アノマリーを用いた生成関数による裁定ポートフォリオの実証分析

大道, 昭尚 / OMICHI, Akihisa

(発行年 / Year)
2008-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)
2008-03-24

(学位名 / Degree Name)
修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)
法政大学 (Hosei University)

2007年度修士論文

アノマリーを用いた生成関数による裁定ポートフォリオの実証分析

指導教員： 浦谷　規 教授

オオミチアキヒサ
06R6203 大道昭尚

法政大学大学院

工学研究科　システム工学専攻　修士課程

2007 Master's Thesis

Arbitrage portfolio by generation function using Market anomaly

Supervisor Prof. Tadashi URATANI

06R6203 Akihisa OMICHI

Graduate School of Engineering

Hosei University

概要

本論文では確率ポートフォリオ理論に基づき，ポートフォリオの構築を行う．確率ポートフォリオ理論はパラメータの推定を必要とせず，実際の市場で観測されるデータからポートフォリオを構築することが可能である．また，数理ファイナンスの基本定理である無裁定仮説を立てずに理論を展開し，ある条件の下で裁定機会の存在を証明することが可能である．この理論を用いて日本株式市場において「ＰＢＲ効果」と呼ばれるアノマリーを着目してポートフォリオを構築する．漸近的裁定ポートフォリオの存在を証明すると共に「サイズ効果」加えたポートフォリオを提案する。

Abstract

In this thesis a portfolio strategy in proposed based on the stochastic portfolio theory.The stochastic portfolio theory does not require the estimation of the parameters, but it can construct a portfolio directly from data observed in actual market.Moreover, the theory can produce asymptotic arbitrage without hypotheses that is assumed in basic theorems of the mathematical finance, that is, absence existence of the arbitrage opportunity.We study "Effect of Price Book-value Ratio (PBR)" in Japanese stock market.The PBR is the typical market anomaly constructed.We propose the portfolio strategy that proves of the asymptotic arbitrage portfolio.

目 次

1　緒論

ポートフォリオ理論は Markowitz によって提唱されて以来，飛躍的な発展を遂げた．その応用として CAPM などはコーポレートファイナンスにおいて重要な地位を占めるようになり，Markowitz によるポートフォリオ理論は近代ポートフォリオ理論と呼ばれるまでになった．しかし，近代ポートフォリオ理論は，期待収益率や分散など膨大な量のパラメータの推定を必要とし，実際のポートフォリオ運用には耐えがたい．

本論文で扱う確率ポートフォリオ理論は米国運用会社 INTECH の最高投資責任者である Fernholz によって提案された投資理論である．実際，INTECH では，この理論に基づいてポートフォリオの構築，運用が行われている．確率ポートフォリオ理論は現代ポートフォリオ理論のような膨大な数の統計量や計算量を必要とせず，実際に観測され得る市場データからポートフォリオを構築することが可能である．また，数理ファイナンスの基本定理となる裁定の有無，市場均衡の有無，同値マルチンゲール測度の存在に関わらず理論を展開でき，ある条件の下で裁定機会の存在を証明することができる．

本論文では，確率ポートフォリオ理論に基づき，日本株式市場においてアノマリーと呼ばれる「サイズ効果」と「PBR 効果」を用いてポートフォリオを構築し漸近的裁定機会の存在を証明する．さらに「サイズ効果」と「PBR 効果」を複合した生成関数を用いてポートフォリオを構築し，各ポートフォリオの比較分析を行う．

2　確率ポートフォリオ理論

本章では，市場に仮説を設け株価とポートフォリオのモデルにを定義する．次にポートフォリオのパフォーマンスを評価するにあたり，市場ポートフォリオとの相対収益率を定義する．さらに，ポートフォリオの運用を行う上で，ポートフォリオの長期的動向が何に起因するかを明らかにする．

2.1　株価とポートフォリオ

まず，市場における株式数は有限で固定されており，総数は一定であるとし，企業は合併や倒産をしないと仮定する．さらに，取引では手数料や税金が課せられず，配当は支払われないものとする．

今後，株価過程およびポートフォリオは確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された確率過程に従うとする．ここでの株価とは実際の市場での時価総額を指している．株価過程を X とし，株価モデルを定義する．

Definition 2.1. n を正の整数とする．株価過程 X は次の確率微分方程式を満足する．

$$d \log X(t) = \gamma(t)dt + \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu(t) dW_\nu(t) \tag{2.1}$$

$(W_1, \ldots, W_n)$ はブラウン運動，$\gamma(t)$，$\xi_\nu(t)$ は可測で適合した過程であり，次の条件を満たしている．

1. $\int_0^T |\gamma(t)| dt < \infty, \quad T \in [0, \infty), \quad$ a.s.
2. $\int_0^T \big(\xi_1^2(t) + \cdots + \xi_n^2(t)\big) dt < \infty, \quad T \in [0, \infty), \quad$ a.s.
3. $\lim_{t\to\infty} t^{-1} \big(\xi_1^2(t) + \cdots + \xi_n^2(t)\big) \log\log t = 0, \quad$ a.s.
4. $\xi_1^2(t) + \cdots + \xi_n^2(t) > 0, \quad t \in [0, \infty), \quad$ a.s.

γ は成長率，ξ_ν はボラティィリティと呼ばれる．ξ_ν は W_ν に対する敏感さを表す値である．この定義より，株式 X の瞬間的な収益率を表現することが可能となる．

Corollary 2.2. 株価過程を X とすると，

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \alpha(t)dt + \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu(t) dW_\nu(t) \tag{2.2}$$

となる．ただし，

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2(t)$$

とする．

Proof. $X(t) = \exp\big(\log X(t)\big)$ に伊藤の公式を適用すると，

$$\begin{aligned} dX(t) &= X(t) d\log X(t) + \frac{1}{2} X(t) d\langle \log X \rangle_t \\ &= X(t) d\log X(t) + \frac{1}{2} X(t) \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2(t) dt \end{aligned}$$

となる．ただし $\log X$ の二次変分過程は，

$$d\langle \log X\rangle_t = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2(t)dt$$

となる．(2.1) より，

$$\begin{aligned} dX(t) &= X(t)\Big(\gamma(t)dt + \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu(t)dW_\nu(t)\Big) + \frac{1}{2}X(t)\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2(t)dt \\ &= \Big(\gamma(t) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2(t)\Big)X(t)dt + X(t)\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu(t)dW_\nu(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

収益率過程として α を，

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2(t)$$

と定義すると (2.3) は，

$$dX(t) = \alpha(t)X(t)dt + X(t)\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu(t)dW_\nu(t)$$

と表される．よって，

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \alpha(t)dt + \sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu(t)dW_\nu(t)$$

となる． □

これまで単一株式について考察してきたが，複数の株式 $X_i, i = 1, \ldots, n$ に拡張する．式 (2.1) より，

$$d\log X_i(t) = \gamma_i(t)dt + \sum_{i,\nu=1}^{n}\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t) \tag{2.4}$$

と定義できる．$\log X_i$ と $\log X_j$ の交差変分過程を次式のように定義する．

$$\sigma_{ij}(t)dt = d\langle \log X_i, \log X_j\rangle_t = \sum_{\nu=1}^{n}\xi_{i\nu}(t)\xi_{j\nu}(t)dt$$

これより，

$$\alpha_i(t) = \gamma_i(t) + \frac{1}{2}\sigma_{ii}(t)$$

となる．また，(2.4) を積分すると，

$$X_i(t) = X_i(0)\exp\Big(\int_0^t \gamma_i(s)ds + \int_0^t \sum_{\nu=1}^{n}\xi_{i\nu}dW_\nu(s)\Big) \tag{2.5}$$

である．このように定義された株式 X_i によって市場を構築していく．

Definition 2.3. 市場は (2.5) で定義された株式の集合 $\mathcal{M} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ であり，$\sigma(t)$ は正則であるとする．次式を満たす $\varepsilon > 0$ が存在するとき，市場 $\mathcal{M}$ は非退化とする．

$$x\sigma(t)x^T \geq \varepsilon||x||^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,\infty) \tag{2.6}$$

また，次式を満たす $M > 0$ が存在するとき，市場 $\mathcal{M}$ の分散は有界である．

$$x\sigma(t)x^T \leq M||x||^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,\infty) \tag{2.7}$$

Lemma 2.4. 市場共分散過程 σ に対して，$\sigma(t)$ は $t \in [0, \infty)$ に対して正値である．

Proof. 共分散過程 σ は $\sigma(t) = \xi(t)\xi^T(t)$ と定義されたことから，

$$x\sigma(t)x^T = x\xi(t)\xi^T(t)x^T = x\xi(t)\big(x\xi(t)\big)^T \geq 0$$

となり $\sigma(t)$ は半正値である．行列が半正値であるとき，その固有値はすべて非負である．また，Definition 2.3 より $\sigma(t)$ は正則であり，そのとき行列は 0 を固有値として持たない．したがって，$\sigma(t)$ の固有値はすべて正であり $\sigma(t)$ は正値である． □

以上で $\mathcal{M}$ は定義された．この $\mathcal{M}$ 上にポートフォリオを定義し，ポートフォリオの価値過程について考察をしていく．

Definition 2.5. 市場 $\mathcal{M}$ においてポートフォリオは $[0, \infty)$ 上に値をとる可測で適合なベクトル値過程 $\pi(t) = \big(\pi_1(t), \ldots, \pi_n(t)\big)$ であり，次式を満足する．

$$\pi_1(t) + \cdots + \pi_n(t) = 1$$

定義されたポートフォリオ π は，ポートフォリオの価値における株式の比率である．つまり，株式 X_i が，あるポートフォリオ Z_π 中に占める割合が π_i である．これより，ポートフォリオの価値過程を定義し，ポートフォリオの対数モデルを導く．

Definition 2.6. ポートフォリオを π とし，時刻 t におけるポートフォリオの価値を $Z_\pi(t) > 0$ とするとき $Z_\pi(t)$ は次の確率微分方程式に従うとする．

$$\frac{dZ_\pi(t)}{Z_\pi(t)} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} \tag{2.8}$$

Proposition 2.7. 市場 $\mathcal{M}$ においてポートフォリオを π とするとき，過程 Z_π は次式を満たす．

$$d \log Z_\pi(t) = \gamma_\pi(t)dt + \sum_{i,\nu=1}^{n} \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t) \tag{2.9}$$

ただし，

$$\gamma_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i(t) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_{ii}(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)\Big)$$

とする．

Proof. $Z_\pi(t) = \exp\big(\log Z_\pi(t)\big)$ に伊藤の公式を適用すると，

$$\begin{aligned} dZ_\pi(t) &= Z_\pi(t) d \log Z_\pi(t) + \frac{1}{2} Z_\pi(t) d\langle \log Z_\pi \rangle_t \\ &= Z_\pi(t) d \log Z_\pi(t) + \frac{1}{2} Z_\pi(t) \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)dt \end{aligned}$$

となるから，

$$d \log Z_\pi(t) = \frac{dZ_\pi(t)}{Z_\pi(t)} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)dt$$

と書ける．ここで (2.3) と (2.8) より，

$$\begin{aligned}
d\log Z_\pi(t) &= \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)dt \\
&= \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\gamma_i(t)dt + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\sigma_{ii}(t)dt \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)dt + \sum_{i,\nu=1}^{n}\pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t)
\end{aligned}$$

となる．ここでポートフォリオの成長率過程 γ_π を次のように定義すると (2.9) が導かれる．

$$\gamma_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\gamma_i(t) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\sigma_{ii}(t) - \sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)\Big)$$

□

以下の式を超過成長率として定義する．

$$\gamma^*_\pi(t) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\sigma_{ii}(t) - \sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)\Big) \tag{2.10}$$

ポートフォリオの分散過程 $\sigma_{\pi\pi}$ を，

$$\sigma_{\pi\pi}(t) = \sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)$$

と定義すると式 (2.10) は，

$$\gamma^*_\pi(t) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\sigma_{ii}(t) - \sigma_{\pi\pi}(t)\Big) \tag{2.11}$$

となる．以上より成長率 γ_π は，

$$\gamma_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\gamma_i(t) + \gamma^*_\pi(t) \tag{2.12}$$

となり，各株式の成長率の加重平均とポートフォリオの超過成長率の和で表現可能である．

Corollary 2.8. ポートフォリオ π の価値過程を Z_π とするとき，

$$d\log Z_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)d\log X_i(t) + \gamma^*_\pi(t)dt \tag{2.13}$$

となる．

Proof. 式 (2.1) より次式のようになる．

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)d\log X_i(t) = \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\gamma_i(t)dt + \sum_{i,\nu=1}^{n}\pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t) \tag{2.14}$$

(2.9) は (2.12) により，

$$d\log Z_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\gamma_i(t)dt + \gamma^*_\pi(t)dt + \sum_{i,\nu=1}\pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t)$$

となり，(2.14) より (2.13) は導かれる． □

2.2 相対収益率と市場ポートフォリオ

株式ポートフォリオのパフォーマンス評価を行う上で対象とするベンチマークを市場全体を表す TOPIX や日経平均とすることが一般的である．本論文ではベンチマークとして株式市場全体の時価総額比率から求められる市場ポートフォリオ（時価総額加重平均）を用いる．本節では，市場ポートフォリオに対する株式ポートフォリオの相対収益率を定義する．

