

モード解析によるテニスラケットの振動特性 と構造最適化の研究

大館, 淳 / ODATE, Jun

(発行年 / Year)

2005-03-24

(学位授与年月日 / Date of Granted)

2005-03-24

(学位名 / Degree Name)

修士(工学)

(学位授与機関 / Degree Grantor)

法政大学 (Hosei University)

2004 年度 修士論文

論文題名 モード解析によるテニスラケットの
振動特性と構造最適化の研究

指導教授 長松昭男

大学院工学研究科

機械工学専攻修士課程

学生証番号 03R1108

オオダテジュン

氏名 大館 淳

ABSTRACT

In the today of which the harmony between amenity and environment is taken seriously, it is necessary to consider the physical and psychological effect of vibration and noise in which industrial product such as automobile and electric appliances arise on the human body.

Many products are designed by experience and intuition of the engineer at present, and they are developed by repeating trial manufacture and experiment.

In this study, it has be made that clarifies and improves the vibration characteristic in order to do the countermeasure of the vibration problem by predicting in the design development and to shorten the development time, to be a purpose.

The effect of vibration characteristic on the human was studied using the tennis racket used this time familiarly. To begin with, the experimental modal analysis was applied to 2 kinds of tennis racket, and natural frequency, natural mode and modal damping ratio were obtained. Then, the examination that it shows that the nodal position of natural mode is an important factor and that the nodal position moves is carried out. The anti-resonance point theory is used using the simple board of the aluminum as a model tennis racket, and the anti-resonance point is calculated in the general-purpose finite element program.

By the experiment, the vibration characteristic of tennis racket was proven, and it was proven that the vibration of the first mode affected the human most.

Then, it was possible to carry out the structural optimization of making the first mode to be a node for one excitation response point for mass of the aluminum plate circumference and the plate thickness, when the structural optimization was carried out at the first mode. However, the structural optimization was not possible for two excitation response point.

In the future, the structural optimization is carried out for two excitation response point, and it wants to carry out the structural optimization for the model of tennis racket.

目 次

第 1 章	緒論	1
1.1	目的	1
第 2 章	実験モード解析の概要	2
2.1	モード解析	2
2.1.1	自由振動	2
2.1.2	モード特性	2
2.1.3	モード解析とは	3
2.1.4	理論モード解析とは	4
2.1.5	実験モード解析とは	5
2.2	振動試験	6
2.2.1	振動試験とは	6
2.2.2	対象物の支持方法	6
2.2.2.1	自由支持	7
2.2.2.2	固定支持	7
2.2.2.3	弾性支持	8
2.2.3	打撃試験	8
2.2.3.1	打撃試験の長所	8
2.2.3.2	打撃試験の短所	9
第 3 章	モード特性同定法	10
3.1	緒言	10
3.2	周波数応答関数の理論式	11
3.2.1	一般粘性減衰	11
3.2.2	一般ヒステリシス減衰	16
3.3	従来の同定法	19
3.3.1	偏分反復法	19
3.3.2	線形直接法	20
3.3.3	計算の流れ	21
3.4	非線形最適化法	21
3.4.1	変数の縮小	21
3.4.1.1	非線形最小二乗法の適用	21
3.4.1.2	変数縮小の定式化	24
3.4.2	最適化手法による収束性改良	28

3.4.2.1	縮小因子による方法	28
3.4.2.2	最適化逆行列による方法	29
3.4.2.3	提案する方法	30
3.4.3	実行手順と計算の流れ	31
3.4.4	計算方法の改善と入力データの縮小	32
3.4.4.1	ヤコビアン行列の計算方法の改良	32
3.4.4.2	入力データの縮小	36
3.4.5	多数の固有モード効率的同定法	37
3.4.5.1	対象周波数範囲の自動最適分割	37
3.4.5.2	対象領域外の固有モードの影響	38
3.5	結言	40
第4章	テニスラケットの実験モード解析	41
4.1	はじめに	41
4.2	テニスラケット	42
4.3	振動試験	43
4.4	信号処理	47
4.5	支持条件の違い	47
4.6	実験結果	48
4.7	考察	53
第5章	実打時のテニスラケットの振動	54
5.1	はじめに	54
5.2	実打試験	54
5.3	実験モード解析との比較	57
第6章	ボール落下時の実打時の振動	58
6.1	はじめに	58
6.2	ボールの落下試験	58
6.3	実験モード解析との比較	60
第7章	反共振点移動理論を用いた構造最適化	61
7.1	はじめに	61
7.2	共振点と反共振点の計算	61
7.3	反共振点移動理論	63
7.4	質量の構造最適化	64

7.4.1	1つの加振応答点に対する構造最適化	64
7.4.2	2つの加振応答点に対する構造最適化	68
7.5	板厚の構造最適化	70
7.5.1	1つの加振応答点に対する構造最適化	70
7.5.2	2つの加振応答点に対する構造最適化	73
第8章	結論	75
8.1	結論	75
8.2	今後の予定	75
	・参考文献	76
	・謝辞	77

第1章 緒論

1.1 目的

振動は私たちの身近な至る所で発生しており、私たちと深いかかわりを持っている。喉と鼓膜と空気の振動を利用することによって会話が成立し、音は空気の振動によって伝わる。振動や音は人間に対して様々な影響を与える。人間が身近に使う機械やものは振動が小さいことや心地よく振動することが大きい商品価値になってきた。また、機械の不具合や故障の過半数は、振動が原因で発生すると言われている。

快適性や環境との調和がますます重要視される今日において、自動車やスポーツ用品など、工業製品の発生する振動・騒音の人体に与える身体的、心理的影響を考慮することが必要不可欠である。

現在は数多くの製品がエンジニアの経験と勘により設計され、試作と実験を繰り返すことにより開発されている。今後さらに厳しくなる設計条件を満たしながら振動問題を設計開発の段階で予知して対策するし、かつ、開発時間を短縮するために従来の手法より精度を上げ、新たな手法を生み出すべきである。

振動問題を解決するには、対象物の振動特性を正確に把握する必要がある。このためには有限要素法等の理論解析とともに振動実験を実施することが不可欠である。近年、振動現象の予測と現象解析にモード解析が使用され始めた。

振動実験において最近発展を遂げているのが、実験モード解析である。実験モード解析とは、実物や模型の振動実験で得られたデータから周波数応答関数を求め、実物や模型を数学的にモデル化し、固有振動数・固有モード・モード減衰比を求める一連の解析のことを言う。実験モード解析手法として非線形最適化法が提案されている。非線形最適化法は周波数領域法である偏分反復法を正確に多点応答に拡張したものである。

本研究では、実験対象としてテニスラケットを用い、その振動特性を実験モード解析を使用して解明し、実際の使用時の振動と比較検討する。

また、模型テニスラケットとしてアルミの単純板を用いて汎用有限要素法プログラムにより反共振点を算出する。アルミ板の周囲に質量を取り付け、反共振点移動理論を利用し質量を変化させることで共振峰消去の構造最適化が行なえるかの検討を行なうことを目的とする。

第2章 実験モード解析の概要

2.1 モード解析

2.1.1 自由振動

振動は自由振動，強制振動，複雑な振動に大別できる．自由振動とは，動的な外作用が変化すると必ず発生し，一旦生じれば，外から何もしないでも自分自身だけで勝手に振動し続ける．叩く，などの外作用が加わる時はもちろん，今まであった加振力が急に無くなったとき，加振の大きさ，方向，周波数が急に变化したときにも発生する．同じ物体に同じ外作用の変化があれば同じ自由振動が生じる．

自由振動は，ほとんどの場合速やかに消えてしまうため，実際の機械では強制振動ほど大きな問題は生じない．しかし実験モード解析から見ると極めて重要である．それは，強制振動や自励振動などのすべての振動を生じる元になる物体の動特性が，自由振動の中にすべて含まれているからである．したがって，自由振動を観察すれば，その物体の動特性をすべて知ることができる．

