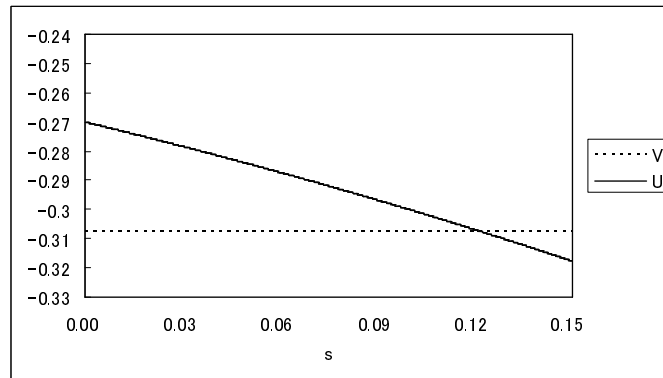


図 5.33: リスク回避的な場合の f_0 に関する効用度

図 5.32・5.33 では契約者がリスク回避的な場合のパラメーター f_0 に対して検証を行った。

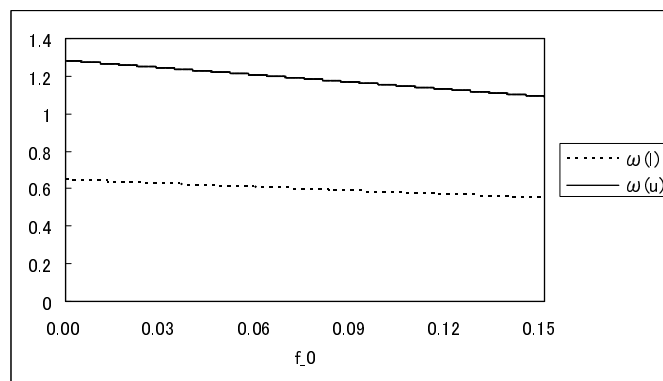


図 5.34: リスク回避的でない場合の f_0 に関する解約の指標

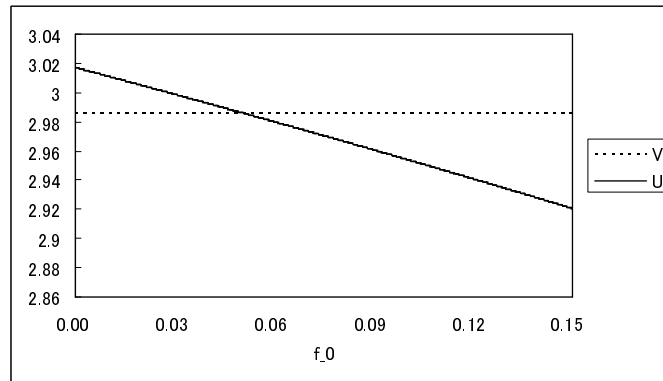


図 5.35: リスク回避的でない場合の f_0 に関する効用度

図 5.34・5.35 では契約者がリスク回避的な場合のパラメーター f_0 に対して検証を行った

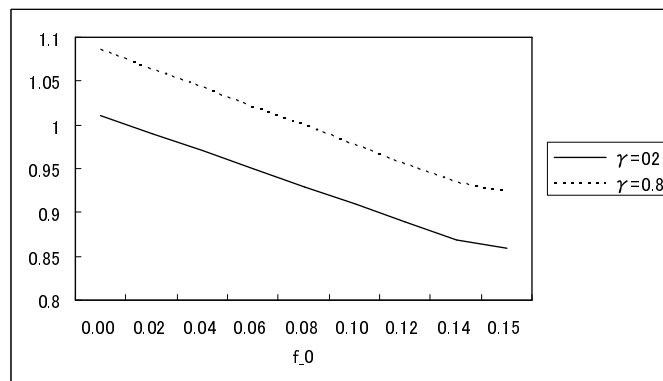


図 5.36: f_0 に関する割引期待支払額

f_0 の変化は、他のパラメーターに比べて支払額に大きな変化を与える。

5.2.7 手数料 f_a

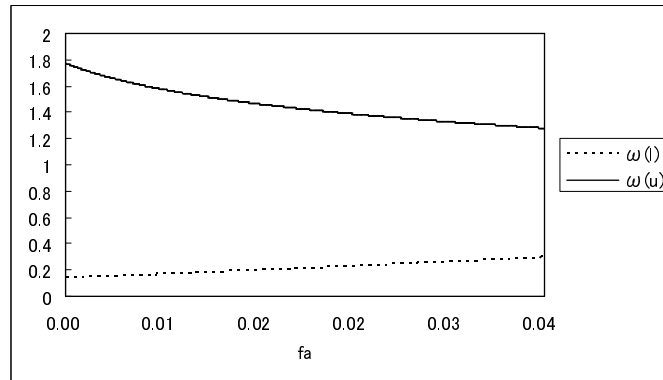


図 5.37: リスク回避的な場合の f_a に関する解約の指標

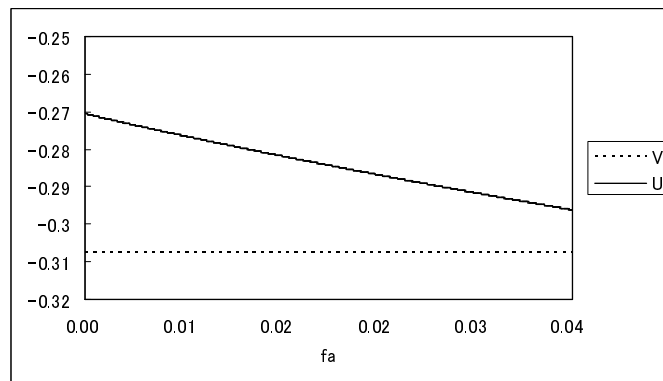


図 5.38: リスク回避的な場合の f_a に関する効用度

図 5.37・5.38 では契約者がリスク回避的な場合のパラメーター f_a に対して検証を行った。かなり高額の手数料 f_a を設定したとしても、リスク回避的な契約者に対して EIA の誘引があるということは注目すべき結果である。

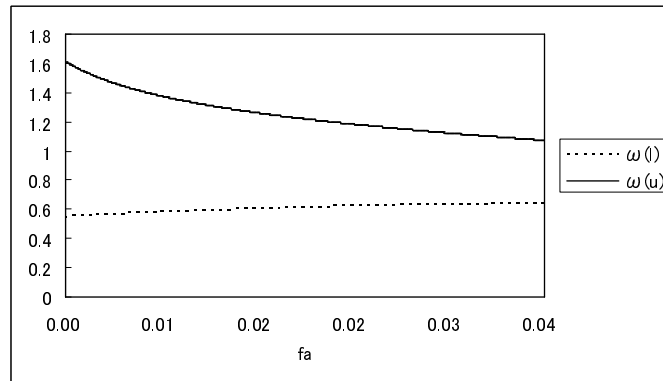


図 5.39: リスク回避的でない場合の f_a に関する解約の指標

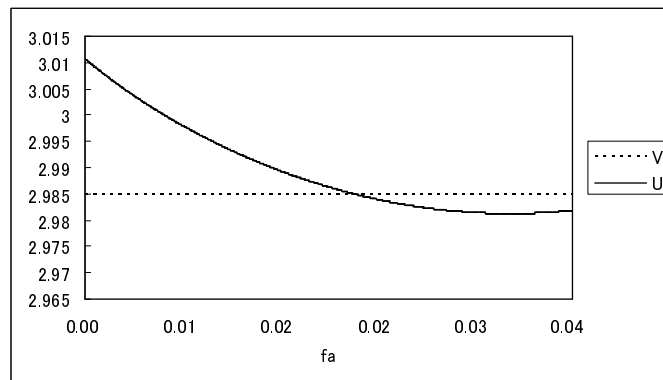


図 5.40: リスク回避的でない場合の f_a に関する効用度

図 5.39・5.40 では契約者がリスク回避的な場合のパラメーター f_a に対して検証を行ったリスク回避的でない契約者の場合でも、多少高額な手数料 f_a でも販売が可能ということは注目すべきである。

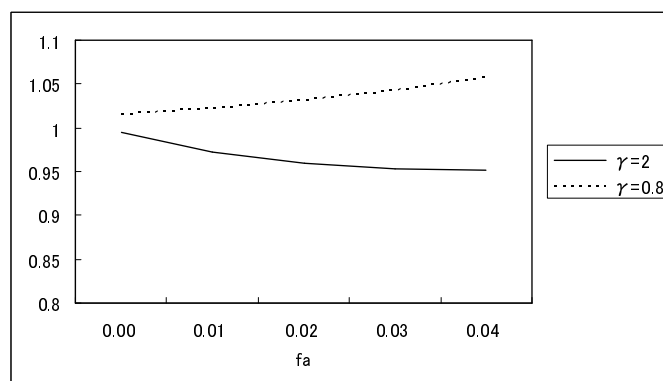


図 5.41: f_a に関する割引期待支払額

リスク回避的な契約者の場合は、手数料 f_a の増加に伴って支払額が減るが、リスク回避的でない契約者の場合は、逆に支払額が増加している。これは、リスク回避的でない契約者に利益確定の動きが強いためである。

6 結論

パラメーターの感度分析の結果、パラメーターに対して本論文のモデルは EIA の特徴を現しているように思われる。感度分析の結果より、死力を多めに設定した要因もあるがリスク回避的でない契約者には EIA は向いておらず、EIA を提供する保険会社としても向いているとは思えない結果がでた。EIA は年金保険の商品なので、リスク回避的でない契約者が進んで契約するとは思えないが、契約者同士の公平を期すためと、契約者に安定的に EIA を提供する観点から考えると、契約者の健康面よりも、年金保険を投機的な運用を目的とする契約者を認知することが重要のように思える。

また、 f_0 や f_a などの手数料は EIA に大きな影響を与え、保険会社が任意に決定できない無リスク資産の収益率 r や市場の収益率 μ とは違い、保険会社が任意に決定できるために、市場予測に合わせて厳密に決定する必要があり、モデルを使った推定がより重要なように思われる。

本論文では、EIA の設計において伝統的なアクチュアリーの方法の不適格さを指摘し、現実の世界に適合したモデルを提案するために、EIA の設計に解約・行使に注目して行うという当初の目的は達成できた。しかし、本論文のモデルを通じて、モデルは時間に依存していないと仮定したが、現実の問題としては時間に応じて死力は変化し、また時間に応じて解約違約金がかかるという問題がある。さらに、一般的には契約者が 90 歳に達した時には強制的に年金保険が行使されるという問題もあり、より精巧なモデルの提案が必要である。

さらに、本論文では遺族保険のように、契約者が死亡時に資産が最大化するような戦略をとると仮定したが、年金保険商品は生存保険であるため、死亡時に資産が最大化するという戦略には改良の余地が多い。

A Appendix 死力について

X を $P(X > 0)$ である連続確率変数とする。(本来 $X_{(i)}$ は n にも依存している)
 X に対して

$$\lambda_X(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < X < t + \Delta t | X > t)}{\Delta t}$$

となる $\lambda_X(t)$ を死力と呼ぶ。(金融工学では hazard rate)。ここで、 $t \geq 0$ とする。

意味は、 X を対象物の寿命としたとき、 t まで生きている確率。そのため、 t まで動いている機械が t と $t + \Delta t$ までの間に故障する確率が $\lambda_X(t)\Delta t$ となるものである。

X の確立分布について考察する。

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < X < t + \Delta t | X > t)}{\Delta t} &= \lambda_X(t) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < X < t + \Delta t)}{P(X > t)\Delta t} &= \lambda_X(t) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t(1 - F(t))} &= \lambda_X(t) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{1 - F(t)} &= \lambda_X(t) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{1 - F(t)} &= \lambda_X(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}(-\log(1 - F(t))) &= \lambda_X(t) \\ -\log(1 - F(t)) &= \int_0^t \lambda_X(s) ds \\ (1 - F(t)) &= e^{-\int_0^t \lambda_X(s) ds} \\ F(t) &= 1 - e^{-\int_0^t \lambda_X(s) ds} \end{aligned}$$