Definition 2.9. ポートフォリオ η に対する株式 X_i の相対収益率過程を以下の式で定義する．

$$\log\bigl(X_i(t)/Z_\eta(t)\bigr) \tag{2.15}$$

相対収益率過程は，

$$\begin{aligned}\langle\log(X_i/Z_\eta),\log(X_j/Z_\eta)\rangle_t =&\langle\log X_i,\log X_j\rangle_t-\langle\log X_i,\log Z_\eta\rangle_t\\&-\langle\log X_j,\log Z_\eta\rangle_t+\langle\log Z_\eta\rangle_t\end{aligned} \tag{2.16}$$

となるような連続セミマルチンゲールである．

Definition 2.9 のように定義したとき，この相対過程の分散および共分散構造を考察する．$\sigma_{i\eta}$ 過程を以下の式で定義する．

$$\sigma_{i\eta}(t)=\sum_{j=1}^{n}\eta_j(t)\sigma_{ij}(t)$$

そのとき，

$$d\langle\log X_i,\log Z_\eta\rangle_t=\sigma_{i\eta}(t)dt$$

となり，相対共分散過程 τ^η は行列価値過程であり

$$\tau^\eta(t)=\bigl(\tau^\eta_{ij}(t)\bigr)$$

各要素は，$\sigma_{\eta\eta}=\eta(t)\sigma(t)\eta^T(t)$ として次式で表せる．

$$\tau^\eta_{ij}(t)=\sigma_{ij}(t)-\sigma_{i\eta}(t)-\sigma_{j\eta}(t)+\sigma_{\eta\eta}(t) \tag{2.17}$$

このとき，

$$d\langle\log(X_i/Z_\eta),\log(X_j/Z_\eta)\rangle_t=\tau^\eta_{ij}(t)dt \tag{2.18}$$

となる．そして

$$d\langle\log(X_i/Z_\eta)\rangle_t=\tau^\eta_{ii}(t)dt$$

$\langle\log(X_i/Z_\eta)\rangle_t$ は非減少より

$$\tau^\eta_{ii}(t)\geq 0 \tag{2.19}$$

となる．つまり，相対過程であっても分散は非負の値をとることを意味している．

次に数学的に重要な補題を証明する．この補題は今後多くの命題などで利用されることとなる．

Lemma 2.10. ポートフォリオ η に対して，$\tau^\eta(t)$ は半正値でランクが $n-1$ である．また，$\eta(t)$ は $\tau^\eta(t)$ の零空間を張る．

Proof. n 次元行ベクトル $\mathbf{1}=(1,\dots,1)$ を導入すると行列 τ^η は次のように表せる．

$$\tau^\eta(t)=\sigma(t)-\sigma(t)\eta^T(t)\mathbf{1}-\mathbf{1}^T\eta(t)\sigma(t)+\mathbf{1}^T\eta(t)\sigma(t)\eta^T(t)\mathbf{1} \tag{2.20}$$

(2.20) 式の左右から x を乗じると次式のように 2 次形式で表現できる．

$$x\tau^\eta(t)x^T=x\sigma(t)x^T-2x\sigma(t)\eta^T(t)\sum_{i=1}^n x_i+\eta(t)\sigma(t)\eta^T(t)\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2 \tag{2.21}$$

ここで，第一に $\sum_{i=1}^n x_i=0$ と仮定すると，$\sigma(t)$ は正値であるので，式 (2.21) は以下のようになる．

$$x\tau^\eta(t)x^T=x\sigma(t)x^T>0$$

次に

$$\sum_{i=1}^n x_i=a\neq 0$$

と仮定し，$y=a^{-1}x$ とすると，

$$x\tau^\eta(t)x^T=a^2y\tau^\eta(t)y^T$$

なので，$y\tau^\eta(t)y^T$ を考えれば十分である．$\sum_{i=1}^n y_i=1$ だから (2.21) は，

$$\begin{aligned}y\tau^\eta(t)y^T&=y\sigma(t)y^T-2y\sigma(t)\eta^T(t)+\eta(t)\sigma(t)\eta^T(t)\\&=\big(y-\eta(t)\big)\sigma(t)\big(y-\eta(t)\big)^T \qquad (2.22)\\&=0 \qquad (2.23)\end{aligned}$$

となる．Lemma 2.4 より $\sigma(t)$ は任意の 0 でない x に対して正値であるので，(2.23) を満たすのは $y=\eta(t)$ のときかつその場合に限る．よって，$x=a\eta(t)$ であるので，

$$\eta^T(t)\mathbf{1}\eta^T(t)=\eta^T(t)$$

となることから，(2.20) より，

$$\begin{aligned}\tau^\eta(t)\eta^T(t)&=\sigma(t)\eta^T(t)-\sigma(t)\eta^T(t)\mathbf{1}\eta^T(t)-\mathbf{1}^T\eta(t)\sigma(t)\eta^T(t)+\mathbf{1}^T\eta(t)\sigma(t)\eta^T(t)\mathbf{1}\eta^T(t)\\&=\sigma(t)\eta^T(t)-\sigma(t)\eta^T(t)-\mathbf{1}^T\eta(t)\sigma(t)\eta^T(t)+\mathbf{1}^T\eta(t)\sigma(t)\eta^T(t)\\&=0\end{aligned}$$

ゆえに，$\tau^\eta(t)$ の零空間は $\eta(t)$ で張られ，$\tau^\eta(t)$ のランクは $n-1$ である． □

ここまでは単一株式の相対過程を議論してきたが，ポートフォリオの相対過程に拡張する．η に対する π の相対分散過程を以下の式で定義すると，

$$\tau^\eta_{\pi\pi}(t)=\pi(t)\tau^\eta(t)\pi^T(t) \tag{2.24}$$

となる．式 (2.22) と同様に計算すると，

$$\begin{aligned}\pi(t)\tau^\eta(t)\pi^T(t)&=\big(\pi(t)-\eta(t)\big)\sigma(t)\big(\pi(t)-\eta(t)\big)^T\\&=\eta(t)\tau^\pi(t)\tau^T(t) \qquad (2.25)\end{aligned}$$

よって，

$$\tau^\eta_{\pi\pi}=\tau^\pi_{\eta\eta}$$

となる．Lemma 2.10 より，二つのポートフォリオが等しいときかつその場合に限り，二つのポートフォリオの相対分散は 0 である．

次に市場全体における株式のウェイトである，市場ウェイトを定義する．この概念は今後重要な役割を果たすことになる．

Definition 2.11. 市場ポートフォリオを μ として次式で定義する．

$$\mu_i(t) = \frac{X_i(t)}{X_1(t) + \cdots + X_n(t)} \tag{2.26}$$

このとき μ_i は市場ウェイトと呼ばれる．

市場ポートフォリオの価値過程 Z_μ を

$$Z_\mu(t) = X_1(t) + \cdots + X_n(t) \tag{2.27}$$

とする．このとき (2.26) で与えられる比率 μ_i を持つ価値過程 Z_μ は (2.8) を満足する．したがって，市場ポートフォリオの価値は市場における全株式の時価総額の総和である．

Definition 2.11 および式 (2.27) より，市場ウェイト過程 μ_i は

$$\mu_i(t) = \frac{X_i(t)}{Z_\mu(t)}$$

と記述でき，Definition 2.9 より

$$\log \mu_i(t) = \log\bigl(X_i(t)/Z_\mu(t)\bigr) \tag{2.28}$$

は第 i 株式の市場ポートフォリオに対する相対収益率として表現できる．

Corollary 2.12. μ を市場ポートフォリオとするとき，市場ウェイト μ_i は次式を満たす．

$$d\mu_i(t) = \mu_i(t) d\log\mu_i(t) + \frac{1}{2}\mu_i(t)\tau_{ii}(t)dt \tag{2.29}$$

また，このとき

$$d\langle \mu_i, \mu_j\rangle_t = \mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt \tag{2.30}$$

となる．

Proof. $\mu_i(t) = \exp\bigl(\log\mu_i(t)\bigr)$ に伊藤の公式を適用すると，

$$d\mu_i(t) = \mu_i(t) d\log\mu_i(t) + \frac{1}{2}\mu_i(t) d\langle \log\mu_i(t)\rangle_t \tag{2.31}$$

となる．(2.18) より，

$$d\langle \log\mu_i, \log\mu_j\rangle_t = d\langle \log(X_i/Z_\mu), \log(X_j/Z_\mu)\rangle_t = \tau_{ij}(t)dt \tag{2.32}$$

である．このことから (2.31) は,

$$d\mu_i(t) = \mu_i(t) d\log\mu_i(t) + \frac{1}{2}\mu_i(t)\tau_{ii}(t)dt$$

となり (2.29) が導かれる．これより,

$$d\langle \mu_i, \mu_j\rangle_t = \mu_i(t)\mu_j(t) d\langle \log\mu_i, \log\mu_j\rangle_t = \mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt$$

となり (2.30) も証明される． □

Proposition 2.13. 市場 $\mathcal{M}$ におけるポートフォリオを π とするとき，

$$d\log\bigl(Z_\pi(t)/Z_\mu(t)\bigr) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) d\log\mu_i(t) + \gamma_\pi^*(t)dt \tag{2.33}$$

となる．

Proof. Corollary 2.8 より，

$$d\log\bigl(Z_\pi(t)/Z_\mu(t)\bigr) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) d\log\bigl(X_i(t)/Z_\mu(t)\bigr) + \gamma_\pi^*(t)dt$$

(2.28) より (2.33) が導かれる． □

Proposition 2.13 は相対ポートフォリオの動向は市場ウェイトの変動および超過成長率によって分析できることを示している．

2.3 ポートフォリオの動向

現代ポートフォリオ理論では期待収益率と分散が重要とされていたが，確率ポートフォリオ理論では収益率よりも成長率を重視する．Proposition 2.14 は長期的なポートフォリオの変動は収益率よりも成長率によって決まることを示している．

Proposition 2.14. 市場 $\mathcal{M}$ における任意のポートフォリオ π に対して，

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\Bigl(\log Z_\pi(T) - \int_0^T \gamma_\pi(t)dt\Bigr) = 0 \tag{2.34}$$

となる．

Proof. (2.9) 式の両辺を積分すると，

$$\log\bigl(Z_\pi(T)/Z_\pi(0)\bigr) = \int_0^T \gamma_\pi(t)dt + \int_0^T \sum_{i,\nu=1}^{n} \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t)$$

となる．新たに，

$$\begin{aligned} V(T) &= \log\bigl(Z_\pi(T)/Z_\pi(0)\bigr) - \int_0^T \gamma_\pi(t)dt \\ &= \int_0^T \sum_{i,\nu=1}^{n} \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t) \end{aligned}$$

を定義すると V は連続マルチンゲールであり，

$$\langle V\rangle_t = \int_0^T \sigma_{\pi\pi}(s)ds \tag{2.35}$$

である．また Definition 2.1 の条件 3 より，

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\sigma_{\pi\pi}(t)\log\log t = 0 \tag{2.36}$$

となる．(2.36)，(2.35) そして Lemma 2.15 より (2.34) は導かれる． □

Lemma 2.15. M を次式を満たす局所マルチンゲールとする．

$$\lim_{t\to\infty} t^{-2}\langle M\rangle_t \log\log t = 0$$

このとき，

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}M(t) = 0$$

である．

2.4 株式市場の分散化

本節では，まず市場の分散化を定義する．そして，分散化市場と市場ポートフォリオの超過成長率との関係を明らかにする．本節では，市場の分散化を測る尺度としてエントロピー関数を導入し，ポートフォリオを関数によって生成するという概念を定義する．さらに，この生成されたポートフォリオはある条件下で市場ポートフォリオを優越することを示す．

2.4.1 分散化市場

Definition 2.16. 次式を満たすような $\delta > 0$ が存在するとき，市場 $\mathcal{M}$ は分散されているという．

$$\mu_{\max}(t) \leq 1-\delta$$

また，市場 $\mathcal{M}$ が弱分散であるとは次式を満たす $\delta > 0$ が存在するときにいう．

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mu_{\max}(t)dt \leq 1-\delta \tag{2.37}$$

つまり，分散化市場とは単一株式への極端な資産集中を避けた市場であるということができる．実際の市場においては独占禁止法などにより，資産が単一の株式に集中するという状況は考えにくい．したがって，この市場の分散の定義はかなり弱い条件と考えられる．

そのような分散化された市場と市場ポートフォリオの超過成長率の関係を段階的に明らかにしていく．

Lemma 2.17. 非退化市場においてポートフォリオを π とするとき，$i = 1,\dots,n$ に対して，次式を満たすような $\varepsilon > 0$ が存在する．

$$\tau_{ii}^{\pi} \geq \varepsilon\big(1-\pi_{\max}(t)\big)^2 \tag{2.38}$$

Proof. 非退化市場であることから (2.6) より，

$$x\sigma(t)x^T \geq \varepsilon||x||^2, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

を満たすような $\varepsilon > 0$ が存在する．$x(t) = \big(\pi_1(t),\dots,\pi_i(t)-1,\dots,\pi_n(t)\big)$ とする．このとき，

$$x(t)\sigma(t)x^T(t) = \sigma_{ii}(t) - 2\sigma_{i\pi}(t) + \sigma_{\pi\pi}(t)$$