自由振動は，1自由度系では最初の振幅の大きさ，振動の速さ，減衰の速さの3つの現象で表される．多自由度系ではこれらがそれぞれ固有モード，固有振動数，モード減衰比の3つの現象に対応する．また動特性は質量，こわさ(剛性)，減衰係数の3種類である．

その中でも特に固有モード，固有振動数，モード減衰比は自由振動だけではなく，強制振動，過度応答，自励振動，サーボ特性などの動的な特性や挙動全体の性質を支配する3つの基本現象であり，モード特性と総称される．

2.1.2 モード特性

多自由度系や連続体が自由振動するときには，必ず固有モードと呼ばれるその系固有の形でしか振動できない．また各々の固有モードはそれぞれ固有振動数を有している．英語で固有モードと固有振動数をそれぞれ **natural mode** と **natural frequency** と呼ぶ．何故なら，これらが外作用を受けない自由な状態で持続する自然な(natural)振動の形であり，振動数だからである．また各固有モードによる自由振動にはモード減衰比と呼ばれる固有の減衰のしやすさを有する．

一般に N 自由度系では，自由度と同数の N 個の固有モードと，それら各々に1対1に対応する N 個の固有振動数を有する．これらのうち，最も振動数の小さい固有振動数を基本振動数と呼び，それに対応する固有モードを基本モード

と呼ぶ。これは最も小さい振動数の固有モードがその振動現象の基本的性質をきめるためにつけられた名称である。また、振動数が小さい順に数えて r 番目の ($r=1\sim N$) のものを r 次固有振動数、 r 次固有モードと呼ぶ。

3 個のモード特性のうちで、固有振動数とモード減衰比は、系全体で共通である。そして加振点や応答点が変わっても変化しない全体項である。これに対し固有モードは、系内部の応答の分布状態を示し、加振点や応答点が変わる局所項である。

モード解析では上記の 3 個のモード特性の他に、慣性拘束、剰余コンプライアンス、あるいはそれらの逆数である剰余質量と剰余剛性をモード特性として加えることがある。しかし、これらは固有モードから導くことのできる近似量であり、本質的なものではない。

また同様に、モード質量、モード剛性、およびモード減衰係数をモード特性として加えることもあるが、これらも上記の 3 個のモード特性から求めることのできる派生項であるため、本質的なものとはいえない。これらをまとめると、Fig.2.1 のようになる。

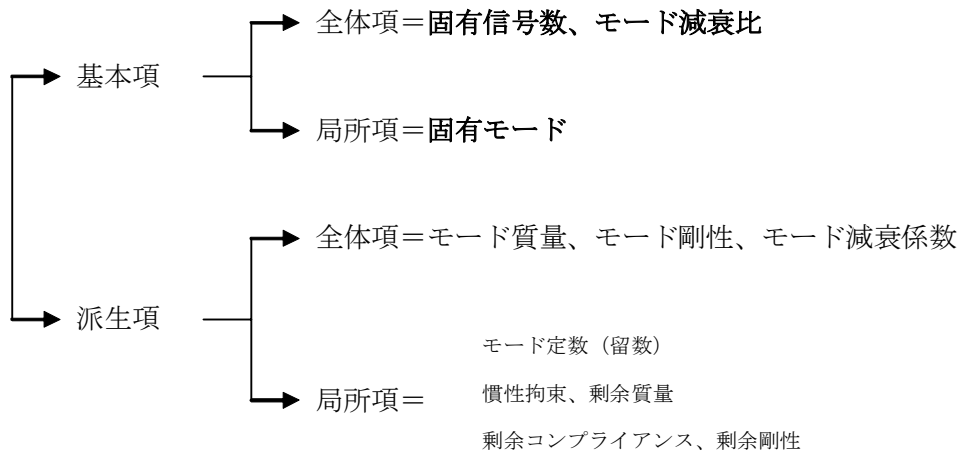


Fig.2.1 Classification of the modal property

2.1.3 モード解析とは

N 自由度系が N 個の固有モードを有すること、すなわち N 自由度系はこれら N 個の固有モード以外では振動できないということは上記した。しかし、これは実現象とは一見矛盾している。なぜならば、実際の機械や構造物の振動は、自由振動も強制振動も無限に変化できるからである。この理由を以下に示す。

1. 固有モードは振動の形を示しているだけである、よって、その大きさすなわ

ち絶対量は、自由振動なら初期外乱の大きさ、強制振動なら加振力の大きさに従い無限に変わりうる。

2. 単一の固有モードで振動することは極めてまれであり、ほとんどの振動の場合複数の固有モードが混ざり合っ一つの現象を形成している。そして、その混ざり具合が、初期外乱や加振力に従って無限に変わりうる。
3. 実際の機械や構造物はすべて連続体であり、自由度が無限大である。したがって、固有モードの数自体が無限大なのである。

これらのうち、第2の事柄すなわち、振動は複数の固有モードが混ざり合っ生じている、という事象を学問的に扱うのがモード解析(modal analysis)である。

モード解析は、20世紀初期からある機械力学の理論であり、以下の2つの長所を持っている。

1. 固有モードの直交性を利用して多自由度系の運動方程式を非連成化する。そのために、複数の1自由度微分方程式をお互いに独立に解いただけで、多自由度連立微分方程式を解くのと同様の解を得ることができる。
2. 運動方程式を固有モード毎にお互いに独立な1自由度微分方程式に分解するので、高次固有モードに相当する式を無視するだけで簡単に高次固有モードを省略できる。そして、解くべき1自由度微分方程式の数を著しく少なくすることができる。

上記の2つの長所は、有限要素法(finite element method)への適用、または機械や構造物の動特性の実験同定(experimental identification)への適用によって、急速にその有効性を増し脚光を浴びてきた。

2.1.4 理論モード解析とは

モード解析には、理論モード解析(theoretical modal analysis)と実験モード解析(experimental modal analysis)がある。

理論モード解析とは、有限要素法のような理論解析の中で用いるモード解析である。モデル化によって対象物の自由度を決めて物理モデルを作成し、運動方程式で代表される数学モデルに変換し、固有値解析によって得たモード特性で構成されるモードモデルを導く。そしてさらに、モードモデルを用いて周波数応答関数や時刻歴応答を求める。

2.1.5 実験モード解析とは

振動試験によって得られた周波数応答関数やそれを逆フーリエ変換した時刻歴単位衝撃応答を元に、それらの中に混入している誤差や目的以外の情報を排除して力学的に有意な情報だけを抽出し、系のモード特性を同定することを実験同定(experimental identification)という。そして、振動試験に続いてモード特性を同定する一連の過程を、実験モード解析という。しかし、実験モード解析を狭い意味に用いて、実験同定だけを意味することもある。

また実験同定は、周波数スペクトル曲線や時刻歴応答曲線に適合するようにモード特性を決定するので、曲線適合(curve fitting)ともいう。

理論モード解析と実験モード解析は、同じくモード解析と呼ばれている。しかし実験モード解析は、モード特性から周波数応答関数を求める理論モード解析とは全く逆の道筋をたどっている。Fig.2.2 に実験モード解析と理論モード解析の基本的流れを示す。