また、確率密度関数は以下になる

$$f_X(t) = \lambda_X(t)e^{-\int_0^t \lambda_X(s) ds}$$

次に、生存確率 ${}_t p_x$ (現在 x 歳の人がさらに t 年より多く生きる確率) を考える。

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= P(X > x + t | X > x) \\ &= \frac{1 - F(x + t)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{e^{-\int_0^{x+t} \lambda_X(s) ds}}{e^{-\int_0^x \lambda_X(s) ds}} \\ &= e^{-\int_x^{x+t} \lambda_X(s) ds} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} {}_t p_x &= \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\int_x^{x+t} \lambda_X(s) ds} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} {}_t q_x &= \lim_{t \rightarrow 0} 1 - e^{-\int_x^{x+t} \lambda_X(s) ds} \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{{}_tq_x}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\int_t^{x+t} \lambda_X(s) ds}}{t} \\ &= 0 + \lambda_X(t) * 1 \\ &= \lambda_X(t)\end{aligned}$$

となる。

B Appendix 相対的リスク回避率 (Constant relative risk aversion :CRRA)

効用関数 $u : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ を増加、凹、滑らかな関数とする。パラメーター ρ は個人の主観的な割引率になる。個人の主観的な割引率とは、大きい ρ の値はより利益を求める事を意味し、逆に少ない ρ の値はあまり利益を追従しないことを表している。またこの論文を通じて、効用関数は Constant Relative Risk Aversion(CRRA) を用いている。CRRA とは

$$-\frac{\omega u''(\omega)}{u'(\omega)}$$

が一定な効用関数である。(pratt 1964) CRRA は、アファイン変換で、 u は以下の累乗関数で与えられる。

$$u(\omega) = \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (\text{B.1})$$

(証明)

$$\begin{aligned} \text{CRRA} &= -\frac{\omega u''(\omega)}{u'(\omega)} \\ &= -\frac{\omega \cdot (-\gamma \omega^{-\gamma-1})}{\omega^{-\gamma}} \\ &= \gamma \end{aligned}$$

ここで、 $\gamma > 0, \gamma \neq 1$ とする。 $\gamma = 1$ という制限のあるケースは対数の効用関数と一致する。そしてそのケースは用意に扱うことができ、単純な実証のために、 $\gamma \neq 1$ と制限する。また死亡率の強度が λ で一定であると定義する。

C Appendix

ここでは、式 (2.3) がベルマン方程式を用いることによって、式 (2.4) で表すことができることを示す。まず V_s を導出する。

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{\partial}{\partial s} V \\ &= \frac{\partial}{\partial(\tau_d - t)} \sup_{\pi_s \in A} E[e^{-\rho(\tau_d - t)} u(W_{\tau_d}) | W_t = \omega] \\ &= -\rho V \end{aligned}$$

次に、方程式 (M.8) 契約期間中に利益がもたらされないことより

$$\begin{aligned} V(t, x) &\geq E_{t,x} \left[\int_t^{t+h} F(s, X_s^u, \mathbf{u}_s) ds + V(t+h, X_{t+h}^u) \right] \\ V(t, x) &\geq E_{t,x} [V(t+h, X_{t+h}^u)] \end{aligned}$$

上式を実際にベルマン方程式を用いて解いていく。

$$\begin{aligned} V(t, \omega) &\geq E[V(t+h, W_{t+h}) | W_t = \omega] \\ &\geq E_\omega \left[\sup_{\pi \in A} E[e^{-\rho(\tau_d - (t+h))} u(W_{\tau_d}) | W_t = \omega] \right] \\ &\geq E_\omega \left[\sup_{\pi \in A} E_\omega [e^{-\rho(\tau_d - (t+h))} u(W_{\tau_d}) \cdot 1_{\{\tau_d \geq t+h\}}] + \sup_{\pi \in A} E_\omega [e^{-\rho(t+h - (t+h))} u(W_{t+h}) \cdot 1_{\{\tau_d < t+h\}}] \right] \\ &\geq E_\omega [V(t+h, W_{t+h})] \cdot h p_{x+t} + \sup_{\pi \in A} E_\omega [u(W_{t+h})] \cdot h q_{x+t} \\ &\geq \{V(\omega, t) + E_\omega \left[\int_t^{t+h} dV(W_s, s) \right]\} \cdot p + \sup_{\pi \in A} E_\omega [u(W_{t+h})] \cdot q \\ V - V \cdot p &\geq E_\omega \left[\int_t^{t+h} V_s + r\omega V' + (\mu - r)\pi V' + \frac{1}{2}\sigma^2 \pi^2 V'' \right] \cdot p + \sup_{\pi \in A} E_\omega [u(W_{t+h})] \cdot q \\ q \cdot V &\geq E_\omega \left[\int_t^{t+h} V_s + r\omega V' + (\mu - r)\pi V' + \frac{1}{2}\sigma^2 \pi^2 V'' \right] \cdot p + q \cdot \sup_{\pi \in A} E_\omega [u(W_{t+h})] \\ \frac{q}{h} \cdot V &\geq \frac{1}{h} E_\omega \left[\int_t^{t+h} V_s + r\omega V' + (\mu - r)\pi V' + \frac{1}{2}\sigma^2 \pi^2 V'' \right] \cdot p + \frac{q}{h} \cdot \sup_{\pi \in A} E_\omega [u(W_{t+h})] \end{aligned}$$

ここで $h \rightarrow 0$ とする。($W_t = \omega$ という事に注意する)

$$\begin{aligned} \lambda \cdot V &\geq \{V_s + r\omega V' + (\mu - r)\pi V' + \frac{1}{2}\sigma^2 \pi^2 V''\} \cdot 1 + \lambda \cdot u(W_t) \\ \rho V &\geq r\omega V' + (\mu - r)\pi V' + \frac{1}{2}\sigma^2 \pi^2 V'' + \lambda[u(\omega) - V] \\ \rho V &= r\omega V' + \max_{\pi} [(\mu - r)\pi V' + \frac{1}{2}\sigma^2 \pi^2 V''] + \lambda[u(\omega) - V] \end{aligned}$$

よって、題意は満たされた。■

D Appendix

ここでは式 (3.3) を解くことによって、式 (3.4) で表すことができることを示す。
 まず、 dU を求める。ここで、 W のダイナミクスは方程式 (3.1) のダイナミクスを用いる。

$$\begin{aligned} dU &= U_s ds + U' dW_s + \frac{1}{2} U'' (dW_s)^2 \\ &= U_s ds + U' \{(\bar{p}\mu - g)W_s ds + \bar{p}\sigma W_s dW_s\} + \frac{1}{2} U'' \bar{p}^2 \sigma^2 W_s^2 ds \\ &= \{U_s + (\bar{p}\mu - g)W_s U' + \frac{1}{2} \bar{p}^2 \sigma^2 W_s^2 U''\} ds + \bar{p}\sigma W_s U' dW_s \end{aligned}$$

そして、方程式 (2.4) と同様に求めていく

$$\begin{aligned} U(\omega, t) &\geq E[U(W_{t+h}, t+h) | W_t = \omega] \\ &\geq E_\omega[U(W_{t+h}, t+h) \cdot 1_{\{\tau_d \geq t+h\}} + U(W_{t+h}, t+h) \cdot 1_{\{\tau_d < t+h\}}] \\ &\geq E_\omega[U(W_{t+h}, t+h) \cdot 1_{\{\tau_d \geq t+h\}} + e^{-\rho(t+h-(t+h))} u(D(W_{\tau_d}, \tau_d)) \cdot 1_{\{\tau_d < t+h\}}] \\ &\geq E_\omega\left[\int_t^{t+h} dV(W_s, s) \cdot p + E_\omega[u(D(W_{\tau_d}, \tau_d))] \cdot q\right] \\ &\geq E_\omega[U(\omega, t) + \int_t^{t+h} U_s + (\bar{p}\mu - g)W_s U' + \frac{1}{2} \bar{p}^2 \sigma^2 W_s^2 U'' ds + \int_t^{t+h} \bar{p}\sigma W_s U' dW_s] \cdot p \\ &\quad + E_\omega[u(D(W_{\tau_d}, \tau_d))] \cdot q \\ q \cdot U(\omega, t) &\geq E_\omega\left[\int_t^{t+h} U_s + (\bar{p}\mu - g)W_s U' + \frac{1}{2} \bar{p}^2 \sigma^2 W_s^2 U'' ds\right] \cdot p \\ &\quad + q \cdot E_\omega[u(D(W_{\tau_d}, \tau_d))] \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$ とする

$$\lambda \cdot U \geq \{U_s + (\bar{p}\mu - g)W_t U' + \frac{1}{2} \bar{p}^2 \sigma^2 W_t^2 U''\} \cdot 1 + \lambda \cdot u(D(W_{\tau_d}, \tau_d))$$

$$\lambda \cdot U \geq \{U_s + (\bar{p}\mu - g)\omega U' + \frac{1}{2} \bar{p}^2 \sigma^2 \omega^2 U''\} \cdot 1 + \lambda \cdot u(D(W_{\tau_d}, \tau_d))$$

$$U_s = -\rho U \text{ より}$$

$$\rho U \geq (\bar{p}\mu - g)\omega U' + \frac{1}{2} \bar{p}^2 \sigma^2 \omega^2 U'' + \lambda[u\{D(W_{\tau_d}, \tau_d)\} - U]$$

よって、題意は満たされた。■

E Appendix

定義 (B.1) より CRRA を以下に定義する。

$$u(\omega) = \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

次に、二つの関数 $H(t, x)$ と $g(t, x)$ が以下の条件を満たしていると定義する。

- CRRA を選ぶために、 $H(t, x)$ を以下に定義する。

$$H(t, \omega) := Au = A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

- 次に、 $H(t, \omega)$ は積分可能であり、そして以下のベルマン方程式の解を持つ。

$$r\omega H' + \max_k [(\mu - \gamma)kH' + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 H''] + \lambda[u(\omega) - H] = \rho H$$

- 関数 g は、全体の中で値をとりうる範囲の中の制御変数とする。
- 固定された時点 (t, x) のとき、以下の式の上極限は、 $k = g(t, x)$ を選ぶことで求まる。

$$\sup_{k \in K} \{(\mu - \gamma)kH' + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 H''\}$$

次に、 H を計算する。

$$\begin{aligned} H &= A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ H' &= A\omega^{-\gamma} \\ H'' &= -\gamma A\omega^{-\gamma-1} \end{aligned}$$

方程式 (2.6) より

$$\begin{aligned} k^* &= -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{H'}{H''} \\ &= -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{A\omega^{-\gamma}}{-\gamma A\omega^{-\gamma-1}} \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \omega \end{aligned}$$

また、計算を容易にするために、以下の定義する。

$$m := \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2}$$

以上の事より、 $H(t, \omega)$ を求める。

$$\rho H = r\omega H' + \max_k [(\mu - \gamma)kH' + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 H''] + \lambda[u(\omega) - H]$$

$$\rho H = r\omega H' + (\mu - \gamma)k^* H' + \frac{1}{2}\sigma^2 k^{*2} H'' + \lambda[u(\omega) - H]$$

$$\rho A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} = r\omega A \omega^{-\gamma} + (\mu - \gamma) \frac{1}{\gamma} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \omega A \omega^{-\gamma} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{1}{\gamma} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \omega^2 - \gamma A \omega^{-\gamma-1} + \lambda \left[\frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} - A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]$$

$$-\lambda \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} = r\omega^{1-\gamma} A + \frac{1}{\gamma} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \omega^{1-\gamma} A - \frac{1}{\gamma} \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \omega^{1-\gamma} A - \lambda A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \rho A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$-\lambda \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} = r\omega^{1-\gamma} A + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \omega^{1-\gamma} A - (\lambda + \rho) \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} A$$

$$-\lambda \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \left\{ r + \frac{m}{\gamma} - (\lambda + \rho)/(1-\gamma) \right\} \omega^{1-\gamma} A$$