となる．また，ポートフォリオ π に対する株式 X_i の相対分散は (2.17) より，

$$\tau_{ii}^{\pi}(t) = \sigma_{ii}(t) - 2\sigma_{i\pi}(t) + \sigma_{\pi\pi}(t)$$

である．以上より次のことが導かれる．

$$\tau_{ii}^{\pi}(t) \geq \varepsilon ||x(t)||^2 \tag{2.39}$$

次に $||x||^2$ に着目すると明らかに，

$$\pi_1^2(t) + \cdots + \bigl(1 - \pi_i(t)\bigr)^2 + \cdots + \pi_n^2(t) = ||x(t)||^2 \geq \bigl(1 - \pi_i(t)\bigr)^2$$

となるので (2.39) 式から，

$$\tau_{ii}^{\pi} \geq \varepsilon \bigl(1 - \pi_i(t)\bigr)^2$$

となる．ここで，

$$\pi_{\max}(t) = \max_{1 \leq i \leq n} \pi_i(t)$$

と記述すると (2.38) が導かれる． □

Lemma 2.18. π をポートフォリオとするとき，

$$\gamma_{\pi}^{*}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \tau_{ii}^{\pi}(t) \tag{2.40}$$

となる．

Proof. π と η の二つのポートフォリオを考える．まず (2.17) より，

$$\tau_{ij}^{\eta} = \sigma_{ij}(t) - \sigma_{i\eta}(t) - \sigma_{j\eta}(t) + \sigma_{\eta\eta}(t)$$

であることから，$t \in [0, \infty)$ において

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \tau_{ii}^{\eta}(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \sigma_{ii}(t) - 2 \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \sigma_{i\eta}(t) + \sigma_{\eta\eta}(t) \tag{2.41}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) \pi_j(t) \tau_{ij}^{\eta}(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) \pi_j(t) \sigma_{ij}(t) - \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \sigma_{i\eta}(t) - \sum_{j=1}^{n} \pi_j(t) \sigma_{j\eta}(t) + \sigma_{\eta\eta}(t) \tag{2.42}$$

となる．(2.10) 式より

$$\gamma_{\pi}^{*}(t) = \frac{1}{2} \Bigl(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \sigma_{ii}(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) \pi_j(t) \sigma_{ij}(t) \Bigr)$$

であり (2.41) と (2.42) から，

$$\gamma_{\pi}^{*}(t) = \frac{1}{2} \Bigl(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \tau_{ii}^{\eta}(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t) \pi_j(t) \tau_{ij}^{\eta}(t) \Bigr) \tag{2.43}$$

が導かれる．ここで $\eta = \pi$ とすると (2.25) 式より

$$\pi(t) \tau^{\pi}(t) \pi^{T}(t) = \bigl(\pi(t) - \pi(t)\bigr) \sigma(t) \bigl(\pi(t) - \pi(t)\bigr)^{T} = 0$$

よって (2.43) は (2.40) となる． □

Proposition 2.19. π を非負のウェイトを持つポートフォリオとするとき，

$$\gamma_\pi^*(t) \geq 0 \tag{2.44}$$

となる．また，すべての i に対して $0 \leq \pi_i(t) < 1$ であるとき，

$$\gamma_\pi^*(t) > 0 \tag{2.45}$$

である．

Proof. 式 (2.19) より $\tau_{ii}^\pi(t) \geq 0$ であるので，(2.40) 式の右辺のすべての項は非負である．よって，(2.44) は示された．

$0 \leq \pi_i(t) < 1$ という条件はウェイト $\pi_1(t), \ldots, \pi_i(t)$ のうち少なくとも二つは正となることを意味している．Lemma 2.10 より，τ^π は半正値でランク $n-1$ であるので，$i = 1, \ldots, n$ に対して，

$$\tau_{ii}^\pi(t) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)\tau^\pi(t)(0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T \geq 0 \tag{2.46}$$

となる．$\tau^\pi(t)$ はランク $n-1$ であるので，高々第 i 要素だけが 1 であるような値に対し，(2.46) 式は成り立つ．また，$\pi_1(t), \ldots, \pi_n(t)$ のうち少なくとも二つが正であるので，(2.40) 式の右辺は正となり，(2.45) は証明された．□

Lemma 2.20. π を非退化市場において非負のウェイトを持つポートフォリオとする．そのとき，次式を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する．

$$\gamma_\pi^*(t) \geq \varepsilon\bigl(1 - \pi_{\max}(t)\bigr)^2 \tag{2.47}$$

Proof. π_i は非負であり Lemma 2.17 を満たすような ε に関して Lemma 2.18 より，

$$\gamma_\pi^*(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\tau_{ii}^\pi(t) \geq \frac{\varepsilon}{2}\bigl(1 - \pi_{\max}(t)\bigr)^2$$

が成り立つ．□

Lemma 2.21. 市場において有界な分散を持ち，$0 \leq \pi_i(t) < 1$ を満たすようなポートフォリオ π を考える．そのとき，次式を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する．

$$\pi_{\max}(t) \leq 1 - \varepsilon\gamma_\pi^*(t) \tag{2.48}$$

Proof. 市場は有界な分散を持つとの仮定より (2.7) 式から，次式を満たすような M を選択することができる．

$$x\sigma(t)x^T \leq M||x||^2 \tag{2.49}$$

ここで第 i 要素だけが 1 で他の要素が 0 であるような $x = \bigl(0, \ldots, 1, \ldots, 0\bigr)$ を考えると，(2.49) より $1 \leq i \leq n$ に対して，

$$\sigma_{ii}(t) \leq M \tag{2.50}$$

である．任意の整数 k に関して $1 \leq k \leq n$，$\pi_k(t) < 1$ であるとし $i = 1, \ldots, n$ に対して，

$$\eta_i(t) = \begin{cases} \pi_i(t)/\bigl(1 - \pi_k(t)\bigr) & \text{if } i \neq k \\ 0 & \text{if } i = k \end{cases} \tag{2.51}$$

と定義する．$\big(\eta_1(t),\dots,\eta_n(t)\big)$ は非負のウェイトを持つポートフォリオ η を定義する．(2.50) より，

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t)\sigma_{ii}(t)\le M \tag{2.52}$$

である．ポートフォリオ η の分散 $\sigma_{\eta\eta}$ は，

$$\sigma_{\eta\eta}(t)=\eta\sigma(t)\eta^T=\eta\xi(t)\xi^T(t)\eta^T=\eta\xi(t)\big(\eta\xi(t)\big)^T\ge 0$$

となり非負であることから (2.52) より，

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t)\sigma_{ii}(t)-\sigma_{\eta\eta}(t)\le M \tag{2.53}$$

である．次に，

$$x=\big(\eta_1(t),\dots,\eta_{k-1}(t),\eta_k(t)-1,\eta_{k+1}(t),\dots,\eta_n(t)\big)$$

とすると，

$$x\sigma(t)x^T=\sigma_{kk}(t)-2\sigma_{k\eta}(t)+\sigma_{\eta\eta}(t) \tag{2.54}$$

であることがわかる．また，x の第 k 要素は定義より $\eta_k=0$ であるので，

$$x=\big(\eta_1(t),\dots,\eta_{k-1}(t),-1,\eta_{k+1}(t),\dots,\eta_n(t)\big)$$

とすることができる．このとき $||x||^2\le 2$ となり $k=1,\dots,n$ に対して (2.49) と (2.54) より，

$$\sigma_{kk}(t)-2\sigma_{k\eta}(t)+\sigma_{\eta\eta}(t)\le 2M \tag{2.55}$$

となる．(2.53) と (2.55) の関係式と (2.10) より，

$$\begin{aligned}
2\gamma_\pi^*&=\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\sigma_{ii}(t)-\sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)\\
&=\pi_k(t)\sigma_{kk}(t)+\big(1-\pi_k(t)\big)\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t)\sigma_{ii}(t)\\
&\quad-\pi_k^2(t)\sigma_{kk}(t)-2\pi_k(t)\big(1-\pi_k(t)\big)\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t)\sigma_{ik}(t)\\
&\quad-\big(1-\pi_k(t)\big)^2\sum_{i,j=1}^{n}\eta_i(t)\eta_j(t)\sigma_{ij}(t)\\
&=\big(\pi_k(t)-\pi_k^2(t)\big)\big(\sigma_{kk}(t)-2\sigma_{k\eta}(t)+\sigma_{\eta\eta}(t)\big)\\
&\quad+\big(1-\pi_k(t)\big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t)\sigma_{ii}(t)-\sigma_{\eta\eta}(t)\Big)\\
&\le\big(1-\pi_k(t)\big)\big(2M+M\big)
\end{aligned}$$

となる．したがって (2.48) 式は $\varepsilon=2/(3M)$ とすれば導かれる． □

Proposition 2.22. 市場 $\mathcal{M}$ が非退化で分散化しているとき，次式を満たすような $\delta>0$ が存在する．

$$\gamma_\mu^*(t)\ge\delta \tag{2.56}$$

逆に $\mathcal{M}$ の分散が有界であり，(2.56) を満たすような $\delta>0$ が存在するとき，$\mathcal{M}$ は分散化されている．

Proof. $\mathcal{M}$ が非退化で分散化しているとする．そのとき Definition 2.16 より次式を満たす $\delta_0 > 0$ が存在する．

$$\mu_{\max}(t) \leq 1 - \delta_0$$

$\mathcal{M}$ は非退化であることから Lemma 2.20 より，次式を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する．

$$\gamma_\mu^*(t) \geq \varepsilon\bigl(1 - \mu_{\max}(t)\bigr)^2$$

以上より，

$$\gamma_\mu^*(t) \geq \varepsilon\delta_0^2$$

となり (2.56) が導かれる．

次に $\mathcal{M}$ が有界な分散を持ち (2.56) を満たすような $\delta_1 > 0$ が存在すると仮定する．$\mathcal{M}$ の分散が有界であることは，Lemma 2.21 より次式を満たすような $\varepsilon > 0$ が存在することを意味する．

$$\mu_{\max}(t) \leq 1 - \varepsilon\gamma_\mu^*(t) \leq 1 - \varepsilon\delta_1$$

したがって $\mathcal{M}$ は分散化している． □

2.4.2 エントロピーによる分散化

エントロピー関数 $\mathbf{S}$ を以下の式で定義する．

$$\mathbf{S}(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i$$

$$\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 1,\quad 0 < x_i < 1,\quad i = 1, \ldots, n\}$$

Definition 2.23. μ を市場ポートフォリオとするとき，マーケットエントロピー過程 $\mathbf{S}(\mu)$ を以下の式で定義する．

$$\mathbf{S}\bigl(\mu(t)\bigr) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \log \mu_i(t)$$

$\mathbf{S}(\mu)$ は連続セミマルチンゲールであり $0 < \mathbf{S}\bigl(\mu(t)\bigr) \leq \log n$ である．

Definition 2.16 は市場が分散的であるかどうかの基準であったのに対し，Definition 2.23 で定義されるエントロピーは市場の分散化の程度を測るための尺度である．

Proposition 2.24. 市場 $\mathcal{M}$ が分散化しているとき，次式を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する．

$$\mathbf{S}\bigl(\mu(t)\bigr) \geq \varepsilon \tag{2.57}$$

Proof. Δ^n を閉包に拡張すると，

$$\overline{\Delta}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 1,\quad 0 \leq x_i \leq 1,\quad i = 1, \ldots, n\}$$

$\mathbf{S}$ はコンパクト集合 $\overline{\Delta}^n$ 上では非負の値をとり，$\mathbf{S}(x) = 0$ となるのは頂点のときだけである．$\overline{\Delta}^n$ の頂点の近傍を除いたとき，$\mathbf{S}$ は $\overline{\Delta}^n$ の残りの x では，0 をとらない． □

Proposition 2.24 は単一株式に資産が集中していなければ，エントロピーは ε 以上になることを主張しているに過ぎない．

Definition 2.25. μ を市場ポートフォリオとする．次式で定義されるようなウェイトを持つポートフォリオ π をエントロピーウェイトポートフォリオと呼ぶ．

$$\pi_i(t) = \frac{-\mu_i(t)\log\mu_i(t)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)} \tag{2.58}$$

エントロピーウェイトポートフォリオがポートフォリオの条件である Definition 2.5 を満たすことは容易に確かめることができ，このとき π は $\mathbf{S}$ によって生成されたという．市場ポートフォリオに対するポートフォリオの相対収益率は，この $\mathbf{S}$ によって表現できることを示す．

Theorem 2.26. μ を市場ポートフォリオ，π をエントロピーウェイトポートフォリオ，Z_μ と Z_π をそれぞれのポートフォリオの価値過程とする．そのとき，次式を満足する．

$$d\log\mathbf{S}\big(\mu(t)\big) = d\log\big(Z_\pi(t)/Z_\mu(t)\big) - \frac{\gamma_\mu^*(t)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}dt \tag{2.59}$$

Proof. (2.30) から，

$$d\langle\mu_i,\mu_j\rangle_t = \mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt$$

また，伊藤の公式を用いて以下の式で表せる．

$$\begin{aligned} d\log\mathbf{S}\big(\mu(t)\big) =& \sum_{i=1}^n D_i\log\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)d\mu_i(t) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n D_{ij}\log\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned} D_{ij}\log S(x) = D_j\left(\frac{D_iS(x)}{S(x)}\right) &= \frac{D_{ij}S(x)S(x) - D_iS(x)D_jS(x)}{S^2(x)} \\ &= \frac{D_{ij}S(x)}{S(x)} - \frac{D_iS(x)}{S(x)} \times \frac{D_jS(x)}{S(x)} \\ &= \frac{D_{ij}S(x)}{S(x)} - D_i\log S(x)D_j\log S(x) \end{aligned} \tag{2.61}$$