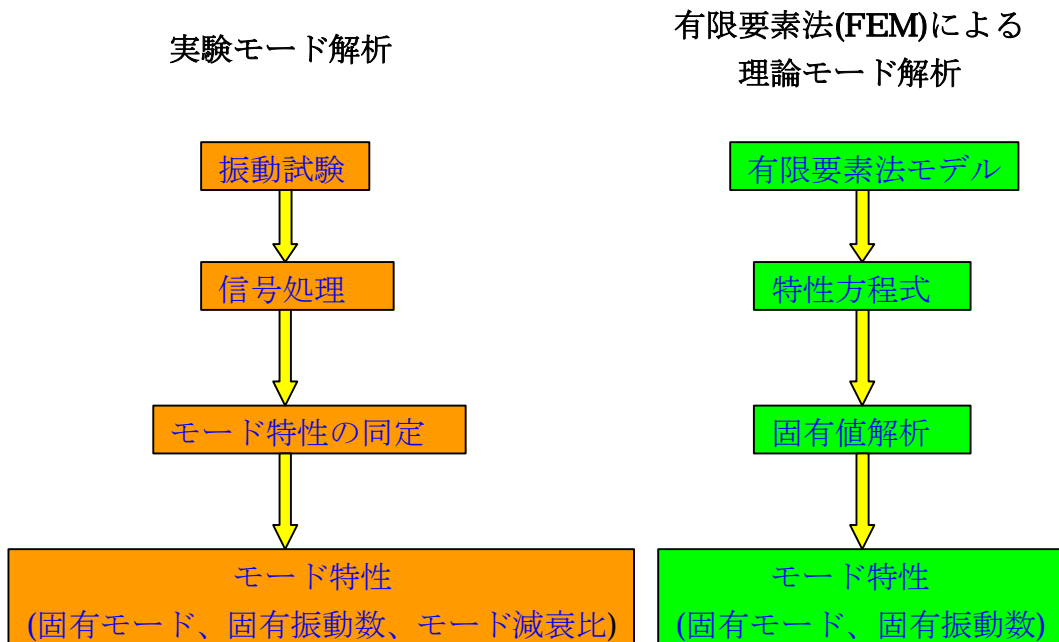


Fig.2.2 Flow of the modal analysis

2.2 振動試験

2.2.1 振動試験とは

機械や構造物に振動を発生させる目的で動的な作用を加えることを、加振または励振という。また、加振の対象である機械や構造物は、加振によって動的な応答を示す。加振入力と応答の間には、次の関係がある。

$$\text{応答} = \text{対象物の特性} \times \text{入力}$$

対象物を加振して、加振入力と応答の両方を測定し、それらの測定結果に適切な信号処理をほどこして、対象物の動特性(dynamic characteristic)を情報として含む信号を取り出す一連の操作を、振動試験(vibration testing)という。

信号は周波数応答関数として取り出すことが多い。振動試験で得られた信号は、そのままの状態を観察し、不具合対策などに役立てることもあるが、大抵は対象物の動特性を同定するための入力として用いる。また、モード特性を同定する目的で行う振動試験をモード試験(modal testing)という。

この振動試験は実験モード解析において最も重要な部分といえる。なぜならば、実験モード解析を成功させるためには、正しい周波数応答関数を測定することが第一条件だからである。モード特性同定の方法にはいろいろあるが、誤差の少ない良い周波数応答関数を入力データとして与えさえすれば、どの方法を用いても大抵は良い結果を得る。反対に、入力データが大きな誤差を含み信頼性に乏しいときは、どんな複雑で高級な同定方法を用いても、良い結果は得られない。

2.2.2 対象物の支持方法

振動試験を行うためには、まず対象になる機械や構造物、すなわち対象物を何らかの方法で支持しなければならない。対象物の支持は、ともすれば軽く扱われがちである。しかし、同一の対象物を同一の方法で加振しても、その支持方法によって応答はまったく異なったものになる。よって、目的に合った方法で支持することが非常に重要である。

対象物の支持は、自由支持(free support)、固定支持(fixed support)および弾性支持(flexible support)の3通りに大別できる。

2.2.2.1 自由支持

対象物の動きを拘束したり妨げたりしない支持方法を自由支持という。理想的には空間に浮かんだ状態を指す。しかし、この理想状態は地球に重力がある限り実現できない。よって実際には、柔らかいゴムや糸、スポンジ、空気バネの上に置くことで、実用上十分な自由支持を実現している。自由支持を実行する上で留意すべきことを以下に示す。

1. 支持物のばねこわさが、対象物の剛性に比べて十分小さいこと。そのために、支持物はできるだけ柔らかいものにすべきである。また、対象物の局部的な剛性ができるだけ大きい所を支持するようにする。
2. 剛体モードの振動数が十分小さいこと。
3. 支持物の質量が十分小さいこと。
4. 支持物による見かけの減衰の増加が十分小さいこと。
5. 測定にできるだけ影響を与えないような支持場所を選ぶこと。
6. ゴム板やスポンジは、全体にわたってべったり敷くよりも、部分的に、数箇所に、かつできるだけ剛性の高い所にできるだけ小さい面積で敷く方がよい。

以上の事項を十分満足しているか否かを、支持条件をいろいろ変えて予備試験をおこなう必要がある。もし、不十分な点があれば対策をし、最適の支持条件を選ぶ。

2.2.2.2 固定支持

固定支持とは、実用時に一部が固定された状態にある機械や構造物の動特性を、本来あるがままの状態を知りたいときに採用される支持方法である。しかし、自由支持ほど一般的な支持方法ではない。

振動試験で理想的な固定支持を実現させるためには、質量と剛性が共に無限大である物体に、溶接などで完全に一体化するように対象物を取り付ける必要がある。しかし、これは現実的に不可能である。よって実際には、質量と剛性の両方が対象物よりはるかに大きい基礎や常磐のような物体に、ボルト締めなどでしっかり取り付けた状態を固定支持とみなす。

しかし、振動試験を行う場合、固定支持はなるべく避け、できるだけ自由支持で行う方がよい。その理由を以下に示す。

1. 固定支持は自由支持よりも実現が困難である。例えば、柔らかいゴムひもで

吊るした状態や、柔らかいスポンジの上においた状態を自由支持と近似することは妥当であるが、大きい基礎に取り付けたからといって、必ずしも固定支持にはならない。よって、ある程度妥協せざるをえなくなる。

2. 自由支持の結果から固定支持の結果を導くことは可能であるが、逆は不可能である。これは、自由支持の方が固定支持よりも固定すべき点の応答を測定している分だけ自由度が多く、振動試験の結果から自由度を減らすことはできても、増やすことはできないからである。

2.2.2.3 弾性支持

大型構造物や重量機械は、自由支持も固定支持も実現しにくい。また、機械の部品の振動試験を行うときに、構造上取り外すことが出来ない場合や、組み込んだままの動特性がほしい場合がある。このとき、自由と固定の中間の支持で実験を行うことになる。このような支持方法を弾性支持と呼ぶ。弾性支持の場合、予め支持物単体の固有振動数、固有モードおよび、支持点における周波数応答関数を、計算や実験で明らかにしておく必要がある。

2.2.3 打撃試験

打撃試験(impact testing)は、FFT の開発とともに現場に急速に普及し、いまや振動試験の中で主役の座を占めている。機械の動的な性質を調べるときや不具合対策をする場合、ほとんどまず打撃加振(impact excitation)による打撃加振を行う。これは、打撃試験が手軽で短時間ででき、一見簡単そうに見えるからである。しかし実際、打撃試験はすべての振動試験の中で最もよい結果を得るのが困難な方法であると言える。なぜならば、方法の簡単さが、人間の技能や計測とデータ処理に負荷をかけることにより実現されているからである。

2.2.3.1 打撃試験の長所

以下に打撃試験の長所を示す。

1. 準備と実施の時間が、他の加振方法と比べて最も短い。
2. 打撃ハンマと加速度計と 2チャンネル FFT さえあれば実施でき、加振器を使う他の加振方法に比べて装置が簡単である。
3. 加振点の移動が極めて簡単であり、次々と場所を変えて叩いていくだけで対象物全体の振動試験ができる。

4. 加振系は、エネルギーを注入する瞬間だけ対象物に接触する。そのため、加振系が対象物に影響を与え、その動特性を変えることがない。
5. 打撃力は広範囲の連続周波数スペクトルを有する。そのため、打撃試験では広周波数帯域の加振が瞬時にできる。
6. 加振力に漏れ誤差が全く生じない。
7. 叩ける物なら何でも加振できる。たとえば、橋や鉄橋などの大型重量物を加振したり、針の先のようなハンマでマイクロマシンのような小型軽量物を加振したりすることもできる。