両辺に $\frac{1-\gamma}{\omega^{1-\gamma}}$ をかける。

$$\left\{ \left(r + \frac{m}{\gamma} \right) (1-\gamma) (\lambda + \rho) \right\} A = -\lambda$$

$$A = \frac{\lambda}{\rho + \lambda - (r + m/\gamma)(1-\gamma)}$$

定理より、 $H(t, \omega) = V(t, \omega)$ 。よって、題意が成り立つ。■

F Appendix

方程式 (2.9) によって与えられる $A > 0$ は方程式 (2.4) の境界条件と同じ事である。つまり以下のようになる。

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-(\rho+\lambda)(s-t)} E[V(W_s^*) | W_t = \omega] = 0$$

もし、資産過程 (2.2) の中に、最適な投資戦略 (2.10) を代入すると、以下の式が導出される。

$$dW_s = \left(r + \frac{2m}{\gamma}\right) W_s^* + \frac{\sqrt{2m}}{\gamma} W_s^* dB_s$$

(証明)

$$\begin{aligned} dW_s^* &= (rW_s^* + (\mu - r)\pi_s^*) ds + \sigma\pi_s^* dB_s \\ &= \left(r + \frac{1}{\gamma} \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right) W_s^* ds + \frac{1}{\gamma} \frac{\mu-r}{\sigma} W_s^* dB_s \\ &= \left(r + \frac{2m}{\gamma}\right) W_s^* ds + \frac{\sqrt{2m}}{\gamma} W_s^* dB_s \quad \blacksquare \end{aligned}$$

W_s^* は幾何ブラウン運動であること、 $W_t = \omega$ であることより、以下がもとまる

$$W_s^* = \omega \exp\left[\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(s-t) + \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(B_s - B_t)\right]$$

(証明)

$$\begin{aligned} d \log W_s^* &= \frac{1}{W_s^*} dW_s^* - \frac{1}{2} \frac{1}{(W_s^*)^2} (dW_s^*)^2 \\ &= \frac{1}{W_s^*} \left\{ \left(r + \frac{2m}{\gamma}\right) W_s^* ds + \frac{\sqrt{2m}}{\gamma} W_s^* dB_s \right\} - \frac{1}{2} \frac{1}{W_s^*} \left(\frac{2m}{\gamma^2} W_s^{*2} ds\right) \\ &= \left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right) ds + \frac{\sqrt{2m}}{\gamma} dB_s \end{aligned}$$

$t \leq s$ とする

$$\begin{aligned} \log W_s^* - \log W_t^* &= \int_t^s \left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right) du + \int_t^s \frac{\sqrt{2m}}{\gamma} dB_u \\ \log W_s^* &= \log W_t^* + \left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(s-t) + \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(B_s - B_t) \\ W_s^* &= \omega \exp\left\{\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(s-t) + \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(B_s - B_t)\right\} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

よって、 $W_t = \omega$ のとき以下の式になる

$$V(W_s^*) = A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \exp\left[\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(1-\gamma)(s-t) + \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(1-\gamma)(B_s - B_t)\right]$$

(証明)

$$\begin{aligned} V(W_s^*) &= A \frac{W_s^{*1-\gamma}}{1-\gamma} \\ &= A \frac{1}{1-\gamma} \left[\omega \exp\left\{\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(s-t) + \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(B_s - B_t)\right\}\right]^{1-\gamma} \\ &= A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left[\exp\left\{\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(1-\gamma)(s-t) + \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(1-\gamma)(B_s - B_t)\right\}\right] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

以上の結果より、以下の式を満たす。

$$\begin{aligned}
& \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-(\rho+\lambda)(s-t)} E[V(W_s^*)|W_t = \omega] \propto \\
& \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-(\rho+\lambda)(s-t)} \frac{A}{1-\gamma} \exp\left\{\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(1-\gamma)(s-t) + \frac{m}{\gamma^2}(1-\gamma)^2(s-t)\right\} \\
& = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A}{1-\gamma} \exp\left[-\frac{\lambda}{A}(s-t)\right]
\end{aligned} \tag{F.1}$$

(証明)

$$\begin{aligned}
E[V(W_s^*)|W_t = \omega] &= E_\omega\left[A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left[\exp\left\{\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(1-\gamma)(s-t) + \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(1-\gamma)(B_s - B_t)\right\}\right]\right] \\
&= A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \exp\left\{\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(1-\gamma)(s-t)\right\} \cdot E_\omega\left[\exp\left[\frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(1-\gamma)(B_s - B_t)\right]\right]
\end{aligned}$$

ここで $E_\omega[\exp[\frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(1-\gamma)(B_s - B_t)]]$ の部分だけ計算する。

ここで $(B_s - B_t) := x$ とする。 $(B_s - B_t) \sim N(0, s-t)$ より

$$\begin{aligned}
& E_\omega\left[\exp\left[\frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(1-\gamma)(B_s - B_t)\right]\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(1-\gamma)x\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(s-t)}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(s-t)} + \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(1-\gamma)x\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} \exp\left(-\frac{1}{2(s-t)} \left\{x - \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(1-\gamma)(s-t)\right\}^2 - \frac{2m}{\gamma^2}(1-\gamma)^2(s-t)^2\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} \exp\left(-\frac{1}{2(s-t)} \left\{x - \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(1-\gamma)(s-t)\right\}^2\right) dx \cdot \exp\left\{\frac{m}{\gamma^2}(1-\gamma)^2(s-t)\right\}
\end{aligned}$$

ここで $\nu := x - \frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(1-\gamma)(s-t)$ とする

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2(s-t)}\right) d\nu \cdot \exp\left\{\frac{m}{\gamma^2}(1-\gamma)^2(s-t)\right\} \\
&= 1 \cdot \exp\left\{\frac{m}{\gamma^2}(1-\gamma)^2(s-t)\right\}
\end{aligned}$$

よって $E[V(W_s^*)|W_t = \omega]$ は

$$\begin{aligned}
E[V(W_s^*)|W_t = \omega] &= A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \exp\left\{\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(1-\gamma)(s-t)\right\} \cdot E_\omega\left[\exp\left[\frac{\sqrt{2m}}{\gamma}(1-\gamma)(B_s - B_t)\right]\right] \\
&= A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \exp\left\{\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(1-\gamma)(s-t)\right\} \cdot \exp\left\{\frac{m}{\gamma^2}(1-\gamma)^2(s-t)\right\} \\
&= A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \exp\left\{\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(1-\gamma)(s-t) + \frac{m}{\gamma^2}(1-\gamma)^2(s-t)\right\}
\end{aligned}$$

よって $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-(\rho+\lambda)(s-t)} E[V(W_s^*)|W_t = \omega]$ は以下の式で表せる。

$$\begin{aligned}
& \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-(\rho+\lambda)(s-t)} E[V(W_s^*)|W_t = \omega] \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \exp\left\{\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(1-\gamma)(s-t) + \frac{m}{\gamma^2}(1-\gamma)^2(s-t)\right\} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

この式は明らかに (F.1) に比例する。なぜなら、(F.1) を $\omega^{1-\gamma}$ 倍すれば上式になる。さらに、(F.1) を説くと以下の式になる。

$$\begin{aligned}
& \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-(\rho+\lambda)(s-t)} \frac{A}{1-\gamma} \exp\left\{\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2}\right)(1-\gamma)(s-t) + \frac{m}{\gamma^2}(1-\gamma)^2(s-t)\right\} \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A}{1-\gamma} \exp\left[\left\{\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m}{\gamma^2} + \frac{m(1-\gamma)}{\gamma^2}\right)(1-\gamma) - (\rho+\lambda)\right\}(s-t)\right] \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A}{1-\gamma} \exp\left[\left\{\left(r + \frac{2m}{\gamma} - \frac{m\gamma}{\gamma^2}\right)(1-\gamma) - (\rho+\lambda)\right\}(s-t)\right] \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A}{1-\gamma} \exp\left[\left\{\left(r + \frac{m}{\gamma}\right)(1-\gamma) - (\rho+\lambda)\right\}(s-t)\right] \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A}{1-\gamma} \exp\left[-\left\{(\rho+\lambda) - \left(r + \frac{m}{\gamma}\right)(1-\gamma)\right\}(s-t)\right] \\
A &= \frac{\lambda}{\rho + \lambda - \left(r + \frac{m}{\gamma}(1-\gamma)\right)} \text{ より} \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A}{1-\gamma} \exp\left[-\frac{\lambda}{A}(s-t)\right]
\end{aligned}$$

以上より、題意は満たされた。■

G Appendix

まず、 $0 < \omega < \bar{d}\omega_0$ について解く。

- まず、関数 $U(\omega)$ を以下に定義する。

$$U(\omega) := C_1\omega^{a_1} + C_2\omega^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

- 次に、関数 $U(\omega)$ は以下のベルマン方程式の解を持っていて最適であるとする。

$$(\rho + \lambda)U = (\bar{p}\mu - f_a)\omega U' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 U'' + \lambda \frac{(\max\{\bar{d}\omega_0, \omega\})^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$0 < \omega < \bar{d}\omega_0$ より

$$(\rho + \lambda)U = (\bar{p}\mu - f_a)\omega U' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 U'' + \lambda \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

以上の事より、 $H(t, \omega)$ を求める。

$$U = C_1\omega^{a_1} + C_2\omega^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$U' = C_1 a_1 \omega^{a_1-1} + C_2 a_2 \omega^{a_2-1}$$

$$U'' = C_1 a_1 (a_1 - 1) \omega^{a_1-2} + C_2 a_2 (a_2 - 1) \omega^{a_2-2}$$

$$(\rho + \lambda)U = (\bar{p}\mu - f_a)\omega U' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 U'' + \lambda \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$(\rho + \lambda)\{C_1\omega^{a_1} + C_2\omega^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\} = (\bar{p}\mu - f_a)\omega\{C_1 a_1 \omega^{a_1-1} + C_2 a_2 \omega^{a_2-1}\}$$

$$+ \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2\{C_1 a_1 (a_1 - 1) \omega^{a_1-2} + C_2 a_2 (a_2 - 1) \omega^{a_2-2}\} + \lambda \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$(\rho + \lambda)\{C_1\omega^{a_1} + C_2\omega^{a_2}\} =$$

$$(\bar{p}\mu - f_a)\{C_1 a_1 \omega^{a_1} + C_2 a_2 \omega^{a_2}\} + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\{C_1 a_1 (a_1 - 1) \omega^{a_1} + C_2 a_2 (a_2 - 1) \omega^{a_2}\}$$

ω^{a_1} の項についてまとめると

$$(\rho + \lambda)C_1\omega^{a_1} = (\bar{p}\mu - f_a)C_1 a_1 \omega^{a_1} + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 C_1 a_1 (a_1 - 1) \omega^{a_1}$$

$$\frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 a_1^2 + (\bar{p}\mu - f_a - \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2) a_1 - (\rho + \lambda) = 0$$

よって、 a_1 が方程式 (3.8) の解であることがわかる。 a_2 も同様にして求められる。

次に、 $\omega \geq \bar{d}\omega_0$ について解く。

- まず、関数 $U(\omega)$ を以下に定義する。

$$U(\omega) := \tilde{C}_1\omega^{a_1} + \tilde{C}_2\omega^{a_2} + \tilde{A} \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