$D_i\mathbf{S}(x) = -\log x_i - 1$ であるので，(2.60)，(2.61) を用いると，以下の式で表せる．

$$\begin{aligned} d\log\mathbf{S}\big(\mu(t)\big) =& \sum_{i=1}^n \frac{D_i\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}d\mu_i(t) \\ &+ \sum_{i,j=1}^n\left(\frac{D_{ij}\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)} - \frac{D_i\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)D_j\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}{\mathbf{S}^2\big(\mu(t)\big)}\right)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt \\ =& -\sum_{i=1}^n\frac{\log\big(\mu_i(t)\big)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}d\mu_i(t) - \frac{1}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}\sum_{i=1}^n d\mu_i(t) \\ &- \sum_{i,j=1}^n\frac{\big(\log\mu_i(t)+1\big)\big(\log\mu_j(t)+1\big)}{2\mathbf{S}^2\big(\mu(t)\big)}\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt \\ &- \frac{1}{2\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}\sum_{i=1}^n\mu_i(t)\tau_{ii}(t)dt \end{aligned} \tag{2.62}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \big(\log \mu_i(t) + 1\big)\big(\log \mu_j(t) + 1\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt& \\
= \sum_{i,j=1}^{n} \log \mu_i(t) \log \mu_j(t) \mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt& \\
+ 2\sum_{i,j=1}^{n} \log \mu_i(t) \mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt& \\
+ \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt& \\
= \sum_{i,j=1}^{n} \log \mu_i(t) \log \mu_j(t) \mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt&
\end{aligned}
$$

Lemma 2.10 より $\mu(t)$ は $\tau(t)$ の零空間であり，$\sum_{i=1}^{n} d\mu_i = 0$ なので，(2.62) は以下の式で表せる．

$$
\begin{aligned}
d \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) = &- \sum_{i=1}^{n} \frac{\log\big(\mu_i(t)\big)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)} d\mu_i(t) \\
&- \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\log \mu_i(t) \log \mu_j(t)}{2\mathbf{S}^2\big(\mu(t)\big)} \mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt \\
&- \frac{1}{2\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t)\tau_{ii}(t)dt
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

Proposition 2.13 より，

$$
\begin{aligned}
d \log\big(Z_\pi(t)/Z_\mu(t)\big) &= \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) d \log \mu_i(t) + \gamma_\pi^*(t)dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)} d\mu_i(t) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}(t)dt \qquad (2.64) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\log \mu_i(t)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)} d\mu_i(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\log \mu_i(t) \log \mu_j(t)}{2\mathbf{S}^2\big(\mu(t)\big)} \mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt \qquad (2.65)
\end{aligned}
$$

(2.64) は (2.29) と (2.43) より示すことができる．よって，(2.59) は (2.40)，(2.63)，(2.65) から導き出せる． □

Theorem 2.26 より市場エントロピーの対数は次式のようにセミマルチンゲールの形式で表現することができる．

$$
d \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) = \left(\gamma_\pi(t) - \gamma_\mu(t) - \frac{\gamma_\mu^*(t)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}\right)dt + \sum_{i,j=1}^{n} \big(\pi_i(t) - \mu_i(t)\big)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t) \tag{2.66}
$$

市場が長期的に安定的であることは，以下の条件を満たす必要がある．

$$
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \mathbf{S}\big(\mu(T)\big) = 0
$$

この安定性とは対数エントロピーが平均回帰し，長期的な観点から平均的にゼロになることを意味している．(2.66) より

$$
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \mathbf{S}\big(\mu(T)\big) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\gamma_\pi(t) - \gamma_\mu(t) - \frac{\gamma_\mu^*(t)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}\right)dt
$$

Lemma 2.15 より (2.66) の最後の項がなくなる．よって，

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\gamma_\pi(t)-\gamma_\mu(t)-\frac{\gamma_\mu^*(t)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}\right)dt=0$$

ゆえに，長期的にエントロピーウェイトポートフォリオのほうが市場ポートフォリオより優位であることがわかる．

Corollary 2.27. μ を市場ポートフォリオ，π をエントロピーウェイトポートフォリオとして，市場 $\mathcal{M}$ は非退化で分散的とすると，十分大きな T に対して，

$$Z_\pi(T)/Z_\pi(0)>Z_\mu(T)/Z_\mu(0)\quad\text{a.s.}\tag{2.67}$$

となる．

Proof. (2.59) の両辺を積分すると，

$$\begin{aligned}\log\mathbf{S}\big(\mu(T)\big)-\log\mathbf{S}\big(\mu(0)\big)=&\log\big(Z_\pi(T)/Z_\mu(T)\big)\\&-\log\big(Z_\pi(0)/Z_\mu(0)\big)-\int_0^T\frac{\gamma_\mu^*(T)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}dt\end{aligned}$$

式変形をすると，以下のようになる．

$$\begin{aligned}\log\big(Z_\pi(T)/Z_\pi(0)\big)=&\log\big(Z_\mu(T)/Z_\mu(0)\big)\\&+\log\big(\mathbf{S}(\mu(T))/\mathbf{S}(\mu(0))\big)+\int_0^T\frac{\gamma_\mu^*(t)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}dt\end{aligned}$$

ここで，すべての t に対して，$0<\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)\le\log n$ なので，$\mathbf{S}\big(\mu(0)\big)\le\log n$ である．Proposition 2.24 より分散化市場では，$\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)>\delta_1$ を満たす δ_1 が存在する．また，Proposition 2.22 より，市場が非退化で，分散的ならば，$\gamma_\mu^*(t)>\delta_2$ を満たす $\delta_2>0$ が存在する．よって，

$$\log\big(Z_\pi(T)/Z_\pi(0)\big)>\log\big(Z_\mu(T)/Z_\mu(0)\big)+\log\delta_1-\log\log n+\frac{\delta_2T}{\log n}$$

(2.67) を満たす T は $T>\delta_2^{-1}\log n(\log\log n-\log\delta_1)$ である． □

以上より，非退化で分散化された市場において，エントロピー関数によって生成されたポートフォリオは市場ポートフォリオに優越することが明らかとなった．次節では，エントロピー関数をより一般化していく．

3　生成ポートフォリオ

本節では，前節のエントロピー関数を生成関数として一般化し，その生成関数によって生成されるポートフォリオを導く．次に，いくつかの例題を通し生成関数の特徴を見ていく．その後，分散化測度の概念を定義し，再び例題を考察する．

3.1　生成関数

Definition 3.1. ポートフォリオ生成関数は次式で表される開単体上に実数値関数として定義される．

$$\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 1,\quad 0 < x_i < 1,\quad i = 1, \ldots, n\}$$

Definition 3.2. $\mathbf{S}$ を Δ^n 上に定義された正の連続関数とし π をポートフォリオとする．そのとき次式を満たすような可測な有界変動過程 Θ が存在すれば $\mathbf{S}$ は π を生成する．

$$\log\bigl(Z_\pi(t)/Z_\mu(t)\bigr) = \log \mathbf{S}\bigl(\mu(t)\bigr) + \Theta(t) \tag{3.1}$$

過程 Θ は $\mathbf{S}$ に関するドリフト過程と呼ばれる．

$\mathbf{S}$ が π を生成したとき，$\mathbf{S}$ は π の生成関数と呼ばれ，π は関数的に生成されたという．$\log\bigl(Z_\pi(t)/Z_\mu(t)\bigr)$ と $\log \mathbf{S}(\mu)$ は連続かつ適合であることから，Θ もまた連続かつ適合である．Θ が有界変動であるので $\log \mathbf{S}(\mu)$ は連続セミマルチンゲールとなる．したがって (3.1) は次式のように微分形式で表現することができる．

$$d\log\bigl(Z_\pi(t)/Z_\mu(t)\bigr) = d\log \mathbf{S}\bigl(\mu(t)\bigr) + d\Theta(t) \tag{3.2}$$

Theorem 3.3. すべての i に対して $x_i D_i \log \mathbf{S}(x)$ が Δ^n 上で有界であり，$\mathbf{S}$ が Δ^n の近傍 U の上に定義される正の C^2 関数であるとする．そのとき $\mathbf{S}$ は以下で定義されるようなポートフォリオ π を生成する．

$$\pi_i(t) = \Bigl(D_i \log \mathbf{S}\bigl(\mu(t)\bigr) + 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) D_j \log \mathbf{S}\bigl(\mu(t)\bigr)\Bigr)\mu_i(t) \tag{3.3}$$

ドリフト過程 Θ は次式のようになる．

$$d\Theta(t) = \frac{-1}{2\mathbf{S}\bigl(\mu(t)\bigr)} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}\mathbf{S}\bigl(\mu(t)\bigr)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt \tag{3.4}$$

Proof. (2.60) 式より $\log \mathbf{S}$ に伊藤の公式を適用すると，

$$\begin{aligned} d\log \mathbf{S}\bigl(\mu(t)\bigr) = &\sum_{i=1}^{n} D_i \log \mathbf{S}\bigl(\mu(t)\bigr) d\mu_i(t) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} \log \mathbf{S}\bigl(\mu(t)\bigr)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt \end{aligned} \tag{3.5}$$

であった．また式 (2.61) より，

$$D_{ij} \log \mathbf{S}(x) = \frac{D_{ij}\mathbf{S}(x)}{\mathbf{S}(x)} - D_i \log \mathbf{S}(x) D_j \log \mathbf{S}(x)$$

である．このことから (3.5) は，

$$
\begin{aligned}
d\log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) &= \sum_{i=1}^{n} D_i \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) d\mu_i(t) \\
&\quad + \frac{1}{2\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} D_i \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) D_j \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

となる．(2.33) 式は (2.29) と (2.43) より，

$$
\begin{aligned}
d\log\big(Z_\pi(t)/Z_\mu(t)\big) &= \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) d\log \mu_i(t) + \gamma_\pi^*(t)dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\bigg(\frac{d\mu_i(t)}{\mu_i(t)} - \frac{1}{2}\tau_{ii}(t)dt\bigg) \\
&\quad + \frac{1}{2}\bigg(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\tau_{ii}(t) - \sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}(t)\bigg)dt \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)}d\mu_i(t) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}(t)dt
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

とすることができる．ここで $\varphi(t)$ と $\pi_i(t)$ を次のように定義する．

$$
\varphi(t) = 1 - \sum_{j=1}^{n}\mu_j(t) D_j \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) \tag{3.8}
$$

$$
\pi_i(t) = \Big(D_i \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) + \varphi(t)\Big)\mu_i(t) \tag{3.9}
$$

このとき，

$$
\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t) = \sum_{i=1}^{n}\mu_i(t) D_i \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) + \varphi(t) = 1
$$

であるので (3.3) を満足する．一方 (3.7) の第 1 項は (3.8) と (3.9) を用いると，

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)}d\mu_i(t) &= \sum_{i=1}^{n} D_i \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big)d\mu_i(t) + \varphi(t)\sum_{i=1}^{n} d\mu_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} D_i \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big)d\mu_i(t)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

となる．ただし，$\sum_{i=1}^{n} d\mu_i(t) = 0$ である．(3.7) の第 2 項も Lemma 2.10 の $\mu(t)$ は $\tau(t)$ の零空間

であることを用いると，(3.8) と (3.9) より，

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}(t) &= \sum_{i,j=1}^{n} D_i \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) D_j \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t) \\
&\quad + 2\varphi(t) \sum_{i,j=1}^{n} D_i \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t) \\
&\quad + \varphi^2(t) \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} D_i \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) D_j \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t) \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

と表すことができる．したがって (3.7) は (3.10) と (3.11) より次のようになる．

$$
\begin{aligned}
d\log\big(Z_\pi(t)/Z_\mu(t)\big) &= \sum_{i=1}^{n} D_i \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) d\mu_i(t) \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} D_i \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) D_j \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

よって (3.6) と (3.12) より，

$$
d\log\big(Z_\pi(t)/Z_\mu(t)\big) = d\log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) - \frac{1}{2\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt
$$

となることから (3.2) に従いドリフト過程が (3.4) となることが導かれる． □

Theorem 3.8 によると，ウェイト $\pi_1, \ldots, \pi_n$ は市場の共分散構造ではなく市場ウェイトのみに依存する．共分散構造は相対共分散項 $\tau_{ij}(t)$ としてドリフト過程 $d\Theta(t)$ に現れるだけである．

Example 3.4. 加重平均は市場における資産の集中を測るための尺度として用いられる．加重平均の価値は,

$$
\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t)X_i(t)
$$

で表される．投資比率の加重平均は,

$$
\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2(t)
$$

となる．この加重平均の平方根をとった次式をポートフォリオ π の生成関数とする．

$$
\mathbf{S}(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2} \qquad (3.13)
$$

(3.13) が生成するポートフォリオのウェイトおよびドリフト過程を Theorem 3.8 に従って求める．まず,

$$
\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\log \mathbf{S}(x)\big) = \frac{x_i}{\mathbf{S}^2(x)}
$$

であるので (3.3) より,

$$
\begin{aligned}
\pi_i(t) &= \left(\frac{\mu_i(t)}{\mathbf{S}^2\big(\mu(t)\big)} + 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j^2(t)}{\mathbf{S}^2\big(\mu(t)\big)}\right)\mu_i(t) \\
&= \frac{\mu_i^2(t)}{\mu_1^2(t) + \cdots + \mu_n^2(t)}
\end{aligned}
$$