2.2.3.2 打撃試験の短所

同様に、打撃試験の短所を以下に示す。

1. 振幅の最大値と自乗平均値の比である波高率が極端に大きい。瞬間的に大きい力を加える反面、時間窓全体で平均した加振エネルギーは大変小さい。そのため計測系や処理系に過負荷を生じやすく、これを避けようとするればダイナミックレンジを著しく狭めてしまう。
2. 信号対雑音の比、すなわち SN 比が極端に小さい。加振力は瞬間的に1回だけ存在し、後はノイズだけの時間が続く。よって、小さいノイズでも積み重なって加振信号を破ってしまう。外乱に弱いため、他の方法よりもはるかにノイズの少ない環境が必要になる。
3. 非線形特性を有する対象物には不適である。
4. 対象物の減衰の大きさにより制限を受ける。
5. 精度が実施者の技能や熟練度に大きく依存する。
6. 加振の大きさ、周波数範囲、周波数成分の割合を調整しにくい。
7. 低周波数域の加振が困難である。
8. 叩くことにより対象物に損傷を与えることがある。
9. エネルギー分布が不均一になり、局部振動を生じやすい。
10. 特別な窓関数を必要とする。

第3章 モード特性同定法

3.1 緒言

実験モード解析の中核を占めるモード特性同定法は、大きく分類して時間領域法と周波数領域法とに分けられる。時間領域法は、同定の段階で繰り返し計算を必要としないために、計算時間が短い、解が発散する可能性がない、などの利点を有する。しかし、入力データが単位衝撃応答の時刻歴波形でなければならない。そこで、モード試験で得られた入出力の時刻歴生データにフーリエ変換を施して周波数応答関数(FRF)にした後に、逆フーリエ変換により再び時刻歴応答に戻したものを、同定のための入力データとする。このように、2度のフーリエ変換で過度に加工した入力データ中には、誤差やゆがみが混入しやすい。また、1度周波数領域でモード分離をしたものを再びモード分離前の時刻歴に戻して入力データとし、それを同定によってモード分離するという、不自然な過程を用いる。したがって、時間領域法は一般に精度が悪くなる。

一方、周波数領域法では、入力データの作成に1度しかフーリエ変換を用いない。あらかじめモード分離したFRFを入力データとして同定するなどのため、一般に同定精度は良い。特に最も多用されるVan Loonによる偏分反復法は、誤差を検定しながら線形方程式を解く操作を繰り返すことによりモード特性を同定するものである。この方法には、誤差の少ないモード特性を得られるという特徴がある。しかし一方で、全モード特性の初期値が必要である。初期値が適切に与えられないときには収束性が悪くなる。多点参照時には変数増加のため計算時間が急増するという欠点がある。

さて、モード特性は線形項と非線形項とに分けられる。前者は固有モード、剰余剛性、剰余質量であり、後者は固有振動数とモード減衰である。後者の初期値は、構造全体のFRFがなければ決定されない。このことがLoonの方法の難点であった。しかし、前者の初期値を後者の初期値から決定することは、従来から可能であった。例えば、線形直説法を適用すれば、線形項の初期値は非線形項より求めることができる。しかし、その際に全FRFの測定値が必要であるため、問題の解決にならない。また、鄭らは線形項を非線形項の関数で表すことを提案している。鄭らの方法に理論的根拠を与えると共に、ヒステリシス減衰の場合にも使用できるように拡張改良した。しかし、鄭らの方法は収束性、計算時間、記憶容量のすべてが点の実用的には不十分であった。

本章では、周波数領域におけるモード特性の同定方法を、数学的な立場から従来よりも基本的に見直すことにより、上記のLoonの方法が有する欠点を大幅に改善する新しい方法を提案する。すなわち非線形最小二乗法を導入して変数

縮小を定式化し、線形項に関しては初期値を不要にする。また、最適化手法を導入して収束性の改善を行う。その結果、計算時間の短縮、初期値が真値と異なるとき解の収束性の改善、および入力データに誤差が混入するときの同定精度の向上が同時に実現できることを示す。

3.2 周波数応答関数の理論式

実験データに対応する周波数応答関数の理論式を、一般粘性減衰と一般ヒステリシス減衰の仮定のもとに定式化する。

3.2.1 一般粘性減衰

一般粘性減衰を有する Q 自由度系の運動方程式を示す。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (3.1)$$

$[M]$, $[C]$, $[K]$ は、質量行列、粘性減衰行列、剛性行列であり、 $\{x\}$ と $\{f\}$ は、変数ベクトルと力ベクトルである、自由振動の場合は次式になる。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (3.2)$$

式(3.1)と自明の関係にある次式

$$[M]\{\dot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = \{0\} \quad (3.3)$$

を組み合わせれば

$$[D]\{\dot{y}\} + [E]\{y\} = \{p\} \quad (3.4)$$

ここで、時間変数を t で表す。

$$[D] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \quad [E] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [-M] \end{bmatrix} \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \{y\} &= \{Y\}e^{\lambda t}, & \{x\} &= \{X\}e^{\lambda t} \\ \{p\} &= \{P\}e^{\lambda t}, & \{f\} &= \{F\}e^{\lambda t} \end{aligned} \right\} \quad (3. 6)$$

とすると，式(3. 4)は次式になる

$$(\lambda[D] + [E])\{Y\} = \{P\} \quad (3. 7)$$

式(3. 7)の固有値と固有ベクトルを求める． $\{P\} = \{0\}$ とおけば式(3. 7)は

$$(\lambda[D] + [E])\{Y\} = \{0\} \quad (3. 8)$$

となり，式(3. 2)で $[C] = [0]$ とする場合の不減衰系の特性方程式である次式

$$(-\Omega^2[M] + [K])\{X\} = \{0\} \quad (3. 9)$$

と同じ形になり，一般固有値問題として固有値 λ_r と固有ベクトル $\{\Psi_r\}$ を求めることができる．

式(3. 9)の場合，物理モデルであれば $[M]$ は正定値行列， $[K]$ は非負定値行列であり，実固有値と実固有ベクトルが求まる．式(3. 8)において，一般には $[D]$ ， $[E]$ は正定値行列ではない．したがって λ_r ， $\{\Psi_r\}$ は複素数となる．また，式(3. 9)の不減衰系の固有ベクトルが $[M]$ ， $[K]$ に関して一般直交性を有するように， $\{\Psi_r\}$ も $[M]$ ， $[E]$ に関して一般直交性を有する．

式(3. 8)の固有値 λ_r と式(3. 2)の固有値は同じであり，その数は $2Q$ である．固有値 λ_r を対角上に並べた対角行列を $[A]$ と表し，その上半分 $[A']$ と下半分をお互いに共役で，各々低次から順番になるように並べる．

$$[A] = \begin{bmatrix} [A'] \\ [A'^*] \end{bmatrix} \quad * \text{は複素共役を表す.} \quad (3. 10)$$

[A]に対応して列ベクトル $\{\Psi_r\}$ を並べた行列を $[\Psi]$ と表す. 式(3. 2)の固有ベクトルを $\{\phi_r\}$, これを並べた行列を $[\phi]$ と表すと, 式(3. 5)の第三式より

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} [\phi] & [\phi^*] \\ [\phi][A'] & [\phi^*][A'^*] \end{bmatrix} \quad (3. 11)$$

$\{P\}e^{\lambda t}$ つまり $[F]e^{\lambda t}$ で加振する時の定常応答 $\{Y\}e^{\lambda t}$ をモード座標で求める. $\{Y\}$ をモード座標に変換すれば

$$\{Y\} = \sum_{r=1}^{2Q} \eta_r \{\Psi_r\} = [\Psi]\{\eta\} \quad (3. 12)$$

式(3. 8)に代入し, 左から $[\Psi]^T$ をかけると

$$(\lambda[\Psi]^T[D][\Psi] + [\Psi]^T[E][\Psi])\{\eta\} = \{0\} \quad (3. 13)$$

ここで $\{\Psi_r\}$ の一般直交性より

$$\left. \begin{aligned} [\Psi]^T[D][\Psi] &= [d] \\ [\Psi]^T[E][\Psi] &= [e] \end{aligned} \right\} \quad (3. 14)$$