- 次に、関数 $U(\omega)$ は以下の HJB 方程式の解を持っていて、最適であるとする。

$$(\rho + \lambda)U = (\bar{p}\mu - f_a)\omega U' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 U'' + \lambda \frac{(\max\{\bar{d}\omega_0, \omega\})^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$\omega \geq \bar{d}\omega_0$ より

$$(\rho + \lambda)U = (\bar{p}\mu - f_a)\omega U' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 U'' + \lambda \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

以上のことを踏まえて、 U を解く。

$$\begin{aligned} U &= \tilde{C}_1 \omega^{a_1} + \tilde{C}_2 \omega^{a_2} + \tilde{A} \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ U' &= \tilde{C}_1 \omega^{a_1} + \tilde{C}_2 \omega^{a_2} + \tilde{A} \omega^{-\gamma} \\ U'' &= \tilde{C}_1 a_1 (a_1 - 1) \omega^{a_1-2} + \tilde{C}_2 a_2 (a_2 - 1) \omega^{a_2-2} - \gamma \tilde{A} \omega^{-\gamma-1} \end{aligned}$$

U の定義より

$$\begin{aligned} (\rho + \lambda)U &= (\bar{p}\mu - f_a)\omega U' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 U'' + \lambda \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ (\rho + \lambda)\{\tilde{C}_1 \omega^{a_1} + \tilde{C}_2 \omega^{a_2} + \tilde{A} \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma}\} &= \\ &(\bar{p}\mu - f_a)\omega\{\tilde{C}_1 \omega^{a_1} + \tilde{C}_2 \omega^{a_2} + \tilde{A} \omega^{-\gamma}\} + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2\{\tilde{C}_1 a_1 (a_1 - 1)\omega^{a_1-2} \\ &+ \tilde{C}_2 a_2 (a_2 - 1)\omega^{a_2-2} - \gamma \tilde{A} \omega^{-\gamma-1}\} + \lambda \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \end{aligned}$$

a_1 と a_2 は、 ω^{a_1} と ω^{a_2} の項に注目すると、 $0 < \omega < \bar{d}\omega_0$ の場合と全く同じ式になり、同様の答えが求まる。
次に、 ω^{a_1} と ω^{a_2} の項以外に注目する。

$$\begin{aligned} (\rho + \lambda)\tilde{A} \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} &= (\bar{p}\mu - f_a)\omega \tilde{A} \omega^{-\gamma} - \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 \gamma \tilde{A} \omega^{-\gamma-1} + \lambda \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ (\rho + \lambda)\tilde{A} \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} &= \{(\bar{p}\mu - f_a) - \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\gamma\}\tilde{A} \omega^{1-\gamma} + \lambda \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ (\rho + \lambda)\tilde{A} &= \{(\bar{p}\mu - f_a)(1-\gamma) - \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\gamma(1-\gamma)\}\tilde{A} + \lambda \\ \tilde{A} &= \frac{\lambda}{\rho + \lambda - (\bar{p}\mu - f_a)(1-\gamma) + \bar{p}^2\sigma^2\gamma(1-\gamma)/2} \end{aligned}$$

H Appendix

方程式 (3.11) は以下を意味する

$$C_1\omega_l^{a_1} + C_2\omega_l^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} = A \frac{(\bar{s}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (\text{H.1})$$

(証明)

$0 < \omega_l < \bar{d}\omega_0$ かつ方程式 (3.7) より

$$U(\omega_l) = C_1\omega^{a_1} + C_2\omega^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

(2.8) より

$$V(\omega) = A \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$V(\bar{s}\omega_0) = A \frac{(\bar{s}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$U(\omega_l) = V(\bar{s}\omega_0)$$

$$C_1\omega^{a_1} + C_2\omega^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} = A \frac{(\bar{s}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \blacksquare$$

そして、(3.12) の左の方程式は以下を意味する。

$$C_1a_1\omega_l^{a_1} + C_2a_2\omega_l^{a_2} = 0 \quad (\text{H.2})$$

(証明)

$$U'(\omega_l) = 0$$

$$U(\omega_l) = C_1\omega^{a_1} + C_2\omega^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$U'(\omega_l) = C_1a_1\omega_l^{a_1-1} + C_2a_2\omega_l^{a_2-1} = 0$$

$$= C_1a_1\omega_l^{a_1} + C_2a_2\omega_l^{a_2} = 0 \quad \blacksquare$$

C_1 と C_2 を導出するために、方程式 (H.1) と (H.2) を解く。

まず C_1 を導出する

$$C_1 = -\frac{a_2}{a_1 - a_2} \frac{\omega_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left(A\bar{s}^{1-\gamma} - \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \bar{d}^{1-\gamma} \right) \omega_l^{-a_1} \quad (\text{H.3})$$

(証明)

まず (H.2) より、以下を求める

$$C_1 a_1 \omega_l^{a_1} + C_2 a_2 \omega_l^{a_2} = 0$$

$$C_2 = -C_1 \frac{a_1 \omega_l^{a_1}}{a_2 \omega_l^{a_2}}$$

次に (H.1) より

$$\begin{aligned} C_1 \omega_l^{a_1} + C_2 \omega_l^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} &= A \frac{(\bar{s}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ C_1 \omega_l^{a_1} + C_2 \omega_l^{a_2} &= A \frac{(\bar{s}\omega_0)^{(1-\gamma)}}{1-\gamma} - \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{(1-\gamma)}}{1-\gamma} \\ C_1 \omega_l^{a_1} - C_1 \frac{a_1}{a_2} \omega_l^{a_1} &= \frac{\omega_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} (A\bar{s}^{(1-\gamma)} - \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \bar{d}^{(1-\gamma)}) \\ C_1 \left(\frac{a_2 - a_1}{a_2}\right) \omega_l^{a_1} &= \frac{\omega_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} (A\bar{s}^{(1-\gamma)} - \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \bar{d}^{(1-\gamma)}) \\ C_1 &= -\frac{a_2}{a_1 - a_2} \frac{\omega_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} (A\bar{s}^{1-\gamma} - \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \bar{d}^{1-\gamma}) \omega_l^{-a_1} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

同様 C_2 を導出する

$$C_2 = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \frac{\omega_0^{(1-\gamma)}}{1-\gamma} (A\bar{s}^{(1-\gamma)} - \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \bar{d}^{(1-\gamma)}) \omega_l^{-a_2} \quad (\text{H.4})$$

次に、方程式 (3.11) の右側の項は以下ようになる。

$$\tilde{C}_1 \omega_u^{a_1} + \tilde{C}_2 \omega_u^{a_2} + \tilde{A} \frac{\omega_u^{(1-\gamma)}}{1-\gamma} = A \frac{\omega_u^{(1-\gamma)}}{1-\gamma} \quad (\text{H.5})$$

(証明)

まず、(3.7) と $\omega_u \geq \bar{d}\omega_0$ より

$$U(\omega_u) = \tilde{C}_1 \omega_u^{a_1} + \tilde{C}_2 \omega_u^{a_2} + \tilde{A} \frac{\omega_u^{(1-\gamma)}}{1-\gamma}$$

次に

$$V(\omega) = A \frac{\omega^{(1-\gamma)}}{1-\gamma}$$

$$V(\omega_u) = A \frac{\omega_u^{(1-\gamma)}}{1-\gamma}$$

方程式 (3.11) の右側より

$$U(\omega_u) = V(\omega_u)$$

$$\tilde{C}_1 \omega_u^{a_1} + \tilde{C}_2 \omega_u^{a_2} + \tilde{A} \frac{\omega_u^{(1-\gamma)}}{1-\gamma} = A \frac{\omega_u^{(1-\gamma)}}{1-\gamma} \quad \blacksquare$$

一方で、方程式 (3.12) の右側は以下のように示せる。

$$\tilde{C}_1 a_1 \omega_u^{a_1} + \tilde{C}_2 a_2 \omega_u^{a_2} + \tilde{A} \omega_u^{1-\gamma} = A \omega_u^{1-\gamma} \quad (\text{H.6})$$

(証明)

方程式 (3.12) の右側と、方程式 (H.5) より

$$\begin{aligned} U'(\omega_u) &= V'(\omega_u) \\ \tilde{C}_1 a_1 \omega_u^{a_1-1} + \tilde{C}_2 a_2 \omega_u^{a_2-1} + \tilde{A} \omega_u^{1-\gamma} &= A \omega_u^{-\gamma} \\ \tilde{C}_1 a_1 \omega_u^{a_1} + \tilde{C}_2 a_2 \omega_u^{a_2} + \tilde{A} \omega_u^{1-\gamma} &= A \omega_u^{1-\gamma} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

\tilde{C}_1 を導出するために、方程式 (H.5)(H.6) を解く。

$$\tilde{C}_1 = -\frac{A - \tilde{A}}{a_1 - a_2} \left(\frac{a_2}{1 - \gamma} - 1 \right) \omega_u^{1-\gamma-a_1} \quad (\text{H.7})$$

(証明)

方程式 (H.6) より

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 a_1 \omega_u^{a_1} + \tilde{C}_2 a_2 \omega_u^{a_2} + \tilde{A} \omega_u^{1-\gamma} &= A \omega_u^{1-\gamma} \\ \tilde{C}_2 &= \frac{1}{a_2} (A - \tilde{A}) \omega_u^{1-\gamma-a_2} - \tilde{C}_1 \frac{a_1}{a_2} \omega_u^{a_1-a_2} \end{aligned}$$

方程式 (H.5) より

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 \omega_u^{a_1} + \tilde{C}_2 \omega_u^{a_2} + \tilde{A} \frac{\omega_u^{(1-\gamma)}}{1-\gamma} &= A \frac{\omega_u^{(1-\gamma)}}{1-\gamma} \\ \tilde{C}_1 \omega_u^{a_1} + \frac{1}{a_2} (A - \tilde{A}) \omega_u^{1-\gamma} - \tilde{C}_1 \frac{a_1}{a_2} \omega_u^{a_1} &= (A - \tilde{A}) \frac{\omega_u^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ \left(\frac{a_2 - a_1}{a_2} \right) \tilde{C}_1 \omega_u^{a_1} &= (A - \tilde{A}) \left(\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{a_2} \right) \omega_u^{1-\gamma} \\ \tilde{C}_1 &= \frac{A - \tilde{A}}{a_2 - a_1} \left(\frac{a_2}{1-\gamma} - 1 \right) \omega_u^{1-\gamma-a_1} \\ \tilde{C}_1 &= -\frac{A - \tilde{A}}{a_1 - a_2} \left(\frac{a_2}{1-\gamma} - 1 \right) \omega_u^{1-\gamma-a_1} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

同様に \tilde{C}_2 を導出する。

$$\tilde{C}_2 = \frac{A - \tilde{A}}{a_1 - a_2} \left(\frac{a_1}{1-\gamma} - 1 \right) \omega_u^{1-\gamma-a_2} \quad (\text{H.8})$$

次に、方程式 (3.13) を用いて、 \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 を以下のように表す。

$$\tilde{C}_1 = C_1 - \left[\frac{a_2}{1-\gamma} \left(\frac{\lambda}{\rho + \lambda} - \tilde{A} \right) + \tilde{A} \right] \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma-a_1}}{a_1 - a_2} \quad (\text{H.9})$$

$$\tilde{C}_2 = C_2 + \left[\frac{a_1}{1-\gamma} \left(\frac{\lambda}{\rho + \lambda} - \tilde{A} \right) + \tilde{A} \right] \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma-a_2}}{a_1 - a_2} \quad (\text{H.10})$$

(証明)

方程式 (3.7)、 $(\bar{d}\omega_0-) = \omega < \bar{d}\omega_0$ より

$$U(\omega) = C_1\omega^{a_1} + C_2\omega^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$U(\omega)' = C_1a_1\omega^{a_1-1} + C_2a_2\omega^{a_2-2}$$