となる．これより $\mathbf{S}$ の偏微分，二階偏微分は以下のようになる．

$$\frac{\partial \mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}{\partial \mu_i(t)} = \frac{\mu_i(t)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}{\partial \mu_i^2(t)} = \frac{1-\pi_i(t)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}$$

よって，(3.4) よりドリフト過程は，

$$\begin{aligned} d\Theta(t) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}\big(1-\pi_i(t)\big)\mu_i^2(t)\tau_{ii}(t)dt \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\tau_{ii}(t)dt - \sum_{i=1}^{n}\pi_i^2(t)\tau_{ii}(t)dt\Big) \\ &= -\gamma_\pi^*(t)dt \end{aligned}$$

となることが導かれる．次に (3.2) の両辺を積分すると，

$$\log\big(Z_\pi(T)/Z_\mu(T)\big) - \log\big(Z_\pi(0)/Z_\mu(0)\big) = \log \mathbf{S}\big(\mu(T)\big) - \log \mathbf{S}\big(\mu(0)\big) + \int_0^T d\Theta$$

であるので，次式のように変形できる．

$$\log\big(Z_\pi(T)/Z_\pi(0)\big) - \log\big(Z_\mu(T)/Z_\mu(0)\big) = \log \mathbf{S}\big(\mu(T)\big) - \log \mathbf{S}\big(\mu(0)\big) + \int_0^T d\Theta \tag{3.14}$$

また，

$$\log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) = \frac{1}{2}\log\Big(\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2(t)\Big)$$

であることから，(3.14) は次式のように書ける．

$$\begin{aligned} &\log\big(Z_\pi(T)/Z_\pi(0)\big) - \log\big(Z_\mu(T)/Z_\mu(0)\big) \\ &\qquad = \frac{1}{2}\log\Big(\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2(T)\Big) - \frac{1}{2}\log\Big(\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2(0)\Big) - \int_0^T \gamma_\pi^* dt \end{aligned} \tag{3.15}$$

仮に与えられた時間区間の最初と最後の時点において，投資比率の加重平均が同じであったならば，(3.15) の右辺はドリフト過程の積分のみが残ることになる．今，ポートフォリオ π は非負のウェイトを持つことから，Proposition 2.19 より超過成長率 γ_π^* は非負の値をとる．したがって，現在の仮定のもとでは，

$$\log\big(Z_\pi(T)/Z_\pi(0)\big) \le \log\big(Z_\mu(T)/Z_\mu(0)\big)$$

となることを意味する．つまり，ポートフォリオ π の収益率が市場ポートフォリオの収益率以下になる． □

Example 3.5. i 番目の会社の帳簿価格を $b_i > 0$ と仮定し，b_i は定数とする．この会社の時点 t における PBR は $X_i(t)/b_i$ である．この比率が高い（成長株），低い（割安株）で区別する際に用いられる．ここでは $\mu_i(t)/b_i$ の比率を考える．この生成関数を簿価比率生成関数と呼ぶことにする．

市場の加重平均 PBR は次式で与えられる．

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2(t)}{b_i}$$

ポートフォリオ生成関数
$$\mathbf{S}(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{b_i}\right)^{1/2}$$
は Example 3.4 と同様に計算すると，次式で与えられるようなウェイトを持つポートフォリオ π を生成する．
$$\pi_i(t)=\frac{\mu_i^2(t)}{b_i\mathbf{S}^2\big(\mu(t)\big)}$$
ドリフト過程も Example 3.4 と同様に求めることができる．
$$d\Theta(t)=-\gamma_\pi^*(t)dt$$
よって，市場の加重平均 PBR を固定すると，ポートフォリオの収益率は市場ポートフォリオの収益率を下回ることがわかる． □

Proposition 3.6. $\mathbf{S}$ をすべての $x\in\Delta^n$ に対して，行列 $\big(D_{ij}\mathbf{S}(x)\big)$ が高々一つの正の固有値を持つような生成関数とし，正の固有値が一つあるとき，その固有ベクトルは Δ^n に直交すると仮定する．π を $\mathbf{S}$ によって生成されたポートフォリオとするとき，$\pi_i(t)\geq 0$ となり，Θ は非減少となる．また，すべての $x\in\Delta^n$ に関して $\mathrm{rank}\big(D_{ij}\mathbf{S}(x)\big)>1$ となるとき，Θ は厳密に増加となる．

Proof. $\mathbf{S}$ を行列 $\big(D_{ij}\mathbf{S}(x)\big)$ が高々一つの正の固有値を持つ生成関数とし，正の固有値が存在するとき，その固有ベクトルは Δ^n に直交すると仮定する．

まず $\pi_i\geq 0$ であることを示す．任意の $x\in\Delta^n$ に対して，$x(u)\in\Delta^n(0\leq u<1)$ を次式で定義する．
$$x(u)=uv_k+(1-u)x$$
ただし，v_k を第 k 要素だけが 1 となり，他の要素が 0 となるようなベクトル $v_k=(0,\dots,1,\dots,0)$ とする．次に，
$$f(u)=\mathbf{S}\big(x(u)\big)$$
と定義すると，
$$f'(u)=D_k\mathbf{S}\big(x(u)\big)-\sum_{i=1}^{n}x_iD_i\mathbf{S}\big(x(u)\big)\tag{3.16}$$
さらに，
$$f''(u)=(v_k-x)\Big(D_{ij}\mathbf{S}\big(x(u)\big)\Big)(v_k-x)^T$$
となる．ここで，n 次元行ベクトル $\mathbf{1}=(1,\dots,1)$ を考えると，これは Δ^n に直交し，$\mathbf{1}$ と v_k-x の内積は 0 となる．すなわち，v_k-x と Δ^n は平行である．ここで $\mathbf{H}=\big(D_{ij}\mathbf{S}(x)\big)$ と置く．$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ を $\mathbf{H}$ の固有値とし，固有値 λ_k に対応する正規化された固有ベクトルを $e_k=(e_{k1},\dots,e_{kn})^T$ とする．ヘッセ行列 $\mathbf{H}$ は対称行列であるので，固有ベクトルは直交する．したがって，e_k は正規直交基底となり，直交行列 $\mathbf{U}$
$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}e_{11}&e_{21}&\dots&e_{n1}\\e_{12}&e_{22}&\dots&e_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\e_{1n}&e_{2n}&\dots&e_{nn}\end{pmatrix}$$

が得られる．また，対角要素に固有値を並べた行列を次のように定義する．

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

行列 $\mathbf{H}$ は直交行列 $\mathbf{U}$ により対角化が可能である．

$$\mathbf{U}^T\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{Q}$$

よって，

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{Q}\mathbf{U}^T \tag{3.17}$$

である．λ_j を正の固有値とし，

$$(v_k - x)\big(e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n\big) = \big(e'_1 \quad e'_2 \quad \dots \quad e'_n\big)$$

と書くことにすると，

$$\begin{aligned} &(v_k - x)\Big(D_{ij}\mathbf{S}\big(x(u)\big)\Big)(v_k - x)^T \\ &= (v_k - x)\big(e_1\ e_2\ \dots\ e_n\big)\mathbf{Q}\big(e_1\ e_2\ \dots\ e_n\big)^T(v_k - x)^T \\ &= \big(e'_1\ \dots\ e'_{j-1}\ \ 0\ \ e'_{j+1}\ \dots\ e'_n\big)\mathbf{Q}\big(e'_1\ \dots\ e'_{j-1}\ \ 0\ \ e'_{j+1}\ \dots\ e'_n\big)^T \\ &= \lambda_1 e'^2_1 + \lambda_2 e'^2_2 + \dots + \lambda_{j-1}e'^2_{j-1} + \lambda_{j+1}e'^2_{j+1} + \dots + \lambda_n e'^2_n \\ &\le 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

となる．(3.18) は j のとき正の固有値を持つと仮定より，その固有ベクトルは Δ^n に直交し $e'_j = 0$ となる．したがって，$f''(u) \le 0$ である．このことから f は $[0, 1)$ で上に凸となる．つまり，

$$\frac{f(u) - f(0)}{u - 0} \le f'(0)$$

であることを意味し，

$$f(u) \le f(0) + uf'(0), \quad 0 \le u < 1$$

である．$f(u)$ は定義より生成関数であるので Definition 3.2 より正の連続関数である．したがって，

$$0 < f(0) + uf'(0), \quad 0 \le u < 1 \tag{3.19}$$

となり (3.16) と (3.19) より，

$$0 \le \mathbf{S}(x) + D_k\mathbf{S}(x) - \sum_{i=1}^{n} x_i D_i \mathbf{S}(x)$$

となる．両辺を $\mathbf{S}$ で割ると，

$$0 \le 1 + D_k \log \mathbf{S}(x) - \sum_{i=1}^{n} x_i D_i \log \mathbf{S}(x)$$

であるので，Theorem 3.8 の (3.3) より $\pi_k(t) \ge 0$ である．

次にドリフト過程 Θ が非減少であることを証明する．行列 $\mathbf{H}$ の各要素は (3.17) より，

$$D_{ij}\mathbf{S}(\mu(t))=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_{ki}e_{kj}$$

と表せるので，

$$\sum_{i,j=1}^{n}D_{ij}\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)\mu_j(t)e_{ki}e_{kj}\tau_{ij}(t) \tag{3.20}$$

となる．λ_1 をある一つの正の固有値と仮定するとき Δ^n に直行する．一般性を失うことなく $e_1=\pm\big(n^{-1/2},\ldots,n^{-1/2}\big)$ となるような λ_1 であるとし，$\big(\tau_{ij}(t)\big)$ は $\mu(t)$ によって生成された零空間を持つ半正値である行列とする．このとき，

$$\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)\mu_j(t)e_{ki}e_{kj}\tau_{ij}(t)$$

は，次のように表現できる．

$$\begin{pmatrix}\mu_1 & \ldots & \mu_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{k1} & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & e_{kn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_{11} & \ldots & \tau_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \tau_{n1} & \ldots & \tau_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{k1} & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & e_{kn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} \tag{3.21}$$

e_1 は要素がすべて $\pm n^{-1/2}$ であるので，$\big(\tau_{ij}(t)\big)$ が $\mu(t)$ により零空間となることから，

$$\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)\mu_j(t)e_{1i}e_{1j}\tau_{ij}(t)=0$$

となる．また，$k=2,\ldots,n$ に対して (3.21) は，

$$\begin{pmatrix}e_{k1}\mu_1 & \ldots & e_{kn}\mu_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_{11} & \ldots & \tau_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \tau_{n1} & \ldots & \tau_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{k1}\mu_1\\ \vdots\\ e_{kn}\mu_n\end{pmatrix}$$

であるので，$\big(\tau_{ij}(t)\big)$ が半正値であり，e_1 のとき 0 となることから，

$$\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)\mu_j(t)e_{ki}e_{kj}\tau_{ij}(t)>0 \tag{3.22}$$

となる．固有値 $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ は正値ではないとの仮定より (3.20) は次式のようになることを意味する．

$$\sum_{i,j=1}^{n}D_{ij}\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)\le 0$$

$\mathbf{S}$ は Definition 3.2 より正の連続関数であるので，Theorem 3.8 の (3.4) から Θ は非減少であることが導かれる．

すべての $x\in\Delta^n$ に対し $\mathrm{rank}\big(D_{ij}\mathbf{S}(x)\big)>1$ となるとき，固有値 $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ のうち一つは負である．したがって (3.20)，(3.22) より，

$$\sum_{i,j=1}^{n}D_{ij}\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)<0$$

となる．すなわち (3.4) の Θ が厳密に増加であることを示している． □

3.2 時間依存型生成関数

Example 3.5 で紹介した簿価比率生成関数は帳簿価額 b_i を定数としているが実際は時間に依存して変わる．ここでは，b_i を時間に依存するものとし $b_i(t)$ として扱う方法を紹介する．

Definition 3.7. $\mathbf{S}$ を $\Delta^n \times [0,T]$ 上に定義された正の連続関数とし π をポートフォリオとする．そのとき次式を満たすような可測な有界変動過程 Θ が存在すれば $\mathbf{S}$ は π を生成する．

$$\log\bigl(Z_\pi(t)/Z_\mu(t)\bigr) = \log \mathbf{S}\bigl(\mu(t),t\bigr) - D_t \log \mathbf{S}\bigl(\mu(t),t\bigr)dt + \Theta(t) \tag{3.23}$$

過程 Θ は $\mathbf{S}$ に関するドリフト過程と呼ばれる．

Theorem 3.8. すべての i に対して $x_i D_i \log \mathbf{S}(x,t)$ が $\Delta^n \times [0,T]$ 上で有界であり，$\mathbf{S}$ が Δ^n の近傍 U の上に定義される正の $C^{2,1}$ 関数であるとする．そのとき $\mathbf{S}$ は以下で定義されるようなポートフォリオ π を生成する．

$$\pi_i(t) = \Bigl(D_i \log \mathbf{S}\bigl(\mu(t),t\bigr) + 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) D_j \log \mathbf{S}\bigl(\mu(t),t\bigr)\Bigr)\mu_i(t) \tag{3.24}$$

ドリフト過程 Θ は次式のようになる．

$$d\Theta(t) = \frac{-1}{2\mathbf{S}\bigl(\mu(t),t\bigr)} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}\mathbf{S}\bigl(\mu(t),t\bigr)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}(t)dt - D_t \log \mathbf{S}\bigl(\mu(t),t\bigr)dt \tag{3.25}$$