式(3. 13)に式(3. 14)を代入すると

$$\lambda_r = -e_r/d_r \quad (3. 15)$$

同様に式(3. 7)に式(3. 13)を代入し, 左から $[\Psi]^T$ をかけると

$$(\lambda[d]+[e])\{\eta\}=[\Psi]^T\{P\} \quad (3.16)$$

したがって

$$\{\eta\}=(\lambda[d]+[e])^{-1}[\Psi]^T\{P\} \quad (3.17)$$

式(3.12)に代入すると

$$\{Y\}=[\Psi](\lambda[d]+[e])^{-1}[\Psi]^T\{P\} \quad (3.18)$$

上式に式(3.5)の第3式, 式(3.6), 式(3.11)を代入して

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \lambda\{X\} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [\phi] & [\phi^*] \\ [\phi][A'] & [\phi^*][A'^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u] & [0] \\ [0] & [u^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\phi]^T & [A'][\phi]^T \\ [\phi^*]^T & [A'^*][\phi^*]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\phi] & [\phi^*] \\ [\phi][A'] & [\phi^*][A'^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [u][\phi]^T & \{F\} \\ [u^*][\phi^*]^T & \{F\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

ここで $[u]$ および $[u^*]$ は, それぞれ $1/(\lambda d_r + e_r)$ および $1/(\lambda d_r^* + e_r^*)$ ($r=1\sim N$)を対角要素とする対角行列である. 式(3.19)の上半分より

$$\{X\} = ([\phi][u][\phi]^T + [\phi^*][u^*][\phi^*]^T)\{F\} \quad (3.20)$$

ベクトル $\{\phi_r\}$ の p 行, q 行の成分を ϕ_{rp} , ϕ_{rq} と表すと, p 点加振, q 点応答のコンプライアンス周波数応答関数 G は

$$G(\lambda) = \frac{X_q}{F_p} = \sum_{r=1}^Q \left(\frac{\phi_{rp}\phi_{rq}}{\lambda d_r + e_r} + \frac{\phi_{rp}^*\phi_{rq}^*}{\lambda d_r^* + e_r^*} \right) \quad (3.21)$$

また、式(3. 14)の上式より

$$d_r = \{\phi_r\}^T [C] \{\phi_r\} + 2\lambda_r \{\phi_r\}^T [M] \{\phi_r\} \quad (3. 22)$$

固有ベクトルを $d_r = 1$ となるように正規化し励振振動数を w , 単位虚数を j で表すと定常励振なので $\lambda = jw$ となり, 式(3. 21)に式(3. 15)を代入すれば

$$G(w) = \frac{X_q}{F_p} = \sum_{r=1}^q \left(\frac{\phi_{rp} \phi_{rq}}{jw - \lambda_r} + \frac{\phi_{rp}^* \phi_{rq}^*}{jw - \lambda_r^*} \right) \quad (3. 23)$$

λ_r および $\phi_{rp} \phi_{rq}$ の実部, 虚部を各々 $-\sigma$, w_{dr} , U_r , V_r と表す.

$$\lambda_r = -\sigma_r + jw_{dr}$$

(3. 24)

$$\phi_{rp} \phi_{rq} = U_r + jV_r$$

注目する周波数帯域中に固有振動数が存在する固有モード数を n とすれば,

$G(w)$ の実部 $G_R(w)$ と虚部 $G_I(w)$ は

$$\left. \begin{aligned} G_R(w) &= \sum_{r=1}^q \left\{ \frac{U_r \sigma_r + V_r (w - w_{dr})}{a_r} + \frac{U_r \sigma_r - V_r (w - w_{dr})}{b_r} \right\} - \frac{C}{w^2} + E \\ G_I(w) &= \sum_{r=1}^q \left\{ \frac{-U_r (w - w_{dr}) + V_r \sigma_r}{a_r} - \frac{U_r (w + w_{dr}) + V_r \sigma_r}{b_r} \right\} - \frac{D}{w^2} + F \end{aligned} \right\} \quad (3. 25)$$

$$\left. \begin{aligned} a_r &= \sigma_r^2 + (w - w_{dr})^2 \end{aligned} \right\} \quad 15$$

(3. 26)

$$b_r = \sigma_r^2 + (w - w_{dr})^2$$

ここでは注目する周波数帯域外の固有モードの影響を剰余質量を $1/C$ と $1/D$, 剰余剛性を $1/E$ と $1/F$ として導入している.

3.2.2 一般ヒステリシス減衰

一般ヒステリシス減衰を有する Q 自由度系の運動方程式を次式のように定義する.

$$[M]\{\ddot{x}\} + ([K] + j[D])\{x\} = \{f\} \quad (3. 27)$$

$[D]$ はヒステリシス減衰行列である. 式(3. 6)と同様に $\{x\} = \{X\}e^{\lambda t}$, $\{f\} = \{F\}e^{\lambda t}$ と変換すると式(3. 37)は次式となる.

$$\{\lambda^2[M] + ([K] + j[D])\}\{X\} = \{F\} \quad (3. 28)$$

式(3. 28)の固有値と固有ベクトルを求める. 式(3. 28)において $\{F\} = \{0\}$ とおくと

$$\{\lambda^2[M] + ([K] + j[D])\}\{X\} = \{0\} \quad (3. 29)$$

上式は式(3. 8), 式(3. 9)と同じ形であるが, 複素係数の一般固有値問題となり, Q 組の複素固有値 λ_r と複素固有モード $\{\phi_r\}$ が求まる. $[M]$ と $[K] + j[D]$ は対称行列なので, 固有モード $\{\phi_r\}$ に関しては次式のように一般直交性が成立する.

$$\left. \begin{aligned} \{\phi_k\}^T [M] \{\phi_r\} &= 0 \\ \{\phi_k\}^T ([K] + j[D]) \{\phi_r\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (r \neq k) \quad (3.30)$$

ここで $\{\phi_r\}^T [M] \{\phi_r\} = 1$ となるように固有ベクトル $\{\phi_r\}$ を正規化し

$$\{\phi_r\}^T ([K] + j[D]) \{\phi_r\} = k_r (1 + jg_r) \quad (3.31)$$

とおく。ここで k_r , g_r は実数である。定常応答振幅 $\{X\}$ を次式のようにモード座標 $\{\eta\}$ に変換する。

$$\{X\} = \sum_{r=1}^Q \eta_r \{\phi_r\} = [\phi] \{\eta\} \quad (3.32)$$

ここで $[\phi]$ は列ベクトル $\{\phi_r\}$ を並べた Q 行 Q 列の行列である。式(3.28)に上式を

代入し、左から $[\phi]^T$ を乗じれば

$$\{\lambda^2 [\phi]^T [M] [\phi] + [\phi]^T ([K] + j[D]) [\phi]\} \{\eta\} = [\phi]^T \{F\} \quad (3.33)$$

式(3.30), 式(3.31)より

$$\eta_r = \frac{\{\phi_r\}^T \{F\}}{\lambda^2 + k_r (1 + jg_r)} \quad (r = 1 \sim Q) \quad (3.34)$$

式(3.32)より定常応答振幅 $\{X\}$ は $\lambda = jw$ なので次式となる

$$\{X\} = \sum_{r=1}^{\rho} \frac{\{\phi_r\}^T \{F\} \{\phi_r\}}{-\omega^2 + k_r(1 + jg_r)} \quad (3.35)$$