同様に、 $(\bar{d}\omega_0+) = \omega \geq \bar{d}\omega_0$ より

$$U(\omega) = \tilde{C}_1\omega^{a_1} + \tilde{C}_2\omega^{a_2} + \tilde{A} \frac{\omega^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$U(\omega)' = \tilde{C}_1a_1\omega^{a_1-1} + \tilde{C}_2a_2\omega^{a_2-1} + \tilde{A}\omega^{-\gamma}$$

方程式 (3.13) の左辺より

$$U(\bar{d}\omega_0-) = U(\bar{d}\omega_0+)$$

$$C_1(\bar{d}\omega_0-)^{a_1} + C_2(\bar{d}\omega_0-)^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{(\bar{d}\omega_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \tilde{C}_1(\bar{d}\omega_0+)^{a_1} + \tilde{C}_2(\bar{d}\omega_0+)^{a_2} + \tilde{A} \frac{(\bar{d}\omega_0+)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

ここで $\bar{d}\omega_0- = \bar{d}\omega_0+ = \bar{d}\omega_0 := k$ とする

$$C_1k^{a_1} + C_2k^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{k^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \tilde{C}_1k^{a_1} + \tilde{C}_2k^{a_2} + \tilde{A} \frac{k^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

同様に方程式 (3.13) の右辺を求める

$$U'(\bar{d}\omega_0-) = U'(\bar{d}\omega_0+)$$

$$\rightarrow C_1a_1k^{a_1-1} + C_2a_2k^{a_2-1} = \tilde{C}_1a_1k^{a_1-1} + \tilde{C}_2a_2k^{a_2-1} + \tilde{A}k^{-\gamma}$$

以上二つの方程式を解くことによって \tilde{C}_1 を導出する

$$C_1a_1k^{a_1-1} + C_2a_2k^{a_2-1} = \tilde{C}_1a_1k^{a_1-1} + \tilde{C}_2a_2k^{a_2-1} + \tilde{A}k^{-\gamma}$$

$$\rightarrow C_1a_1k^{a_1} + C_2a_2k^{a_2} = \tilde{C}_1a_1k^{a_1} + \tilde{C}_2a_2k^{a_2} + \tilde{A}k^{1-\gamma}$$

$$\rightarrow C_2a_2k^{a_2} = (\tilde{C}_1 - C_1)a_1k^{a_1} + \tilde{C}_2a_2k^{a_2} + \tilde{A}k^{1-\gamma}$$

$$\rightarrow C_2k^{a_2} = \frac{a_1}{a_2}(\tilde{C}_1 - C_1)k^{a_1} + \tilde{C}_2k^{a_2} + \frac{1}{a_2}\tilde{A}k^{1-\gamma}$$

$$C_1k^{a_1} + C_2k^{a_2} + \frac{\lambda}{\rho + \lambda} \frac{k^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \tilde{C}_1k^{a_1} + \tilde{C}_2k^{a_2} + \tilde{A} \frac{k^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$C_1k^{a_1} + \frac{a_1}{a_2}(\tilde{C}_1 - C_1)k^{a_1} + \tilde{C}_2k^{a_2} + \frac{1}{a_2}\tilde{A}k^{1-\gamma} = \tilde{C}_1k^{a_1} + \tilde{C}_2k^{a_2} - \left(\frac{\lambda}{\rho + \lambda} - \tilde{A}\right) \frac{k^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$\frac{a_1 - a_2}{a_2}\tilde{C}_1k^{a_1} - \frac{a_1 - a_2}{a_2}C_1k^{a_1} = -\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\lambda}{\rho + \lambda} - \tilde{A}\right) + \frac{\tilde{A}}{a_2}\right\}k^{1-\gamma}$$

$$\tilde{C}_1 - C_1 = -\left[\frac{a_2}{1-\gamma}\left(\frac{\lambda}{\rho + \lambda} - \tilde{A}\right) + \tilde{A}\right] \frac{k^{1-\gamma-a_1}}{a_1 - a_2}$$

$$\tilde{C}_1 = C_1 - \left[\frac{a_2}{1-\gamma}\left(\frac{\lambda}{\rho + \lambda} - \tilde{A}\right) + \tilde{A}\right] \frac{k^{1-\gamma-a_1}}{a_1 - a_2}$$

$\bar{d}\omega_0 = k$ より

$$\tilde{C}_1 = C_1 - \left[\frac{a_2}{1-\gamma}\left(\frac{\lambda}{\rho + \lambda} - \tilde{A}\right) + \tilde{A}\right] \frac{\bar{d}\omega_0^{1-\gamma-a_1}}{a_1 - a_2}$$

同様に方程式 (H.10) も求める ■

方程式 (H.9) に方程式 (3.14) の C_1 、方程式 (H.7) の \tilde{C}_1 を代入する事で、以下を導出する。

$$\left(\frac{\omega_u}{\omega_l}\right)^{a_1} = \frac{1}{a_2 A(\bar{s})^{1-\gamma} - \frac{\lambda}{\rho+\lambda}(\bar{d})^{1-\gamma}} \quad (\text{H.11})$$

$$\times \left\{ (A - \tilde{A})(a_2 - (1 - \gamma)) \left(\frac{\omega_u}{\omega_0}\right)^{1-\gamma} - \left[a_2 \left(\frac{\lambda}{\rho + \lambda} - \tilde{A}\right) + \tilde{A}(1 - \gamma) \right] (\bar{d})^{1-\gamma-a_1} \left(\frac{\omega_u}{\omega_0}\right)^{a_1} \right\} \quad (\text{H.12})$$

同様に、方程式 (H.8) に方程式 (H.7) の C_1 、方程式 (3.14) の \tilde{C}_1 を代入する事で、以下を導出する。

$$\left(\frac{\omega_u}{\omega_l}\right)^{a_2} = \frac{1}{a_1 A(\bar{s})^{1-\gamma} - \frac{\lambda}{\rho+\lambda}(\bar{d})^{1-\gamma}} \quad (\text{H.13})$$

$$\times \left\{ (A - \tilde{A})(a_1 - (1 - \gamma)) \left(\frac{\omega_u}{\omega_0}\right)^{1-\gamma} - \left[a_1 \left(\frac{\lambda}{\rho + \lambda} - \tilde{A}\right) + \tilde{A}(1 - \gamma) \right] (\bar{d})^{1-\gamma-a_2} \left(\frac{\omega_u}{\omega_0}\right)^{a_2} \right\} \quad (\text{H.14})$$

I Appendix

(証明)

$$H(\omega) = \tilde{E}[e^{-r\tau} P(W_\tau, \tau) | W_0 = \omega]$$

ここで $\omega_l < \omega < \omega_u$ のとき、 $H(\omega)$ は以下の式になる。

$$H(\omega) = \tilde{E}[e^{-r\tau_d} \max\{W_{\tau_d}, \bar{d}\omega_0\} | W_0 = \omega]$$

マルチンゲールより

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \tilde{E}[H(W_{t+h}, t+h) | W_0 = 0] \\ &= \tilde{E}[H(W_{t+h}, t+h) | W_0 = 0] \cdot p + \tilde{E}[H(W_{t+h}, t+h) | W_0 = 0] \cdot q \\ &= \tilde{E}[H(W_{t+h}, t+h) | W_0 = 0] \cdot p + \tilde{E}[e^{-rh} \max\{W_h, \bar{d}\omega_0\} | W_0 = 0] \cdot q \\ &= \tilde{E}[H(W_t, t) + \int_t^{t+h} dH(\omega, t+h) | W_0 = 0] \cdot p + \tilde{E}[e^{-rh} \max\{W_h, \bar{d}\omega_0\} | W_0 = 0] \cdot q \end{aligned}$$

$$q \cdot H(\omega) = \tilde{E}\left[\int_t^{t+h} dH(\omega, t+h) | W_0 = 0\right] \cdot p + \tilde{E}[e^{-rh} \max\{W_h, \bar{d}\omega_0\} | W_0 = 0] \cdot q$$

$$q \cdot H(\omega) = \tilde{E}\left[\int_t^{t+h} -rH + (\bar{p}r - g)W_s H' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 W_s^2 H'' dt | W_0 = 0\right] \cdot p + \tilde{E}[e^{-rh} \max\{W_h, \bar{d}\omega_0\} | W_0 = 0] \cdot q$$

両辺に $\frac{1}{h}$ をかける。

$$\frac{q}{h} \cdot H(\omega) = \tilde{E}\left[\int_t^{t+h} -rH + (\bar{p}r - g)W_s H' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 W_s^2 H'' dt | W_0 = 0\right] \cdot \frac{p}{h} + \tilde{E}[e^{-rh} \max\{W_h, \bar{d}\omega_0\} | W_0 = 0] \cdot \frac{q}{h}$$

$h \rightarrow 0$ とする。

$$\lambda \cdot H(\omega) = -rH + (\bar{p}r - g)W_0 H' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 W_0^2 H'' \cdot 1 + \tilde{E}[e^{-r \cdot 0} \max\{W_0, \bar{d}\omega_0\} | W_0 = 0] \cdot \lambda$$

$$\lambda H(\omega) = -rH + (\bar{p}r - g)W_0 H' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 W_0^2 H'' + \max\{W_0, \bar{d}\omega_0\} \lambda$$

$$rH = -rH + (\bar{p}r - g)\omega H' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 \omega^2 H'' + \lambda(\max\{\omega, \bar{d}\omega_0\} - H(\omega)) \quad \blacksquare$$

J Appendix

(証明)

まず、 $0 < \omega < \bar{d}\omega_0$ の場合を求める。

最初に各パラメータを求める。

$$\begin{aligned} H &= D_1\omega^{b_1} + D_2\omega^{b_2} + \frac{\lambda}{r+\lambda}\bar{d}\omega_0 \\ H' &= D_1b_1\omega^{b_1-1} + D_2b_2\omega^{b_2-1} \\ H'' &= D_1b_1(b_1-1)\omega^{b_1-2} + D_2b_2(b_2-1)\omega^{b_2-2} \end{aligned}$$

次に、パラメータをベルマン方程式に代入する。

$$\begin{aligned} rH &= (\bar{p}r - g)\omega H' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 H'' + \lambda(\max\{\bar{d}\omega_0, \omega\} - H) \\ &= 0 < \omega < \bar{d}\omega_0 \text{ より} \end{aligned}$$

$$rH = (\bar{p}r - g)\omega H' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 H'' + \lambda(\bar{d}\omega_0 - H)$$

まずは H にだけ代入する

$$\begin{aligned} r(D_1\omega^{b_1} + D_2\omega^{b_2} + \frac{\lambda}{r+\lambda}\bar{d}\omega_0) &= (\bar{p}r - g)\omega H' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 H'' + \lambda(\bar{d}\omega_0 - (D_1\omega^{b_1} + D_2\omega^{b_2} + \frac{\lambda}{r+\lambda}\bar{d}\omega_0)) \\ r(D_1\omega^{b_1} + D_2\omega^{b_2}) &= (\bar{p}r - g)\omega H' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 H'' + \lambda(-D_1\omega^{b_1} - D_2\omega^{b_2} + \frac{r}{r+\lambda}\bar{d}\omega_0) - \frac{r\lambda}{r+\lambda}\bar{d}\omega_0 \\ r(D_1\omega^{b_1} + D_2\omega^{b_2}) &= (\bar{p}r - g)\omega H' + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2 H'' + \lambda(-D_1\omega^{b_1} - D_2\omega^{b_2}) \end{aligned}$$