3.3 分散化測度

エントロピーを生成関数として一般化したように，ここでは分散化を測る尺度として一般化する．

$\mathbb{R}^n$ の部分集合上に定義された実数値関数 F は，変数 x_i の置換に対して不変であるとき対称であり，$0 < \lambda < 1$ で $x, y \in \mathbb{R}^n, F\bigl(\lambda x + (1-\lambda)y\bigr) > \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$ であるとき厳密に凹である．

Definition 3.9. Δ^n の開近傍上に定義される正の C^2 関数が対称かつ凹であるとき分散測度であるという．分散測度により生成されるポートフォリオを分散ウェイトポートフォリオと呼び，その比率を分散ウェイトと呼ぶことにする．

Proposition 3.10. $\mathbf{S}$ をドリフト過程 Θ を持つポートフォリオ π を生成する分散測度とする．このとき，Θ は非減少であり，$\mu_i(t) \le \mu_j(t)$ であることは $\pi_i(t)/\mu_i(t) \ge \pi_j(t)/\mu_j(t)$ であることを意味する．

Proof. $\mathbf{S}$ が分散測度であると仮定すると，Definition 3.9 より凹でかつ C^2 関数である．分散測度の定義域 Δ^n の開近傍は凸集合となる．また，凸集合上で凹関数であることと，C^2 関数に対して凸集合上でヘッセ行列 $\bigl(D_{ij}\mathbf{S}(x)\bigr)$ が半負値となることは同値である．半負値な行列は正の固有値を持たず，Proposition 3.6 より Θ は非減少となる．

$i < j$ に対して $x_i \le x_j$ であるような $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta^n$ とする．u に対して，

$$\begin{aligned} x(u) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, (1-u)x_i + ux_j, x_{i+1}, \ldots \\ \ldots, x_{j-1}, ux_i + (1-u)x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

と定義する．そして，$f(u) = \mathbf{S}\bigl(x(u)\bigr)$ と定義したとき，f は C^2 であり微分は，

$$f'(u) = (x_j - x_i)\Bigl(D_i\mathbf{S}\bigl(x(u)\bigr) - D_j\mathbf{S}\bigl(x(u)\bigr)\Bigr) \tag{3.26}$$

となる．f が凹であること，$\mathbf{S}$ の対称性から $f(0)=f(1)$ となることから $f'(0) \geq 0$ がわかる．さらに，$x(u)$ の定義より $x(0)=x$ であり $x_i \leq x_j$ であるので (3.26) 式は，

$$f'(0) = (x_j - x_i)\big(D_i\mathbf{S}(x) - D_j\mathbf{S}(x)\big) \geq 0$$

となる．よって $D_i\mathbf{S}(x) \geq D_j\mathbf{S}(x)$ である．この両辺を $\mathbf{S}$ で割ると $D_i \log \mathbf{S}(x) \geq D_j \log \mathbf{S}(x)$ となり，Theorem 3.8 の (3.3) より，

$$\begin{aligned}\frac{\pi_j(t)}{\mu_j(t)} &= D_j \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) + 1 - \sum_{k=1}^{n} \mu_k(t) D_k \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) \\ &\leq D_i \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) + 1 - \sum_{k=1}^{n} \mu_k(t) D_k \log \mathbf{S}\big(\mu(t)\big) = \frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)}\end{aligned}$$

である．したがって，$\mu_i(t) \leq \mu_j(t)$ に対して $\pi_i(t)/\mu_i(t) \geq \pi_j(t)/\mu_j(t)$ となる． □

Example 3.11. $0 < p < 1$ において

$$\mathbf{D}_p(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{1/p} \tag{3.27}$$

と定義したとき，これは分散化の測度である．$\mathbf{D}_p$ で生成されたポートフォリオのウェイトは，

$$\pi_i = \frac{\mu_i^p(t)}{\big(\mathbf{D}_p(\mu(t))\big)^p}$$

であり，$p \to 1$ にすると π は市場ポートフォリオに近づく．ドリフト過程は

$$d\Theta(t) = (1-p)\gamma_\pi^*(t)dt$$

となる．

$\mathbf{D}_p$ 関数はエントロピー関数より，ポートフォリオを生成する目的および分散化としての測度の両方の点で優越する．$\mathbf{D}_p$ をポートフォリオの生成に用いるとき，パラメーター p は生成されたポートフォリオのリスクとリターンの特性を調整するために変えることができる．さらに，$\mathbf{D}_p$ は $x_1, \ldots, x_n$ の合計が 1 とならない正の整数の場合でも大きさは不変である．

$$\frac{\mathbf{D}_p(x_1, \ldots, x_n)}{x_1 + \cdots + x_n} = \mathbf{D}_p\left(\frac{x_1}{x_1 + \ldots + x_n}, \ldots, \frac{x_n}{x_1 + \ldots + x_n}\right) \tag{3.28}$$

$\mathbf{D}_p$ を標準化すると，

$$\widetilde{\mathbf{D}}_p(x) = \left(n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \tag{3.29}$$

となる． □

Example 3.12. ジニ係数は経済学において資産配分の分散を測る指標として使われている．一般的に次式のように定義される．

$$G(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |x_i - n^{-1}| \tag{3.30}$$

この式を修正すると，

$$\mathbf{G}(x) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |x_i - n^{-1}| \tag{3.31}$$

上の式は Definition 3.9 の閉包を満たすが，C^2 関数ではない．よって，

$$\mathbf{S}(x) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - n^{-1})^2$$

生成されたポートフォリオのウェイト π_i は

$$\pi_i(t) = \left(\frac{n^{-1} - \mu_i(t)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)} + 1 - \sum_{j=1}^{n}\frac{\mu_j(t)\big(n^{-1} - \mu_j(t)\big)}{\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}\right)\mu_i(t)$$

ドリフト過程は

$$d\Theta(t) = \frac{1}{2\mathbf{S}\big(\mu(t)\big)}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2(t)\tau_{ii}(t)dt$$

を満足する． □

4　サイズ効果と PBR 効果

本章では日本における「サイズ効果」と「PBR 効果」について事前分析を行う．サイズ効果とはアノマリーと呼ばれ時価総額が大きい企業ほど収益率，成長率の平均は小さくなる傾向があることをいい，時価総額の小さい企業の収益率や成長率は高く，時として，驚異的な収益率をもたらすことがある．

PBR 効果とは株価純資産倍率（PBR：Price Book-value Ratio）が低い銘柄群で構成したポートフォリオは高い銘柄群で構成したポートフォリオよりも高いリターンをもたらす傾向があることをいう．

4.1　日本における「PBR 効果」と「サイズ効果」

4.1.1　Russell/Nomura 日本株インデックス

日本における「サイズ効果」と「PBR 効果」について Russell/Nomura 日本株インデックスの 1988 年 3 月から 2007 年 3 月までのデータを用いて分析を行う．

Russell/Nomura 日本株インデックスの特徴は以下の通りである．

- 全上場のうち浮動株調整時価総額上位 98% の銘柄から構成され，広い市場カバレッジを持つ，浮動株時価総額方式の株価指数である．
- 東証一部の上場企業のみに構成銘柄を限定せず，JASDAQ やヘラクレスを含む全市場の上場銘柄を対象に，広範な銘柄群から選択している．
- 浮動株調整を施すことにより，投資可能性に配慮している．
- Large ／ Small や Value ／ Growth の投資スタイル別のサブインデックスを持つ．
- パッシブ運用に適した Prime インデックスを持つ．
- 構成銘柄は明確な定義に基づき定量的に選定されている．

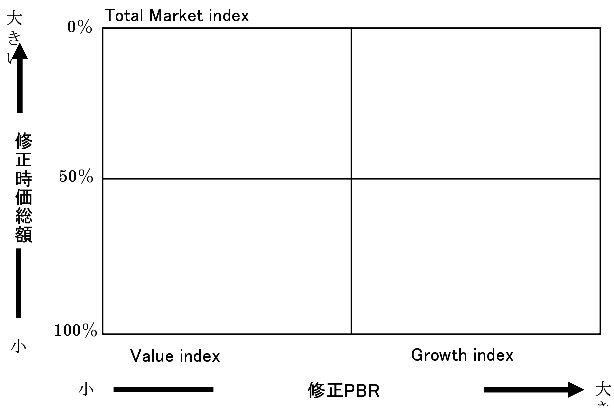

Figure 4.1. Russell/Nomura 日本株インデックススタイル

- Total Market インデックスは全上場銘柄の修正時価総額上位 98% の銘柄からなる．
- Top Cap インデックスは，Total Market インデックスの修正時価総額上位約 50% の銘柄からなる．
- Mid-Small Cap インデックスは，Total Market インデックスの修正時価総額下位約 50% の銘柄からなる．
- 上記の各インデックスは Value ／ Growth 別のサブインデックスを持つ．Total Market インデックスの修正時価総額を二分するように，構成銘柄の Value ／ Growth のウェイトが定まる．Value ／ Growth 別のサブインデックスには重複する銘柄がある．

4.1.2　サイズ効果

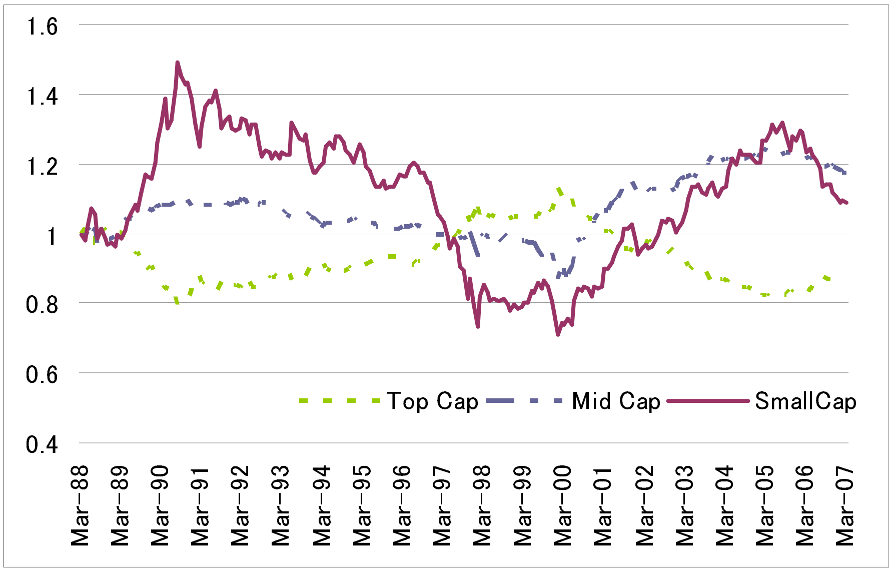

Figure 4.2. サイズ別の相対収益の推移

Table 4.1. サイズ別のパフォーマンス

	Top Cap	Mid Cap	Small Cap
相対収益率	0.8	2.3	2.5
標準偏差	5.6	5.5	6.4

- Top Cap インデックス：Total Market インデックスの修正時価総額上位約 50%
- Mid Cap インデックス：Total Market インデックスの修正時価総額中位約 35%
- Small Cap インデックス：Total Market インデックスの修正時価総額下位約 15%

サイズ効果にはマーケットにおいて大型株の株価が高くなり、相対的に小型株の株価がが割安になり小型株が再評価されるといった周期性がるように思われる，相対収益率は時価総額が小さい方が高いことが分かった．しかしパッシブ運用を行うだけでは相対収益の増大化は見込めず期間中に適切な投資比率の見直しを図るようなアクティブ運用を行う必要があると考えられる．

4.1.3 PBR 効果

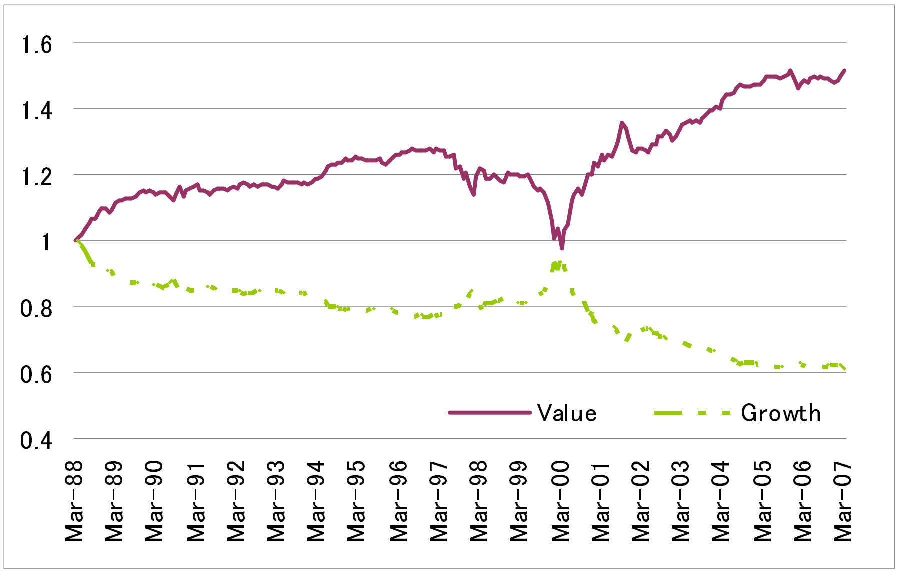

Figure 4.3. Value,Growth の相対収益率の推移

Table 4.2. Value,Growth のパフォーマンス

	Value	Growth
相対収益率	3.6	-1.0
標準偏差	5.4	5.8

サイズ効果とは違い Value/Growth には周期性は観測されなかった。Value の累積相対収益を増大を続けており Growth の累積相対収益は現象を続けている。そして，サイズ効果より相対収益が高く変動も小さいことが計測された．長期間にわたって日本でははGrowth よりも Value に優位性がある，PBR 効果を確認ですることが出来た．よって PBR 効果に着目した投資手法は日本においても有効であると思われる．また、Small に投資するよりも Value に投資する方が長期的には相対収益の増大化を図ることができると考えられる．