点 p を振幅 F_p で励振する時の点 q の応答を X_q とすると、点 p と点 q 間のコンプライアンス周波数応答関数 $G(\omega)$ は

$$G(\omega) = \frac{X_q}{F_p} = \sum_{r=1}^{\rho} \frac{\phi_{rp} \phi_{rq}}{-\omega^2 + k_r(1 + jg_r)} \quad (3.36)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \phi_{rp} \phi_{rq} &= U_r + jV_r \\ a_r &= k_r - \omega^2 \\ b_r &= k_r g_r \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

と表す。 U_r , V_r , a_r , b_r は実数である。

$$G(\omega) = \frac{X_q}{F_p} = \sum_{r=1}^{\rho} \frac{U_r + jV_r}{a_r + jb_r} \quad (3.38)$$

注目する角振動数範囲内の固有モード数を n とすると $G(\omega)$ の実部 $G_r(\omega)$ と虚部 $G_i(\omega)$ は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} G_R(w) &= \sum_{r=1}^q \left(\frac{U_r a_r + V_r b_r}{a_r^2 + b_r^2} \right) - \frac{C}{w^2} + E \\ G_I(w) &= \sum_{r=1}^q \left(\frac{V_r a_r - U_r b_r}{a_r^2 + b_r^2} \right) - \frac{D}{w^2} + F \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

ここでも、式(3.25)と同様に、注目していない固有モードの影響を剰余質量 $1/C$ ， $1/D$ ，剰余剛性 $1/E$ ， $1/F$ として導入している。

3.3 従来の同定法

モード特性の同定を行う周波数領域法の中で、最もよく用いられるのが偏分反復法である。この方法は、周波数応答関数の理論式中のモード特性を、実験データに最もよく適合するように、線形近似による最小二乗法の繰り返し計算で求める方法である。次節で提案する非線形最適化法もこの方法を基礎にしているので以下に概説する。

3.3.1 偏分反復法

周波数応答関数の実部と虚部の理論式 G_R ， G_I を式(3.25)，式(3.26)または式(3.37)，式(3.39)とし、これに対応する実験データの実部と虚部を A_R ， A_I と表す。

求めるモード特性を $\{\gamma\}$ と表すと G_R ， G_I は角振動数 w と $\{\gamma\}$ の関数となる。モード特性 $\{\gamma\}$ が $\{\Delta\gamma\}$ 変化するときの G_R と G_I はテーラー展開の1次項だけを採用すれば、

$$G_R(w\{\gamma\} + \{\Delta\gamma\}) = G_R(w\{\gamma\}) + \sum_{r=1}^{2n+2} \frac{\partial G_R(w\{\gamma\})}{\partial \gamma_r} \Delta\gamma_{rc}$$

(3. 40)

$$G_I(w\{\gamma\} + \{\Delta\gamma\}) = G_I(w\{\gamma\}) + \sum_{r=1}^{2n+2} \frac{\partial G_I(w\{\gamma\})}{\partial \gamma_r} \Delta\gamma_{rc}$$

n は対象周波数範囲内の固有モードに数を表す. $\partial G_R/\partial \gamma_r$, $\partial G_I/\partial \gamma_r$ の式を付録 A に示す. これらの式と式(3.40)により, w と $\{\gamma\}$ が与えられれば $G_R(w\{\gamma\} + \{\Delta\gamma\})$, $G_I(w\{\gamma\} + \{\Delta\gamma\})$ は $\{\Delta\gamma\}$ に関する線形 1 次式となる. ここで,

$$\begin{aligned} G_R(w\{\gamma\} + \{\Delta\gamma\}) &= A_R \\ G_I(w\{\gamma\} + \{\Delta\gamma\}) &= A_I \end{aligned} \tag{3. 41}$$

とおく.

通常は求めるモード特性 $\{\gamma\}$ の数より実験データの数をはるかに大きいので式(3.41)を最小二乗法で解けば, モード特性の修正量 $\{\Delta\gamma\}$ を求めることができる.

3.3.2 線形直接法

モード特性 $\{\gamma\}$ は 2 種類に大別できる. 周波数応答関数の理論式の分母中にも出てくる非線形項 $\{\beta\}$ と分子中だけに出てくる線形項 $\{\alpha\}$ である. もし, 非線形項 $\{\beta\}$ が何らかの方法で求められていれば, 理論式 G_R と G_I は線形項 $\{\alpha\}$ の線形 1 次式になる. そこで

$$\begin{aligned} G_R(w\{\alpha\}) &= A_R \\ G_I(w\{\alpha\}) &= A_I \end{aligned} \tag{3. 42}$$

とおき, 式(3.42)を最小二乗法で解けば繰り返し計算なしで線形項 $\{\alpha\}$ を求めることができる.

3.3.3 計算の流れ

実行手順は、最初に、非線形項の初期値、周波数応答関数の実験値 A_R, A_I が入力される。次に、線形項の初期値を線形直接法で求めるために、周波数応答関数の理論式 G_R, G_I の線形項に関する微分係数が計算される。この微分係数と実験値 A_R, A_I から式(3.42)の線形直接法により線形項の初期値が計算される。次に、全モード特性 γ_j の初期値と G_R, G_I の γ_j に関する微分係数が計算される。この微分係数と実験値 A_R, A_I から式(3.41)によりモード特性の修正量 $\Delta \gamma_j$ が求まる。 $\gamma_j + \Delta \gamma_j$ を次の初期値として、繰り返し計算を行い、誤差関数が収束すれば計算を終了する。

このモード特性同定法は誤差関数が収束するまで繰り返し計算を行うため、同定精度が高い。その反面、繰り返し計算の過程において発散することが多く、使い難い方法であるといえる。また、多点参照を行う場合には同定するモード特性の数が増加するために、計算時間が増加する欠点がある。

3.4 非線形最適化法

この方法は、周波数領域法である偏分反復法を基礎に、多点応答に拡張したものである。偏分反復法と同様に、最も確からしいモード特性を求めるために、実験値と周波数応答関数の理論式と誤差を最小にするモード特性をもとめる。周波数応答関数の理論式はモード特性を変数として定式化される。このモード特性において、周波数応答関数の理論式の分母にも現れる非線形項だけに変数を縮小し、最適点を探索することが特徴である。本研究で用いる実験モード解析システムにおけるこの手法は FORTRAN で構築されている。

3.4.1 変数の縮小

3.4.1.1 非線形最小二乗法の適用

コンプライアンス周波数応答関数(FRF)の理論式を f とすると、 f は角振動数 w とモード特性 $\{\gamma\}$ の関数として理論的に定式化される。一方、周波数点 $w = w_i$ における FRF の理論式に対応する実験データを y_i と表す。多点参照の場合に、同時に参照する FRF の数を m 、対象周波数範囲内の周波数点の数を N とする。FRF は複素数なので、実部を $i = 1 \sim N$ 、虚部を $i = N + 1 \sim 2N$ に対応させる。

複数の FRF を同時に処理するために、これらのデータを直列に並べれば、全データ数は $2Nm$ となる。

式(3.25)、式(3.26)または式(3.37)、式(3.39)で表される周波数応答関数の中に含まれるモード特性を、振動試験により得られる周波数応答関数の実験データに最も適合するように同定する。まず実験データ y_i と FRF の理論式 f_i との差を、実験データに混入する誤差とみなし、その影響を最小にすることを考える。そのためには、実験で得られる周波数応答関数に混入している誤差が正規分布であると仮定すれば、次に示す尤度 R が最大になればよい。

$$R = \prod_{i=1}^{2Nm} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} u_i} \exp \left\{ -\frac{(y_i - f_i)^2}{2u_i^2} \right\} \right] \quad (3.43)$$

ここで u_i は、角振動数 $w = w_i$ のにおける実験データ y_i の母分散である。有限回の実験では、母分散の厳密な値をえることはできないので、ここではその代わりに、実験で得られる y_i の分散を u_i の近似値として使用する。式(3.43)における尤度 R が最大になるためには、次の重みつき残差 2 乗和 S が最小になればよい。

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2Nm} W_i (y_i - f_i)^2 \quad (3.44)$$