次に H', H'' を代入する

$$\begin{aligned} r(D_1\omega^{b_1} + D_2\omega^{b_2}) &= (\bar{p}r - g)\omega(D_1b_1\omega^{b_1-1} + D_2b_2\omega^{b_2-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2\omega^2(D_1b_1(b_1-1)\omega^{b_1-2} + D_2b_2(b_2-1)\omega^{b_2-2}) + \lambda(-D_1\omega^{b_1} - D_2\omega^{b_2}) \\ r \cdot D_1\omega^{b_1} + r \cdot D_2\omega^{b_2} &= (\bar{p}r - g) \cdot D_1b_1\omega^{b_1} + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 \cdot D_1b_1(b_1-1)\omega^{b_1} \\ &\quad + (\bar{p}r - g) \cdot D_2b_2\omega^{b_2} + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 \cdot D_2b_2(b_2-1)\omega^{b_2} + \lambda(-D_1\omega^{b_1} - D_2\omega^{b_2}) \end{aligned}$$

ω^{b_1} の項についてまとめる

$$\begin{aligned} r \cdot D_1\omega^{b_1} &= (\bar{p}r - g) \cdot D_1b_1\omega^{b_1} + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 \cdot D_1b_1(b_1-1)\omega^{b_1} - \lambda D_1\omega^{b_1} \\ r &= (\bar{p}r - g)b_1 + \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 b_1(b_1-1) - \lambda \\ 0 &= \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2 b_1^2 + (\bar{p}r - g - \frac{1}{2}\bar{p}^2\sigma^2)b_1 - (\lambda + r) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

K Appendix

まず、(4.3) と (4.4) の境界条件より、 D_1, D_2 を以下の式で表す事ができる。

$$D_1 = (\bar{s} - \frac{\lambda}{r + \lambda} \bar{d}) \omega_0 \omega_l^{-b_1} - D_2 \omega_l^{b_2 - b_1} \quad (\text{K.1})$$

$$D_2 = (\bar{s} - \frac{\lambda}{r + \lambda} \bar{d}) \omega_0 \omega_l^{-b_2} - D_1 \omega_l^{b_1 - b_2} \quad (\text{K.2})$$

(証明)

(4.3) と (4.4) の境界条件より

$$H(\omega_l) = \bar{s} \omega_0$$

$$D_1 \omega_l^{b_1} + D_2 \omega_l^{b_2} + \frac{\lambda}{r + \lambda} \bar{d} \omega_0 = \bar{s} \omega_0$$

$$D_1 = (\bar{s} - \frac{\lambda}{r + \lambda} \bar{d}) \omega_0 \omega_l^{-b_1} - D_2 \omega_l^{b_2 - b_1}$$

D_2 も同様に求める ■

\tilde{D}_1, \tilde{D}_2 も以下のように表すことができる。

$$\tilde{D}_1 = (1 - \frac{\lambda}{(1 - \bar{p})r + f_a + \lambda}) \omega_u^{1 - b_1} - \tilde{D}_2 \omega_u^{b_2 - b_1} \quad (\text{K.3})$$

$$\tilde{D}_2 = (1 - \frac{\lambda}{(1 - \bar{p})r + f_a + \lambda}) \omega_u^{1 - b_1} - \tilde{D}_1 \omega_u^{b_2 - b_1} \quad (\text{K.4})$$

(証明)

(4.3) と (4.4) の境界条件より

$$H(\omega_u) = \omega_u$$

$$\tilde{D}_1 \omega_u^{b_1} + \tilde{D}_2 \omega_u^{b_2} + \frac{\lambda}{(1 - \bar{p})r + g + \lambda} \omega_u = \omega_u$$

$$\tilde{D}_1 = (1 - \frac{\lambda}{(1 - \bar{p})r + f_a + \lambda}) \omega_u^{1 - b_1} - \tilde{D}_2 \omega_u^{b_2 - b_1}$$

\tilde{D}_2 も同様に求める ■

次に、 $\omega = \bar{d} \omega_0$ 上で連続であることより、以下が求まる。

$$\tilde{D}_1 = D_1 + \frac{1 - b_2}{b_2 - b_1} (\frac{\lambda}{(1 - \bar{p})r + f_a + \lambda} - \frac{\lambda}{r + \lambda}) (\bar{d} \omega_0)^{1 - b_1}$$

$$\tilde{D}_2 = D_2 + \frac{1 - b_1}{b_1 - b_2} (\frac{\lambda}{(1 - \bar{p})r + f_a + \lambda} - \frac{\lambda}{r + \lambda}) (\bar{d} \omega_0)^{1 - b_2}$$

(証明)

まず以下を定義する

$$\bar{d} \omega_0 := \varepsilon$$

$$\frac{\lambda}{(1 - \bar{p})r + f_a + \lambda} := \zeta$$

$$\zeta - \frac{\lambda}{r + \lambda} := \theta$$

次に $\omega = \bar{d}\omega_0$ 上で連続であることより以下が求まる

$$\begin{aligned}
H(\bar{d}\omega_0-) &= H(\bar{d}\omega_0+) \\
H(\varepsilon-) &= H(\varepsilon+) \\
D_1\varepsilon^{b_1} + D_2\varepsilon^{b_2} + \frac{\lambda}{r+\lambda}\varepsilon &= \tilde{D}_1 + \tilde{D}_2\varepsilon^{b_2} + \zeta\varepsilon \\
(\tilde{D}_1 - D_1)\varepsilon^{b_1} &= (D_2 - \tilde{D}_2)\varepsilon^{b_2} + \left(\frac{\lambda}{r+\lambda} - \zeta\right)\varepsilon
\end{aligned} \tag{K.5}$$

$$(\tilde{D}_1 - D_1)\varepsilon^{b_1} = (D_2 - \tilde{D}_2)\varepsilon^{b_2} - \theta\varepsilon \tag{K.6}$$

さらに連続な関数であることより

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}H(\varepsilon-) &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}H(\varepsilon+) \\
D_1b_1\varepsilon^{b_1-1} + D_2b_2\varepsilon^{b_2-1} + \frac{\lambda}{r+\lambda} &= \tilde{D}_1b_1\varepsilon^{b_1-1} + \tilde{D}_2b_2\varepsilon^{b_2-1} + \zeta \\
(D_2 - \tilde{D}_2)b_2\varepsilon^{b_2-1} &= (\tilde{D}_1 - D_1)b_1\varepsilon^{b_1-1} + \zeta - \frac{\lambda}{r+\lambda} \\
(D_2 - \tilde{D}_2)b_2\varepsilon^{b_2} &= (\tilde{D}_1 - D_1)b_1\varepsilon^{b_1} + \left(\zeta - \frac{\lambda}{r+\lambda}\right)\varepsilon \\
(D_2 - \tilde{D}_2)\varepsilon^{b_2} &= \frac{b_1}{b_2}(\tilde{D}_1 - D_1)\varepsilon^{b_1} + \frac{1}{b_2}\theta\varepsilon
\end{aligned} \tag{K.7}$$

となる。(K.7) を (K.6) に代入する

$$\begin{aligned}
(\tilde{D}_1 - D_1)\varepsilon^{b_1} &= \frac{b_1}{b_2}(\tilde{D}_1 - D_1)\varepsilon^{b_1} + \frac{1}{b_2}\theta\varepsilon - \theta\varepsilon \\
(\tilde{D}_1 - D_1) &= \frac{b_1}{b_2}(\tilde{D}_1 - D_1) + \frac{1-b_2}{b_2}\theta\varepsilon^{1-b_1} \\
\frac{b_2-b_1}{b_2}(\tilde{D}_1 - D_1) &= \frac{1-b_2}{b_2}\theta\varepsilon^{1-b_1} \\
\tilde{D}_1 - D_1 &= \frac{1-b_2}{b_2-b_1}\theta\varepsilon^{1-b_1} \\
\tilde{D}_1 &= D_1 + \frac{1-b_2}{b_2-b_1}\theta\varepsilon^{1-b_1} \\
\tilde{D}_1 &= D_1 + \frac{1-b_2}{b_2-b_1}\left(\frac{\lambda}{(1-\bar{p})r+f_a+\lambda} - \frac{\lambda}{r+\lambda}\right)(\bar{d}\omega_0)^{1-b_1}
\end{aligned}$$

\tilde{D}_2 も同様に求める ■

L 付録：消費のあるポートフォリオについて

時間は時間間隔 Δt によって分割され、取引が離散時点 $n\Delta t, n = 1, 2, \dots$ においてのみ行われるとする。まず、固定された時間 $[t, t + \Delta t)$ について考える。この時間間隔は t と表記することにする。

定義 L.1. 定義

- $N =$ 株の銘柄の数
- $h_i(t) =$ 時刻 $[t, t + \Delta t)$ の間に保持している、ポートフォリオの中の i 株の割合
- $h(t) =$ 時刻 t の間に保持しているポートフォリオ $[h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t)]$
- $c(t) =$ 時刻 $[t, t + \Delta t)$ の間に 1 区間あたり消費する金額
- $S_i(t) =$ 時刻 $[t, t + \Delta t)$ における i の株価
- $V(t) =$ 時刻 t におけるポートフォリオ h の価値

モデルの中での情報と決定は以下のように構成される

1. 時刻 t において、ポートフォリオとともに時刻 $t - \Delta t$ から $h(t - \Delta t)$ に移行する
2. 時刻 t において、価格ベクトル $S(t)$ は可測とする
3. 時刻 t において、可測な $S(t)$ を保有した後、新しいポートフォリオ $h(t)$ を選ぶ。同時に、消費率 $c(t)$ を選ぶ

$h(t)$ と $c(t)$ の両方は時刻 t 上で一定であると仮定する。まず、価値 $V(t)$ について考察する。 $V(t)$ を初期時刻 t の価値とし、 $h(t - \Delta t)$ の価値と等しいとする。以上より、次の式が得られる。

$$V(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t - \Delta t) S_i(t) = h(t - \Delta t) S(t) \quad (\text{L.1})$$

ここで、以下のことに注意する

$$xy = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

このポートフォリオの価値を以下の2つに使う。

- ポートフォリオ $h(t)$ に再び投資する
- 時刻 t で $c(t)$ 消費する

この新しいポートフォリオ $h(t)$ のコストは、以下の式で与えられる

$$\sum_{i=1}^N h_i(t) S_i(t) = h(t) S(t)$$

ここで、 $c(t)$ で消費されるコストは $c(t)\Delta t$ で与えられるとする。その時刻 t の方程式は以下の式になる

$$h(t - \Delta t) S(t) = h(t) S(t) + c(t) \Delta t \quad (\text{L.2})$$

以下の式を仮定する

$$\Delta X = X(t) - X(t - \Delta t)$$

ただし、 X は任意だと仮定する。方程式 (L.2) から以下のように解くことができる

$$S(t)\Delta h(t) + c(t)\Delta t = 0 \quad (\text{L.3})$$

(証明)

$$\begin{aligned} h(t - \Delta t)S(t) &= h(t)S(t) + c(t)\Delta t \\ 0 &= S(t)\{h(t) - h(t - \Delta t)\} + c(t)\Delta t \\ 0 &= S(t)\Delta h(t) + c(t)\Delta t \quad \blacksquare \end{aligned}$$

方程式を一般的にするために、方程式 (L.3) で $\Delta t \rightarrow 0$ とする。

$$S(t)dh(t) + c(t)dt = 0$$

伊藤積分の解を得るために、方程式 (L.3) を後進差分法から前進差分法に変換する

$$S(t - \Delta t)\Delta h(t) + \Delta S(t)\Delta h(t) + c(t)\Delta t = 0 \quad (\text{L.4})$$

(証明)

$$\begin{aligned} S(t)\Delta h(t) + c(t)\Delta t &= 0 \\ S(t)\Delta h(t) - S(t - \Delta t)\Delta h(t) + c(t)\Delta t &= -S(t - \Delta t)\Delta h(t) \\ \{S(t) - S(t - \Delta t)\}\Delta h(t) + c(t)\Delta t + S(t - \Delta t)\Delta h(t) &= 0 \\ S(t - \Delta t)\Delta h(t) + \Delta S(t)\Delta h(t) + c(t)\Delta t &= 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