5　ポートフォリオ構築と実証分析

本章では理論に基づき日本株式市場のデータを用いてポートフォリオを構築する．資本分散型生成関数である Dp 関数を用いて市場に対して資産の分散化を図る関数, 割安株に対して資産の分散化を図る関数を考える．時価総額ウエイトを用いて生成される時価総額ポートフォリオと PBR ウエイトを用いて生成される PBR ポートフォリオを分析し裁定ポートフォリオになりえるのか考察を行う．さらに,「PBR 効果」に「サイズ効果」の性質を加えた改良型 PBR ポートフォリオを構築し分析を行う．

5.1　株式市場データと投資可能集合

5.1.1　株式市場データ

本論文を分析するにあたり日経 needs financial quest よりデータを取得した．Figure 5.1 は 6 年間の東京証券取引所での上場企業数と上場企業全体の時価総額の推移である．対象期間中に東京証券取引所に上場している企業の月次時価総額データ, 純資産，月次純資産倍率（PBR）を用いた．理論に基づき企業は合併や倒産は行わないと仮定する．従って上記期間において上場している企業のデータのみを対象とした．2007 年 3 月までの東京証券取引所での企業数は 1714 社，市場全体の時価総額は約 550 兆円であった．Figure 5.1 は実際の市場とは異なることに注意したい．

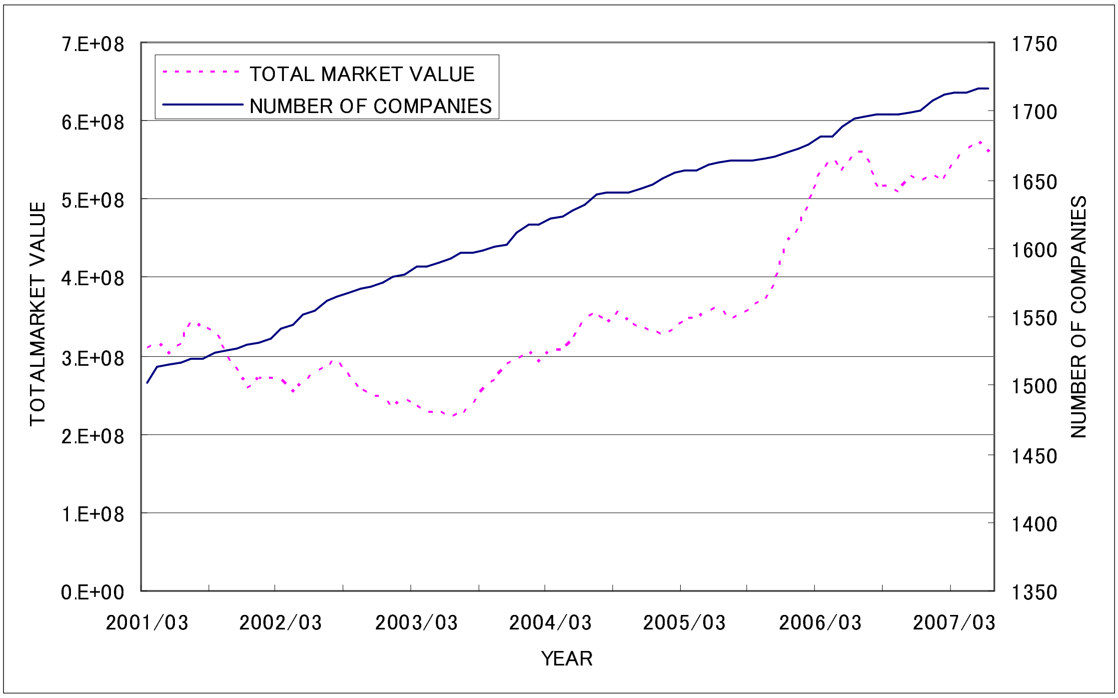

Figure 5.1. 東京証券取引所上場企業数と市場の時価総額の推移

5.2　資産分散型生成関数

ポートフォリオを生成する生成関数の表記は第 3 章で紹介した．生成関数にはエントロピー関数, ジニ関数など様々な生成関数が存在する．本節では数ある生成関数の中で資産分散型生成関数である Dp 関数から，サイズ生成関数,PBR 生成関数によってポートフォリオを構築し, 分析を行う. ここで資産分散型生成関数においてパラメータｐの値はポートフォリオのリスクとリターンの特性に応じて調整することができる．本節ではｐ＝ 0.7 として分析を行う.

$0 < p < 1$ において

$$\mathbf{D}_p(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{1/p}$$

と定義したとき，これは分散化の測度である.
$\mathbf{D}_p$ で生成された時価総額加重平均ポートフォリオのウェイトは,

$$\pi_i = \frac{X_i^p(t)}{\big(\mathbf{D}_p(X)\big)^p}$$

である, P $\rightarrow$ 1 にすると π は市場ポートフォリオに近づく. ドリフト過程は

$$d\Theta(t) = (1-p)\gamma_\pi^*(t)dt$$

5.2.1　サイズ効果ポートフォリオ

4 章において，小型株に投資をした方が収益率が高いことが分かった.「サイズ効果」を投資戦略に組み入れる場合、時価総額の小さな銘柄の保有比率を高めたポートフォリオを構築できるサイズ効果ポートフォリオを用いれば良い．サイズ効果ポートフォリオを生成する関数をサイズ生成関数とする.
市場ポートフォリオ μ の保有比率は時価総額加重平均によって求めることができる.

$$\mu_i(t) = \frac{X_i(t)}{X_1(t) + \cdots + X_n(t)}$$

$0 < p < 1$ において

$$\mathbf{D}_p(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{1/p}$$

サイズ生成生成関数は $0 < p < 1$ において

$$\mathbf{S}(\mu_(t) = \mathbf{D}_p(\mu_(t)) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i^p\Big)^{1/p}$$

と定義できる.
サイズ生成関数で生成されたサイズ効果ポートフォリオの投資比率は,

$$\pi_i = \frac{\mu_i^p(t)}{\big(\mathbf{D}_p(\mu(t))\big)^p}$$

である.

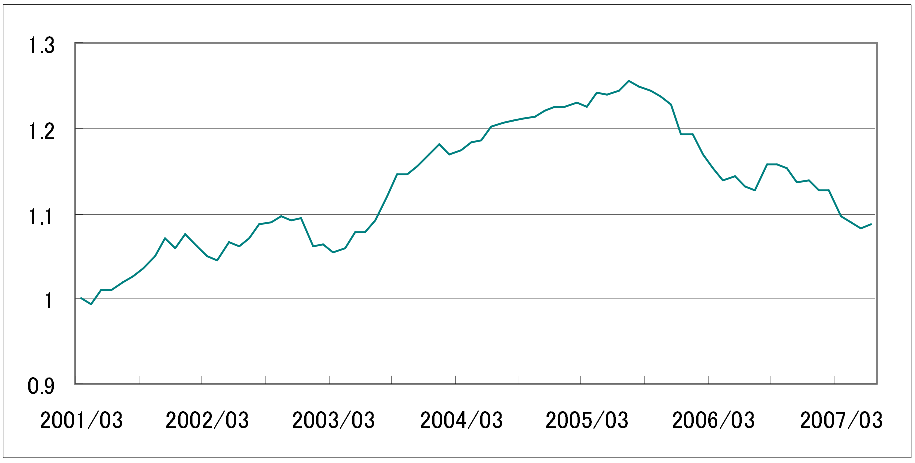

Figure 5.2. サイズ効果ポートフォリオにおける相対収益の推移（P=0.7）

5.2.2　サイズ効果関数の P 値

P 値を 1 に近づけることで市場ポートフォリオと保有比率が近くなることによって，相対収益率は小さくなり標準偏差も小さくなる．P 値を大きくすることで相対収益率を最大化することができるが市場ポートフォリオに対して分散化させせることになるのでリスクも高くなることに注意したい．また，中期的に裁定となるポートフォリオであることが示された．

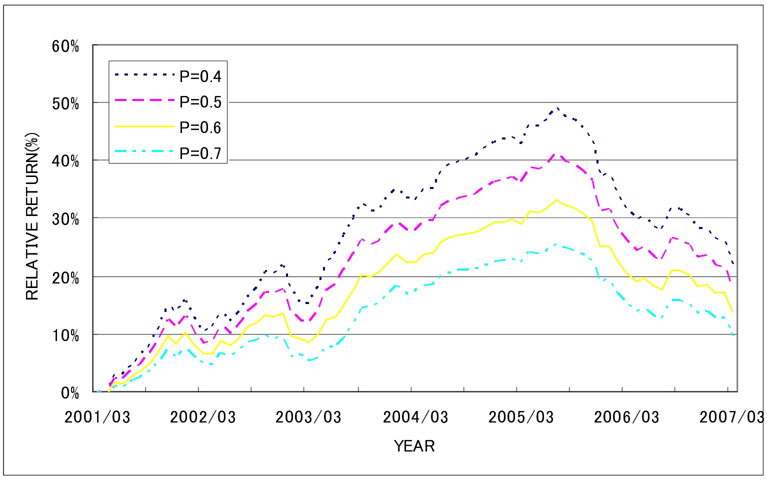

Figure 5.3. P 値の変化によるサイズ効果ポートフォリオにおける相対収益の推移

Table 5.1. P 値の変化によるサイズ効果ポートフォリオのパフォーマンスの変化

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
相対収益率 (%)	27.2	23.9	20.5	17.1	13.6	10.3	7.0	3.9	1.0
標準偏差 (%)	18.1	16.7	15.2	13.7	12.1	10.5	9.1	7.9	7.2
相対収益率/標準偏差	1.52	1.43	1.35	1.25	1.13	0.98	0.77	0.49	0.14

5.2.3 PBR 効果ポートフォリオ

PBR 効果ポートフォリオは PBR の値を加重平均した PBR ウエイトと Dp 関数で構築できる．投資戦略に PBR 効果」を組み入れる場合、PBR の値が小さい銘柄の保有比率を高めることができる PBR 効果ポートフォリオを用いれば良い．

i 番目の会社の帳簿価格を $b_i(t) > 0$ と仮定する．この会社の時点 t における $\mathrm{PBR}_i(t) = X_i(t)/b_i(t)$ である．この比率が高い（成長株），低い（割安株）で区別する際に用いられる．
PBR 効果ポートフォリオを構築する生成関数を PBR 生成関数と呼ぶことにする．

市場 PBR ウエイトを $\mu^{'}$ として次式で定義する．

$$\mu_i^{'}(t) = \frac{\mathrm{PBR}_i(t)}{\mathrm{PBR}_1(t) + \cdots + \mathrm{PBR}_n(t)}$$

PBR 生成関数は $0 < p < 1$ において

$$\mathbf{S}(\mu^{'}(t)) = \mathbf{D}_p(\mu^{'}(t)) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i^{'p}\Big)^{1/p}$$