ここで h を比例定数として

$$W_i = \frac{h}{u_i^2} \quad (3.45)$$

W_i は、式(3.44)の最小二乗法の重み係数とみなされる。式(3.45)より、モード特性の同定に使用する重み係数としては分散の逆数に比例する量を採用すると、統計的に正しいことがわかる。

$\{\gamma\} = \{\hat{\gamma}\}$ の時に式(3.44)の S が極小値をとるとすれば、1 を $\{\gamma\}$ の元数として次式が成立する。

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \gamma_j} \right|_{\{\gamma\}=\{\hat{\gamma}\}} = 0 \quad (j=1 \sim l) \quad (3.46)$$

式(2.46)が成立する極小点 $\{\hat{\gamma}\}$ をニュートン法(ニュートン・ラプソン法)で探索する. $\{\hat{\gamma}\} = \{\gamma\} + \{\Delta\gamma\}$ とおけば, 変数の修正ベクトル $\{\Delta\gamma\}$ は $\partial S / \partial \gamma_j$ の $\Delta\gamma_k$ による変化分を使用して次式で求めることができる.

$$\sum_{k=1}^l \frac{\partial^2 S}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k} \Delta\gamma_k = -\frac{\partial S}{\partial \gamma_j} \quad (j=1 \sim l) \quad (3.47)$$

式(2.47)の l 個の連立方程式をまとめて表せば

$$[A]\{\Delta\gamma\} = -\frac{\partial S}{\partial \{\gamma\}} \quad (3.48)$$

ここで $[A]$ は $\partial^2 S / \partial \gamma_j \partial \gamma_k$ を成分とする行列で, ヘシアン行列と呼ばれている.

式(3.44)より

$$-\frac{\partial S}{\partial \gamma_j} = \sum_{i=1}^{2Nm} \frac{\partial f_i}{\partial \gamma_j} W_i (y_i - f_i) \quad (3.49)$$

同様にヘシアン行列の各成分は

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^{2Nm} \left[\frac{\partial f_i}{\partial \gamma_j} W_i \frac{\partial f_i}{\partial \gamma_k} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k} W_i (y_i - f_i) \right] \quad (3.50)$$

理論式 f_i の各変数 $\{\gamma\}$ に関する微分係数, 実験値 y_i , 重み W_i を与えて式(3.48)を計算することにより, 変数の修正ベクトル $\{\Delta\gamma\}$ を求めることができる.

このようにニュートン法では, 理論式 f_i の 1 次微分項と 2 次微分項の両方を

使用して、式(3.46)が成立する $\{\hat{\gamma}\}$ を求めている。式(3.50)の右辺第2項である2次微分項を無視して式(3.48)に代入すると、式(3.48)はガウス・ニュートン法または線形近似による最小二乗法と呼ばれる次式と一致する。

$$[B]^T [W][B]\{\Delta\gamma\} = [B]^T [W]\{y_i - f_i\} \quad (3.51)$$

$[B]$: $\partial f_i / \partial \gamma_j$ を i, j 要素とする行列

$[W]$: W_i を対角成分とする対角行列

変数 $\{\gamma\}$ が全て線形項の場合は、式(3.50)中の2次微分項は零となる。さらに、変数の初期値を零ベクトルにすると、 $f_i(\{\gamma\} = \{0\}) = \{0\}$ であるから、式(3.51)は次の線形最小二乗法になる。

$$[B]^T [W][B]\{\gamma\} = [B]^T [W]\{y_i\} \quad (3.52)$$

このように、線形最小二乗法、線形近似による最小二乗法の両方共ヘシアン行列を使用するニュートン法の式(3.48)の特別な場合として理解することができる。

3.4.1.2 変数縮小の定式化

非線形最小二乗法の原点である式(2-48)に戻って、ニュートン法の考え方のもとで2次微分項を導入することにより、以下のように変数縮小の定式化を行う。まず、全変数 $\{\gamma\}$ を線形項 $\{\alpha\}$ (元数 u) と非線形項 $\{\beta\}$ (元数 v) に分ける。

繰り返し計算のある段階における変数を $\{\alpha\}$ 、 $\{\beta\}$ とし、ここから次の S の予想極小点であるを $\{\hat{\alpha}\}$ 、 $\{\hat{\beta}\}$ 計算する。

$$\{\hat{\alpha}\} = \{\alpha\} + \{\Delta\alpha\} \quad (3.53)$$

$$\{\hat{\beta}\} = \{\beta\} + \{\Delta\beta\}$$

全変数 $\{\hat{\alpha}\}$, $\{\hat{\beta}\}$ を同時に求める場合には

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \right|_{\{\alpha\}=\{\hat{\alpha}\}, \{\beta\}=\{\hat{\beta}\}} = 0 \quad (j = 1 \sim u) \quad (3.54)$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \beta_k} \right|_{\{\alpha\}=\{\hat{\alpha}\}, \{\beta\}=\{\hat{\beta}\}} = 0 \quad (k = 1 \sim v) \quad (3.55)$$

式(3.54)と(3.55)を連立方程式として、ヘシアン行列の各成分の値を $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$ から計算し、これを係数行列として解けば S の予想極小点を得ることができる。

つぎに $\{\hat{\alpha}\}$ を消去する考え方を示す。まず、全変数空間のうちで $\{\hat{\beta}\}$ のみを変数として、式(3.54)が成立する領域を探索する。 $\{\hat{\beta}\}$ が与えられたとすれば、式(3.54)は

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \right|_{\{\alpha\}=\{\hat{\alpha}\}} = 0 \quad (j = 1 \sim u) \quad (3.56)$$

式(3.56)より $\{\hat{\alpha}\} = \{\alpha\} + \{\Delta\alpha\}$ を式(3.48)のニュートン法で求めると

$$[F]\{\Delta\alpha\} = -\frac{\partial S}{\partial \{\alpha\}} \quad (3.57)$$

ここで、行列 $[F]$ の s 行 t 列の要素は

$$F_{st} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \alpha_t} \quad (3.58)$$

$[F]$ の逆行列 $[F]^{-1}$ が存在すれば

$$\{\Delta\alpha\} = -[F]^{-1} \frac{\partial S}{\partial \{\alpha\}} \quad (3.59)$$

$\{\alpha\}$ は線形項なので, $\{\hat{\alpha}\} = \{\alpha\} + \{\Delta\alpha\}$ を求めるには, 式(3.59)において $\{\alpha\} = \{0\}$ とし, その時の $f_i = 0$ を代入すれば $\{\hat{\alpha}\}$ を直接求められる.

式(3.57)の右辺および $[F]$ は $\{\hat{\beta}\}$ の関数となる. 式(3.57)を $\hat{\beta}_k$ で微分して, 式(3.56)が成立する領域内の特性を調査する.

$$\left(\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_k} [F] \right) \{\Delta\alpha\} + [F] \frac{\partial \{\Delta\alpha\}}{\partial \hat{\beta}_k} = - \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \hat{\beta}_k} \right\} \quad (k=1 \sim v) \quad (3.60)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \hat{\beta}_k} \right\} : s \text{ 行成分が } \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \hat{\beta}_k} \text{ である列ベクトル}$$

上式右辺は s 行成分が $-\partial^2 S / \partial \alpha_s \partial \hat{\beta}_k$ の列ベクトルである. ここでニュートン

法を使用する際のヘシアン行列が $\{\alpha\}, \{\beta\} \rightarrow \{\hat{\alpha}\}, \{\hat{\beta}\}$ となっても変化しないそのまま使用できるという近似仮定を設ける. この近似仮定は, 理論式をテイラー展開して1次微分項まで採用する線形近似の仮定よりも, 式(3.50)における2次微分項, つまり線形項と非線形項の相互作用を考慮する分だけ成立範囲は広いと考える. この仮定のもとでは式(3.60)の左辺大1項が零となる. 行列 $[F]$ の逆行列が存在すれば次式となる.

$$\frac{\partial \{\hat{\alpha}\}}{\partial \hat{\beta}_k} = \frac{\partial \{\Delta\alpha\}}{\partial \hat{\beta}_k} = -[F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \hat{\beta}_k} \right\} \quad (3.61)$$

式(3.56)が成立する領域内では式(3.61)が成立する.