方程式 (L.4) において、 $\Delta t \rightarrow 0$ とする

$$S(t)dh(t) + dh(t)dS(t) + c(t)dt = 0 \quad (\text{L.5})$$

また、方程式 (L.1) において $\Delta t \rightarrow 0$ とする

$$V(t) = h(t)S(t) \quad (\text{L.6})$$

この式の伊藤微分を求めると、以下が求まる

$$dV(t) = h(t)dS(t) + S(t)dh(t) + dS(t)dh(t) \quad (\text{L.7})$$

累積和を求めると、方程式 (L.7) は任意のポートフォリオのダイナミクスを求める一般的な方程式となる。また、方程式 (L.5) は資金自己調達の (selffinancing) ポートフォリオを満たす方程式となる。方程式 (L.5) を (L.7) に代入することで、資金自己調達のポートフォリオを求める。

$$dV(t) = S(t)dh(t) - c(t)dt \quad (\text{L.8})$$

(証明)

$$\begin{aligned} dV(t) &= h(t)dS(t) + S(t)dh(t) + dS(t)dh(t) \\ &= S(t)dh(t) + h(t)dS(t) + dS(t)dh(t) \\ &= S(t)dh(t) - c(t)dt \quad \blacksquare \end{aligned}$$

特に、消費が含まれない方程式の解として、 V のダイナミクスは以下の式で示すことができる。

$$dV(t) = h(t)dS(t) \quad (\text{L.9})$$

定義 L.2. 定義

N 次元の価格過程 $S(t); t \geq 0$ について考察する。

1. ポートフォリオ戦略は \mathcal{F}_t^s 適度な N 次元過程 $h(t); \geq 0$ である。
2. そのポートフォリオ h は以下の形で表せるならば、Markovian と呼ばれている。

$$h(t) = h(t, S(t))$$

ここで $h : R_+ \times R^N \rightarrow R^N$ となる。

3. ポートフォリオ h と対応する V^h は以下の式で与えられる。

$$V^h(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t) dS_i - c(t)dt \quad (\text{L.10})$$

4. 消費過程は \mathcal{F}_t^s 適度な 1 次元過程 $c(t); t \geq 0$ とする
5. (h, c) の消費のある戦略は、 V^h が以下の条件を満たすならば自己資金調達のと呼ばれている。

$$dV^h(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t) dS_i(t) - c(t)dt \quad (\text{L.11})$$

注意

一般的にポートフォリオ $h(t)$ は過去の価格の動き $S(u); u \leq t$ に対して独立であるとされている。また時点 t の価値のポートフォリオは、時点 t までのポートフォリオと価格過程 $S(t)$ にのみ独立である。

定義

relative portfolio u を以下の式で与える。

$$u_i(t) = \frac{h_i(t)S_i(t)}{V^h(t)} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{L.12})$$

ここで以下が成り立つとする。

$$\sum_{i=1}^N u_i(t) = 1$$

補題 L.3.

以下の式の (h, c) の消費のある戦略は自己資金調達のである。

$$dV^h(t) = V^h(t) \sum_{i=1}^N u_i(t) \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} - c(t)dt \quad (\text{L.13})$$

M 付録：ベルマン方程式について

この章では最適投資問題の一般的な問題について考察していき、最終的にベルマン方程式と実証定理を導出する。最適投資問題

まず、 $\mu(t, x, u)$ と $\sigma(t, x, u)$ を以下のフォームの関数として与える。

$$\mu : R_+ \times R^n \times R^k \rightarrow R^n$$

$$\sigma : R_+ \times R^n \times R^k \rightarrow R^{n \times d}$$

与えられた時点で $x_0 \in R^n$ として、以下の制御された確率微分方程式について考察する。

$$dX_t = \mu(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t \quad (\text{M.1})$$

$$X_0 = x_0 \quad (\text{M.2})$$

ここで、 n 次元過程 X を状態を表す変数とする。 X とは、 k 次元の制御過程 u を選ぶことによって変化させることができると仮定する。また、ウィナー過程は B と表記する。

次に、制御過程の許容可能な次元について考察する。制御過程は X の過程に適合している事が自然に考えられる。つまり、時刻 t における制御過程 u は過去の可測な X にのみ依存している。適当な制御過程を導出するひとつの方法は、決定関数 $\mathbf{u}(t, x)$ を選ぶ事である。

$$\mathbf{u} : R_+ \times R^n \rightarrow R^k$$

そして制御過程 u を以下の式に定義する

$$u_t = \mathbf{u}(t, X_t)$$

一方で、ある瞬間的な一時点の制御変数を u の記号で表記する。そして確率微分方程式を得るために、 \mathbf{u} を方程式 (M.1) に代入する。

$$dX_t = \mu(t, X_t, \mathbf{u}(t, X_t))dt + \sigma(t, X_t, \mathbf{u}(t, X_t))dB_t \quad (\text{M.3})$$

定義 M.1. 許容的な制御変数 u

制御変数 u は以下の条件を満たすと許容的であると言える。

- $\mathbf{u}(t, x) \in U$ for all $t \in R_+$, $x \in R^n$
- 初期の時点 (t, x) の SDE はただひとつの解を持っている。

$$dX_s = \mu(s, X_s, \mathbf{u}(s, X_s))ds + \sigma(s, X_s, \mathbf{u}(s, X_s))dB_s$$

$$X_t = x$$

許容的な制御変数の集合は \mathcal{U} と表記する。過程 X を $X^{x,u}$ と表記する。

定義 M.2.

ここで ' は転置行列を表わしている。

- 固定された制御変数 $u \in R^k$ のときの、関数 μ^u, σ^u, C^u は、以下で定義される。

$$\begin{aligned}\mu^u(t, x) &= \mu(t, x, u) \\ \sigma^u(t, x) &= \sigma(t, x, u) \\ C^u(t, x) &= \sigma(t, x, u)\sigma(t, x, u)'\end{aligned}$$

- 任意の制御変数 \mathbf{u} のときの、関数 $\mu^{\mathbf{u}}, \sigma^{\mathbf{u}}, C^{\mathbf{u}}(t, x), F^{\mathbf{u}}(t, x)$ は以下の式で定義される。

$$\begin{aligned}\mu^{\mathbf{u}}(t, x) &= \mu(t, x, \mathbf{u}(t, x)) \\ \sigma^{\mathbf{u}}(t, x) &= \sigma(t, x, \mathbf{u}(t, x)) \\ C^{\mathbf{u}}(t, x) &= \sigma(t, x, \mathbf{u}(t, x))\sigma(t, x, \mathbf{u}(t, x))' \\ F^{\mathbf{u}}(t, x) &= F(t, x, \mathbf{u}(t, x))\end{aligned}$$

- 固定された $u \in R^k$ のときの、微分方程式のオペレーター A^u は以下の式で定義する。

$$A^u = \sum_{i=1}^n \mu_i^u(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{i,j}^u(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

- 任意の制御過程 \mathbf{u} のときの、微分方程式のオペレーター $A^{\mathbf{u}}$ を以下の式で定義する。

$$A^{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \mu_i^{\mathbf{u}}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{i,j}^{\mathbf{u}}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

方程式 (M.3) を、簡潔な記号として以下のように書くこともある。

$$dX_t^{\mathbf{u}} = \mu^{\mathbf{u}} dt + \sigma^{\mathbf{u}} dB_t \quad (\text{M.4})$$

目的関数 \mathbf{u} について言及するために、まず与えられた二つの関数について考察する。

$$\begin{aligned}F &: R_+ \times R^n \times R^k \rightarrow R \\ \Phi &: R^n \rightarrow R\end{aligned}$$

上記の関数によって、最適化問題の効用関数を以下に定義する。

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_0 &: \mathcal{U} \rightarrow R \\ \mathcal{J}_0(\mathbf{u}) &= E\left[\int_0^T F(t, X_t^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_t) dt + \Phi(X_T^{\mathbf{u}})\right]\end{aligned}$$

以上より、最適化問題は、 $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ 上で $\mathcal{J}(\mathbf{u})$ を最大化する問題であるとする事ができる。そして、最適な価値の効用 $\hat{\mathcal{J}}_0$ を以下に定義する。

$$\hat{\mathcal{J}}_0 = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_0(\mathbf{u})$$

そして、 $\hat{\mathbf{u}}$ を最適な制御変数とする。

多くの最適化問題では、最適な制御変数を見つけることが困難であるということに注意する。

M.1 ベルマン方程式 (The Hamilton-Jacobi-Bellman Equation)

定義 M.3. ベルマン方程式

最適投資問題 $\mathcal{P}(t, x)$ は、以下の最大化問題として定義される。

$$E_{t,x} \left[\int_t^T F(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s) ds + \Phi(X_T^{\mathbf{u}}) \right]$$

$$dX_s^{\mathbf{u}} = \mu(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}(s, X_s^{\mathbf{u}})) ds + \sigma(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}(s, X_s^{\mathbf{u}})) dB_s \quad (\text{M.5})$$

$$X_t = x \quad (\text{M.6})$$

$$\mathbf{u}(s, y) \in U, \forall (s, y) \in [t, T] \times R^n \quad (\text{M.7})$$

ここで、 $\Phi(X_T^{\mathbf{u}})$ は、時点 $s = T$ の時に受け取る終端利益とする。

次に、効用関数と最適な効用関数について定義する。

定義 M.4. 効用関数

- 効用関数

$$\mathcal{J} : R_+ \times R^n \times \mathcal{U} \rightarrow R$$

$$\mathcal{J}(t, s, \mathbf{u}) = E \left[\int_t^T F(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s) ds + \Phi(X_T^{\mathbf{u}}) \right]$$

ダイナミクスは式 (M.5)(M.6)(M.7) で与えられる。

- 最適な効用関数

$$V : R_+ \times R^n \rightarrow R$$

$$V(t, x) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t, x, \mathbf{u})$$

仮定 M.4.1.

以下のことを仮定する。

1. 最適な制御変数 $\hat{\mathbf{u}}$ が存在する
2. 最適な制御変数 V は、 $V \in C^{1,2}$ の中で、定数である
3. 効用関数には、極限值が存在する。

任意の制御変数 \mathbf{u} を選び、以下に定義する。

$$\mathbf{u}^*(s, y) = \begin{cases} \mathbf{u}(s, y), & (s, y) \in [t, t+h] \times R^n \\ \hat{\mathbf{u}}(s, y), & (s, y) \in (t+h, T] \times R^n \end{cases}$$

次に、以下を実行する。

- まず、時間間隔 $[t, T]$ の間で二つの戦略を考える。

- 戦略 1 最適な制御変数 $\hat{\mathbf{u}}$ を用いる。
- 戦略 2 上記で定義したような制御変数 \mathbf{u}^* を用いる。

戦略 1 における期待効用の計算

関数の定義より、効用は最適解になる。

$$\mathcal{J}(t, x, \hat{\mathbf{u}}) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t, x, \mathbf{u}) = V(t, x)$$

戦略 2 における期待効用の計算

期間 $[t, T]$ を $[t, t+h]$ と $(t+h, T]$ の 2 つに分ける。

- 期間 $[t, t+h]$ で戦略 2 を使った期待効用は以下の式で与えられる。

$$\mathcal{J}(t, x, \mathbf{u}) = E_{t,x} \left[\int_t^{t+h} F(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s) ds \right]$$

- 時刻 $t+h$ での期待効用は以下の式で示すことができる。

$$\mathcal{J}(t+h, X_{t+h}^{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t+h, X_{t+h}^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = V(t+h, X_{t+h}^{\mathbf{u}})$$

よって初期状態 x の時刻 t の条件付期待値によって、期間 $[t+h, T]$ の期待効用は以下の式によって表すことができる。

$$E_{t,x} [V(t+h, X_{t+h}^{\mathbf{u}})]$$

以上より、戦略 2 の期待効用は以下の式になる。

$$E_{t,x} \left[\int_t^{t+h} F(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s) ds + V(t+h, X_{t+h}^{\mathbf{u}}) \right]$$