と定義できる．PBR 生成関数で生成された PBR 効果ポートフォリオの投資比率は,

$$\pi_i = \frac{\mu_i^{'p}(t)}{\big(\mathbf{D}_p(\mu^{'}(t))\big)^p}$$

である．

PBR 関数のパラメータ P 値を 0 に近づけることによって市場ポートフォリオより PBR が低い企業の保有比率を高めたポートフォリオを構築できる特徴がある．

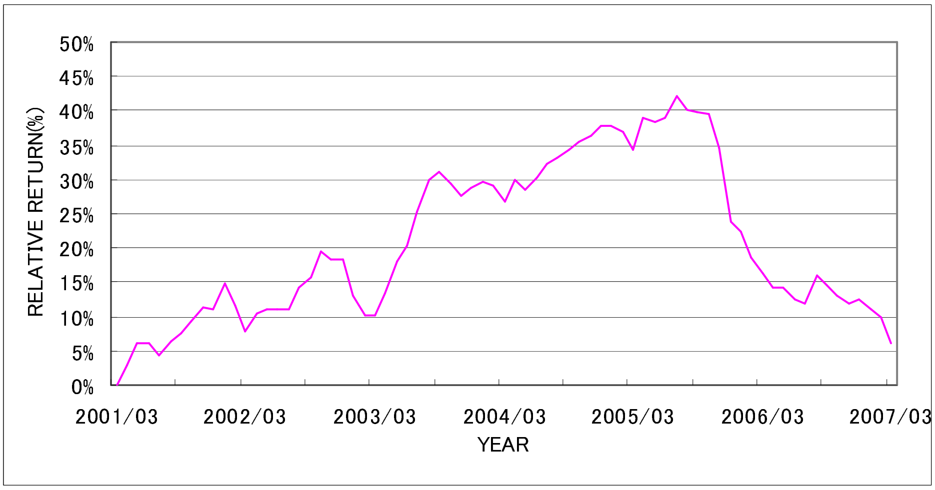

Figure 5.4. PBR 効果ポートフォリオにおける相対収益の推移（P=0.7）

5.2.4 PBR 関数の P 値

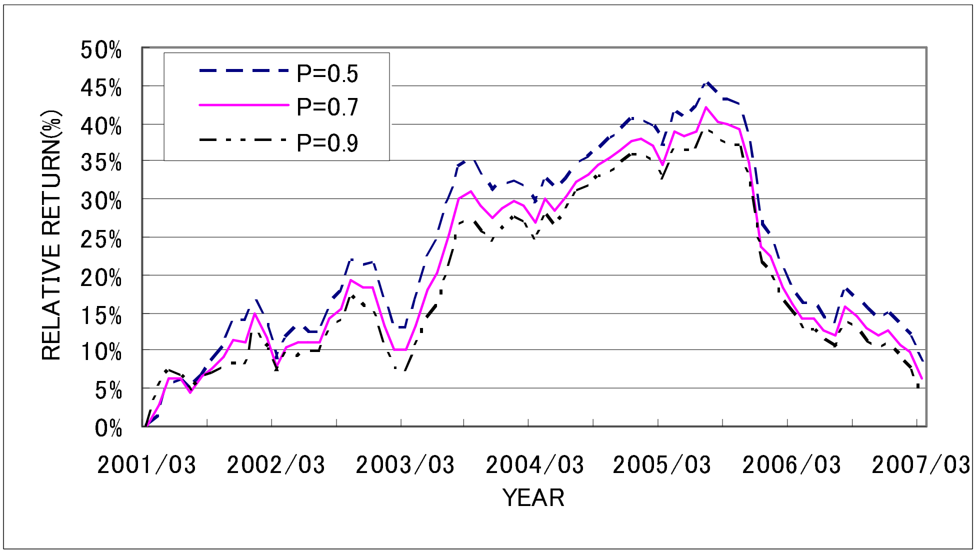

Figure 5.5. P 値の変化による PBR 効果ポートフォリオにおける相対収益の推移（P=0.7）

P の値を小さくしても標準偏差はあまり変わらないが，相対収益率の増加は確認できる．ポートフォリオの価値変動に関して PBR 値の大小は関連がないが，収益性を考えると分散化を行い低 PBR の銘柄の保有比率を高めることが有効である．また，裁定ポートフォリオであることが示せた．

Table 5.2. P 値の変化による PBR 効果ポートフォリオのパフォーマンスの変化

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
相対収益率 (%)	11.2	10.2	9.3	8.3	7.3	6.3	5.3	4.5	3.7
標準偏差 (%)	19.2	18.7	18.3	17.9	17.5	17.2	17.1	17.2	17.6
相対収益率/標準偏差	0.58	0.54	0.50	0.46	0.41	0.36	0.31	0.26	0.21

5.2.5 サイズ効果ポートフォリオと PBR 効果ポートフォリオの比較

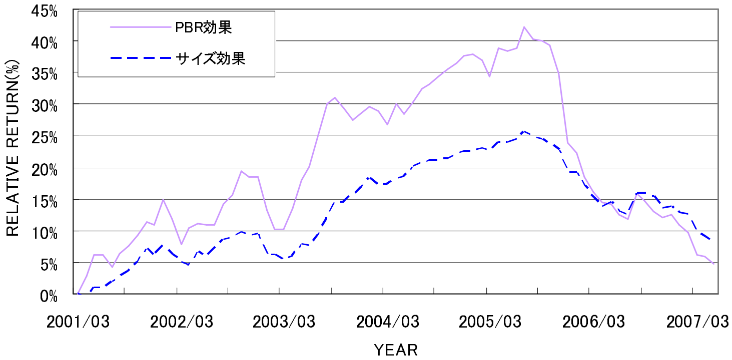

Figure 5.6. サイズ効果ポートフォリオと PBR 効果ポートフォリオの比較（P=0.7）

Figure 5.6 よりサイズ効果ポートフォリオと PBR 効果ポートフォリオは裁定ポートフォリオとなり、一般的には PBR 効果ポートフォリオの方がパフォーマンスが良いといえるが、パフォーマンスが悪い期間も存在する．Figure 5.7 は 1988 年 3 月から 2007 年 3 月まで Russell/Nomura 日本株インデックスの相対収益を示すものである．「PBR 効果」を含む割安株の方が「サイズ効果」の性質を含む小型株よりも優位性があり，PBR 効果/サイズ効果の性質を含んだ小型株/割安株の方がパフォーマンスが良いことが分かった。2006 年から後半にかけての割安株より小型株の方が相対収益の減少が大きいが本研究の結果とは逆の結果になっている. 原因として考えられるのは投資可能集合の銘柄群が金融機関などを含まない為だと考えられる．

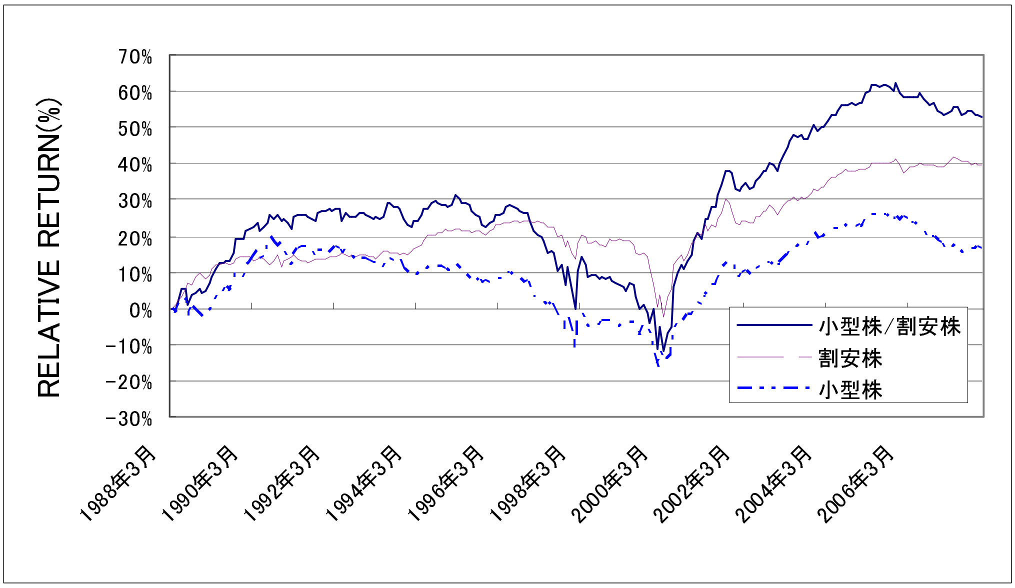

Figure 5.7. サイズ効果と PBR 効果の推移

5.3 改良型 PBR 効果ポートフォリオ

Figure 5.7 より PBR 効果/サイズ効果をの二つの特徴を踏まえたポートフォリオが個々の性質を用いた投資戦略よりも有効であることが分かった. そこで二つの性質を踏まえたポートフォリオを構築する. 改良型 PBR 関数は市場ポートフォリオの保有比率に簿価を用いて重みをつけることによって行う.

i 番目の会社の帳簿価格を $b_i(t) > 0$ と仮定し，$b_i(t)$ は定数とする．この会社の時点 t における PBR は $X_i(t)/b_i(t)$ である．この比率が高い（成長株），低い（割安株）で区別する際に用いられる．ここでは加重平均 PBR として $\mu_i(t)/b_i(t)$ の比率を考える．この生成関数を改良 PBR 生成関数と呼ぶことにする．

市場の加重平均 PBR は次式で与えられる．

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i^p(t)}{b_i(t)}$$

ポートフォリオ生成関数

$$\mathbf{S}(x,t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{b_i(t)} \right)^{1/p}$$

は，次式で与えられるようなウェイトを持つポートフォリオ π を生成する．

$$\pi_i(t) = \frac{\mu_i^p(t)}{b_i(t)\mathbf{S}^p\big(\mu(t)\big)}$$

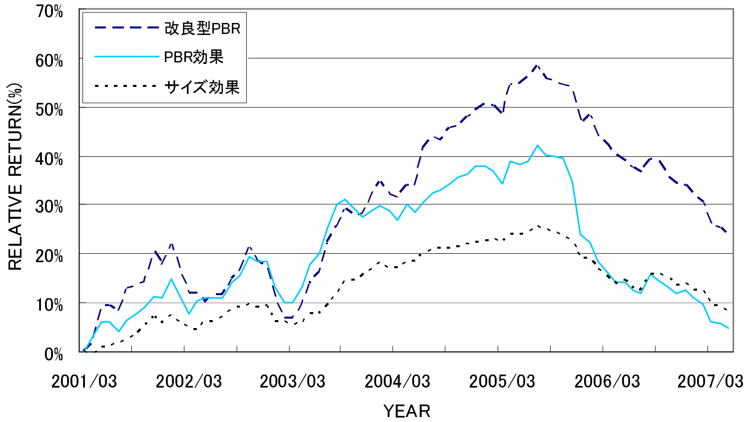

Figure 5.8. 改良型 PBR ポートフォリオによる相対収益率（P=0.7）

Table 5.3. P 値の変化による改良型 PBR ポートフォリオのパフォーマンスの変化

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
相対収益率 (%)	45.6	41.3	37.1	33.0	29.0	25.1	21.3	17.6	13.9
標準偏差 (%)	24.2	23.5	22.7	22.0	21.2	20.4	19.6	18.7	17.8
相対収益率/標準偏差	1.88	1.76	1.63	1.50	1.37	1.23	1.09	0.94	0.78

Figure 5.8 サイズ効果と PBR 効果の両方の性質を踏まえた改良型ポートフォリオは裁定ポートフォリオであることがいえた. サイズ効果ポートフォリオよりも良いことが言えるが,PBR 効果ポートフォリオと比較した場合悪い期間（2003 年）がある。不景気であるときは PBR 効果はマイナスの影響を与えるなかで時価総額に小さい銘柄に投資を行うためであると考えられる. しかし、その後の相対収益率の推移をみると明らかに改良型ポートフォリオのほうが優位であるといえる.

6　結論

6.1　総括

本論文では，Fernholz によって提唱された確率ポートフォリオ理論に基づき，アノマリーに着目した生成関数を定義し日本市場における実証分析を行った.

今回新たに提案した PBR 効果ポートフォリオ，改良型 PBR ポートフォリオは共に裁定ポートフォリオであることが示せた. 計測期間中この二つのポートフォリオは先行研究で裁定ポートフォリオであることが示されていたサイズ効果ポートフォリオよりも高い収益を上げることが確認できた. 分散化を図ることによって市場ポートフォリオに対するポートフォリオが中期的に優位である傾向が観測された. これは計測期間中の 2001 年 3 月から 2007 年 3 月において日本市場で「サイズ効果」および「PBR 効果」が計測期間中に有効であった事を示唆する. 本研究では，これら双方の特性を生かした割安株/小型株による資産の分散化を図るモデルを提案し，相対収益のさらなる高収益化を試みた. 検証の結果，他の生成関数よりも優位なポートフォリオが構築できた.

6.2　考察

「サイズ効果」と「PBR 効果」を複合した改良型 PBR ポートフォリオは個々のポートフォリオよりパフォーマンスがよい結果となった. 確率ポートフォリオ理論では時価総額が小さい銘柄に幅広く分散投資を行えば企業の倒産リスクによらず高い収益を得ることだ出来るとしているが，低 PBR 銘柄にも幅広く分散投資を行うことによって同じことが言えるのではないかと考えられる. しかし，低 PBR に分類される企業は業績が低迷している企業と市場に評価されていない企業の二種類がある. パフォーマンスをあげる為には一定の基準で投資対象を制限する必要があると考えられる. また，ポートフォリオの実際の運用に際して，リバランス時における手数料が問題となるため，最適なリバランス期間の推定が必要不可欠である.

謝辞

本論文を書くにあたり，浦谷規教授には多大なご指導を承り，深く感謝しております．また，互いに協力しながら，共に研究を進めてきた研究室の諸氏にも感謝の意を表します．多くの助言を頂いた石川敦啓君, 廣政光男君にも感謝の意を表します．最後に，6 年間に渡り経済的，精神的に援助して下さった両親および家族に深謝致します.

2008 年 2 月

大道 昭尚

参考文献

[1] Fernholz, R. (1997a). *Arbitrage in Equity Markets*. Technical report, INTECH, Princeton, NJ.

[2] Fernholz, R. (1997b). *Antitrust and the No-Arbitrage Hypothesis*. Technical report, INTECH, Princeton, NJ.

[3] Fernholz, R. (1998). *On the diversity of equity markets*. Journal of Mathematical Economics 31 (1999) 393-417.

[4] Fernholz, R. (1999). *Portfolio Generating Functions*. Technical report, INTECH, Princeton, NJ.

[5] Fernholz, R. (2000a). *Equity Portfolios Generated by Functions of Ranked Market Weights*. Technical report, INTECH, Princeton, NJ.

[6] Fernholz, R. (2000b). *The size factor in equity returns*. Technical report, INTECH, Princeton, NJ.

[7] Fernholz, R. (2002). *Stochastic Portfolio Theory*. Springer-Verlag.

[8] Karatzas, I. & Shreve, S.E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus* ; 渡邉 壽夫. (2001). ブラウン運動と確率積分. Springer-Verlag.

[9] Lamberton, D. & Lapeyre, B. (1997). *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance* ; 森平 爽一郎. (2000). ファイナンスへの確率解析. 朝倉書店.