次に 2 つの戦略を比較する。定義より、戦略 1 は最適な戦略なため、戦略 1 \geq 戦略 2 より以下の不等式が成立する。

$$V(t, x) \geq E_{t,x} \left[\int_t^{t+h} F(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s) ds + V(t+h, X_{t+h}^{\mathbf{u}}) \right] \quad (\text{M.8})$$

注意 もし戦略 2 において、期間 $[t, t+h]$ の任意な制御変数 \mathbf{u} が最適な制御変数 $\hat{\mathbf{u}}$ であったならば、方程式 (M.8) は等式になる。(最適な制御変数は一意的である必要は無い事に注意する。)

仮定より、 V は以下の式を導くために、伊藤の公式を使うのに十分な条件を満たしている。

$$V(t+h, X_{t+h}^{\mathbf{u}}) = V(t, x) + \int_t^{t+h} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s^{\mathbf{u}}) + \mathcal{A}V(s, X_s^{\mathbf{u}}) \right\} ds + \int_t^{t+h} \nabla_x V(s, X_s^{\mathbf{u}}) \sigma^{\mathbf{u}} dB_s \quad (\text{M.9})$$

(証明)

$$\begin{aligned} dV(t, X_t^{\mathbf{u}}) &= \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial X_s} dX_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 X_s} (dX_s)^2 \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{\partial V}{\partial X_s} (\mu^{\mathbf{u}} ds + \sigma^{\mathbf{u}} dW_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 X_s} \sigma^2 ds \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial X_s} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 X_s} \sigma^2 \right) ds + \frac{\partial V}{\partial X_s} \sigma dB_s \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{A}^{\mathbf{u}} V \right) ds + \nabla_x V \sigma^{\mathbf{u}} dB_x \quad \blacksquare \end{aligned}$$

方程式 (M.9) を不等式 (M.8) に代入する。

$$E_{t,x} \left[\int_t^{t+h} \left[F(s, X_s^u, \mathbf{u}_s) + \frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s^u) + \mathcal{A}^u V(s, X_s^u) \right] ds \right] \leq 0 \quad (\text{M.10})$$

(証明)

$$\begin{aligned} V(t, x) &\geq E_{t,x} \left[\int_t^{t+h} F(s, X_s^u, \mathbf{u}_s) ds + V(t+h, X_{t+h}^u) \right] \\ &\geq E_{t,x} \left[\int_t^{t+h} F(s, X_s^u, \mathbf{u}_s) ds + V(t, x) + \int_t^{t+h} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s^u) + \mathcal{A}V(s, X_s^u) \right\} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{t+h} \nabla_x V(s, X_s^u) \sigma^u dB_s \right] \\ &\geq V(t, x) + E_{t,x} \left[\int_t^{t+h} \left\{ F(s, X_s^u, \mathbf{u}_s) + \frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s^u) + \mathcal{A}V(s, X_s^u) \right\} ds \right] \\ 0 &\geq E_{t,x} \left[\int_t^{t+h} \left[F(s, X_s^u, \mathbf{u}_s) + \frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s^u) + \mathcal{A}^u V(s, X_s^u) \right] ds \right] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

極限值：今、不等式を h によって分割する。そして、その h を 0 に近づける。期待値が極限值を持つのに十分であると過程されたとき、基本的な積分と $X_t = x$ より、以下が求まる。

$$F(t, x, u) + \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \mathcal{A}V(t, x) \leq 0 \quad (\text{M.11})$$

ここで u は瞬間的な一時点 (t, x) の \mathbf{u} を表している。すべての制御変数 \mathbf{u} が任意であったことから、上記の不等式は全ての $u \in U$ で成立する。そしてその中でも、 $u = \hat{u}$ の時のみ等式が成立する。つまり、以下の式で示すことができる

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sup_{u \in U} F(t, x, u) + \mathcal{A}^u V(t, x) = 0$$

時点 (t, x) を固定して考えていたが、任意の時点として (t, x) を選んでいたため、上記の方程式はすべての $(t, x) \in R^n$ で存在する。よって、PDE の解を持ち、そのために境界条件が必要になる。

M.1.1 ベルマン方程式

M.1 を仮定することによって、以下が成立する。

1. V は以下の HJB 方程式を満たす。

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sup_{u \in U} \{ F(t, x, u) + \mathcal{A}^u V(t, x) \} = 0, & \forall (t, x) \in (0, T) \times R^n \\ V(T, x) = \Phi(x), & \forall x \in R^n \end{cases}$$

2. ベルマン方程式の中で、各 $(t, x) \in [0, T] \times R^n$ の上限は $u = \hat{u}(t, x)$ によって与えられる。

この定理は、もし V が最適な効用関数で、 \hat{u} が最適な制御変数ならば、ベルマン方程式を満たし、そして \hat{u} が方程式の上界であるという事の必要条件を満たしている。

ベルマン方程式は最適な制御変数の十分条件としても扱える。この、十分条件の結果は実証定理と呼ばれる。

定理 M.4.1. 実証定理

まず、二つの関数 $H(t, x)$ と $g(t, x)$ は以下の条件を満たしていると仮定する。

- H は積分可能であり、そして、以下のベルマン方程式の解を持つ。

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t}(t, x) + \sup_{u \in U} \{F(t, x, u) + \mathcal{A}H(t, x)\} = 0, & \forall (t, x) \in (0, T) \times R^n \\ H(t, x) = \Phi(x), & \forall x \in R^n \end{cases}$$

- 関数 g は、全体の中で値をとりうる範囲の中の制御変数とする。
- 固定された時点 (t, x) のとき、以下の式の上極限は、 $u = g(t, x)$ を選ぶことで求まる

$$\sup_{u \in U} \{F(t, x, u) + \mathcal{A}H(t, x)\}$$

以上の事を仮定すると、以下の事が定理として成り立つ。

1. 最適投資問題の最適価値関数 V は以下の式で与えられる。

$$V(t, x) = H(t, x)$$

2. 最適な制御変数 \hat{u} が存在し、それは $\hat{u}(t, x) = g(t, x)$ と表される。

ここで、上記のベルマン方程式の中で V の代わりに H を使っている。なぜなら V は最適な価値関数を表すのに、すでに使っているためである。

(証明)

上記によって、 H と g は与えられたと仮定する。そして任意の制御変数 $u \in U$ と固定された時点 (t, x) を選ぶ。期間 $[t, T]$ 上の過程 X^u を以下の方程式の解として定義する。

$$\begin{aligned} dX_s^u &= \mu^u(s, X_s^u)ds + \sigma^u(s, X_s^u)dB_s \\ X_t &= x \end{aligned}$$

関数 H の中に、過程 X^u を代入し、そして伊藤の公式を用いると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} H(T, X_T^u) &= H(t, x) + \int_t^T \left\{ \frac{\partial H}{\partial t}(s, X_s^u) + (\mathcal{A}^u H)(s, X_s^u) \right\} ds \\ &\quad + \int_t^T \nabla_x H(s, X_s^u) \sigma^u(s, X_s^u) dB_s \end{aligned}$$

H がベルマン方程式の解を持つことから、

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, x) + F(t, x, u) + \mathcal{A}^u H(t, x) \leq 0$$

すべての $u \in U$ と s で、 $P - as$ で以下の積分が成り立つ。

$$\frac{\partial H}{\partial t}(s, X_s^u) + (\mathcal{A}H)(s, X_s^u) \leq -F^u(s, X_s^u)$$

ベルマン方程式の境界条件より、 $H(T, X_T^u) = \Phi(X_T^u)$ を得る。そして以下の積分を得る

$$H(t, x) \geq \int_t^T F^u(s, X_s^u) ds + \Phi(X_T^u) - \int_t^T \nabla_x H(s, X_s^u) \sigma^u dB_s$$

(証明)

$$\begin{aligned}
H(T, X_T^{\mathbf{u}}) &= H(t, x) + \int_t^T \frac{\partial H}{\partial t}(s, X_s^{\mathbf{u}}) + (\mathcal{A}^{\mathbf{u}}H)(s, X_s^{\mathbf{u}}) ds + \int_t^T \nabla_x H(s, X_s^{\mathbf{u}} \sigma^{\mathbf{u}}(s, X_s)) dB_s \\
\Phi(X_T^{\mathbf{u}}) &= H(t, x) + \int_t^T \frac{\partial H}{\partial t}(s, X_s^{\mathbf{u}}) + (\mathcal{A}^{\mathbf{u}}H)(s, X_s^{\mathbf{u}}) ds + \int_t^T \nabla_x H(s, X_s^{\mathbf{u}} \sigma^{\mathbf{u}}(s, X_s)) dB_s \\
\Phi(X_T^{\mathbf{u}}) &\leq H(t, x) - \int_t^T F^{\mathbf{u}}(s, X_s^{\mathbf{u}}) ds + \int_t^T \nabla_x H(s, X_s^{\mathbf{u}} \sigma^{\mathbf{u}}(s, X_s)) dB_s \\
H(t, x) &\geq \int_t^T F^{\mathbf{u}}(s, X_s^{\mathbf{u}}) ds + \Phi(X_T^{\mathbf{u}}) - \int_t^T \nabla_x H(s, X_s^{\mathbf{u}} \sigma^{\mathbf{u}}(s, X_s)) dB_s \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

期待値をとり、積分可能を仮定することで確率積分項を消すことができる。そして以下の式が残る。

$$H(t, x) \geq E_{t,x} \left[\int_t^T F^{\mathbf{u}}(s, X_s^{\mathbf{u}}) ds + \Phi(X_T^{\mathbf{u}}) \right] = \mathcal{J}(t, x, \mathbf{u})$$

制御変数 \mathbf{u} が任意に選ばれていたことから、以下の式が求まる。

$$H(t, x) \geq \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t, x, \mathbf{u}) = V(t, x) \quad (\text{M.12})$$

逆の不等式を得るために、まず制御変数として $\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{g}(t, x)$ を選ぶ。そして上記と同じ計算を行う中で制御変数 \mathbf{g} が以下の式を導くと仮定する。

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, x) + F^{\mathbf{g}}(t, x) + \mathcal{A}^{\mathbf{g}}H(t, x) = 0$$

そして以下の式を得る。

$$H(t, x) = E_{t,x} \left[\int_t^T F^{\mathbf{g}}(s, X_s^{\mathbf{g}}) ds + \Phi(X_T^{\mathbf{g}}) \right] = \mathcal{J}(t, x, \mathbf{g}) \quad (\text{M.13})$$

一方で、以下の式は明らかである。

$$V(t, x) = \sup_{\mathbf{g} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t, x, \mathbf{g}) \geq \mathcal{J}(t, x, \mathbf{g}) \quad (\text{M.14})$$

以上の事より、式 (M.12)(M.13)(M.14) を用いて、以下の式を得る。

$$H(t, x) \geq V(t, x) \geq \mathcal{J}(t, x, \mathbf{g}) = H(t, x)$$

以上の事より $H = V$ を証明することができ、そして \mathbf{g} は最適な制御変数だということも分かる。 ■

参考文献

- [1] Kristen S.Moore and Virginia R. Young:
Optimal Design of a Perpetual Equity-Indexed Annuity, North American Actuarial Journal;Jan
2005;9,1;ABI/INFORM Global pg.57
- [2] Kristen S.Moore:Optimal Surrender Strategies for Equity-Indexed Annuity Investors
- [3] Bjork,Tomas:Arbitrage Theory in Continuous Time
New York:oxford University Press 1998
- [4] Virginia R. Young:
Equity-Indexed Life Insurance:Pricing and Reserving Using the Principle of Equivalent Utility, , North Amer-
ican Actuarial Journal;Volume 7,Number1, 2003