次に式(3.56)が成立する領域内で $\{\hat{\beta}\}$ を探索する. 式(3.59)のよって, $\{\hat{\alpha}\}$ が $\{\hat{\beta}\}$

の関数として表現できるから、FRF の理論式 $f(\{\hat{\alpha}\}, \{\hat{\beta}\})$ において $\{\hat{\alpha}\}$ を $\{\hat{\beta}\}$ で表したものを H_i とする.

$$H_i(\{\hat{\beta}\}) = f_i(\{\hat{\alpha}(\{\hat{\beta}\})\}, \{\hat{\beta}\}) \quad (3.62)$$

式(3.62)を $\hat{\beta}_k$ で微分すると

$$\frac{\partial H_i}{\partial \hat{\beta}_k} = \frac{\partial f_i}{\partial \hat{\beta}_k} + \sum_{j=1}^u \frac{\partial f_i}{\partial \hat{\alpha}_j} \cdot \frac{\partial \hat{\alpha}_j}{\partial \hat{\beta}_k} \quad (3.63)$$

式(3.61)を式(3.63)に代入し、 $\hat{\alpha}_s, \hat{\beta}_k$ による微分係数を α_s, β_k による微分係数で近似すれば

$$\frac{\partial H_i}{\partial \hat{\beta}_k} = \frac{\partial f_i}{\partial \hat{\beta}_k} - \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} \quad (i = 1 \sim 2Nm, k = 1 \sim v) \quad (3.64)$$

$$\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right\} : s \text{ 行成分が } \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \text{ である列ベクトル}$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} : s \text{ 行成分が } \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \text{ である列ベクトル}$$

式(3.64)により、式(3.54)が成立する領域内における理論式 H_i の β_k による微分係数を求めることができる。そこで、ガウス・ニュートン法を使用して $\{\Delta\beta\}$ を求める。式(3.51)と同様に

$$[C]^T [W] [C] \{\Delta\beta\} = [C]^T [W] \{y_i - f_i\} \quad (3.65)$$

$[C]$: $\partial H_i / \partial \beta_k$ を i k 要素とする行列

$\{\Delta\beta\}$ つまり $\{\hat{\beta}\}$ が求まれば, 式(3.59)より $\{\Delta\alpha\}$ を求めることができる. この時使

用する $[F]^{-1}$ は式(3.64)で計算したものを共通して使用できる.

以上の手法により, $\{\alpha\}$ を線形項, $\{\beta\}$ を非線形項として全変数 $\{\gamma\}$ を非線形項 $\{\beta\}$ のみに縮小することができる.

3.4.2 最適化手法による収束性改良

本章で取り扱う問題は, 式(3.44)の 2 乗形式を最小にする変数を探索する最適化問題となる. 前節では, 2 次微分項まで考慮するニュートン法によって全変数を非線形項に縮小した. しかし, 縮小後の非線形項はガウス・ニュートン法によって探索しており, 非線形項の影響を線形近似して 1 次微分項だけを使用している. この方法では, この線形近似の仮定があてはまる領域の外に解が得られた場合には収束しない可能性がある. 線形近似が成立する領域内に戻すために, 最適化手法では側面制約と呼ばれる制約条件のもとで式(3.65)の $\{\Delta\beta\}$ を修正・縮小して使用することが行われる. 側面制約の設定方法としては, 縮小因子による方法と最適化逆行列を使用する Marquardt 法が従来知られている. これから両者を検討し, その結果から本研究に適している新しい方法を提案する.

3.4.2.1 縮小因子による方法

ガウス・ニュートン法では残差 2 乗和 S が反復計算の各段階で減少するとは保証されていない. そこで縮小因子 ε を導入し, 次式により変数の修正ベクトルの長さを縮小する.

$$\{\Delta\beta'\} = \{\Delta\beta\}\varepsilon \quad 0 < \varepsilon \leq 1 \quad (3.66)$$

ガウス・ニュートン法の場合, ε が十分小さければ $\{\Delta\beta'\}$ は S を減少させる方向を向く. このことは次のように説明できる.

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} S(\{\beta\} + \varepsilon\{\Delta\beta\}) \right|_{\varepsilon=0} = \{\Delta\beta\}^T \frac{\partial S}{\partial \{\beta\}} \quad (3. 67)$$

となり，式(3.48)，式(3.49)と式(3.65)より $\partial S/\partial \{\beta\} = -[C]^T [W]\{y_i - f_i\}$ となり，

$$\begin{aligned} \text{上式の右辺} &= -\{\Delta\beta\}^T [C]^T [W]\{y_i - f_i\} \\ &= -\{\Delta\beta\}^T [C]^T [W][C]\{\Delta\beta\} \end{aligned} \quad (3. 68)$$

となる．上式の右辺は $[W]$ に関する 2 次形式に -1 を掛けたものであり， $[W]$ が正定値行列であれば負となる． $\{\Delta\beta\}$ は $\{\beta\}$ の近傍で残差 2 乗和 S を減少させる方向を向いている．問題は縮小因子の値である．現在の所，は経験から決定するか，繰り返し計算中に途中経過をみながら調整している．

3.4.2.2 最適化逆行列による方法

次式で擬ノルムを定義する． $[N]$ は非負定値行列である．

$$\|\{x\}\|_N \equiv (\{x\}^T [N]\{x\})^{1/2} \quad (3. 69)$$

ここで次式

$$\|[G]\{x\} - \{b\}\|_W^2 + \|\{x\}\|_N^2 \quad (3. 70)$$

を最小にして $[G]\{x\} = \{b\}$ を満たす $\{x\}$ は次式となる．

$$\{x\} = ([G]^T [W][G] + [N])^{-1} [G]^T [W]\{b\} \quad (3. 71)$$

式(3.71)右辺の $([G]^T [W][G] + [N])^{-1} [G]^T [W]$ を最適化逆行列とよぶ．式(3.71)は，

式(3.70)を式(3.69)に従って展開し、 $\{x\}$ の各成分で微分して0とおくことにより得られる。

式(3.71)においてを $[N]$ 対角行列とし、その成分を一定値にすることにより Marquardt 法で使用している次式となる。 $[I]$ は単位行列を表す。

$$\{x\} = ([G]^T [W] [G] + \kappa [I])^{-1} [G]^T [W] \{b\} \quad (3.72)$$

$\kappa = 0$ の時、式(3.72)はガウス・ニュートン法の式となり、 κ が大きくなると $\{x\}$ は長さを減じて残差 2 乗和一変数空間において最急勾配を向くようになる。ここでも問題は κ の値があるが、Marquardt 法はこの κ を繰り返し計算中に調整して収束性の向上を行っている。

3.4.2.3 提案する方法

本論文では、収束性悪化の原因となる w_{dr} と σ_r ($r = 1 \sim n$ n :採用モード数)のみに対して、以下に示すような直接側面制約の設定を提案する。

$$\begin{aligned} |\Delta w_{dr} / w_{dr}| &\leq K_1 \\ |\Delta \sigma_{dr} / \sigma_{dr}| &\leq K_2 \\ \sigma_r &> 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

K_1 の値としては、 $0.01 \leq K_1 \leq 0.05$ であり、かつ異なるモード間の w_{dr} の初期値の最小間隔の半分以下になる値を与える。また、 K_2 に関しては、 $\Delta \sigma_r$ が減少方向に進んで σ_r が物理上あり得ない負の値となることを防止するため、 $K_2 = 0.8$ とする。 K_2 が1より小さい正数なので、 σ_r の初期値が正であれば繰り返し計算において常に σ_r は正である。線形項は非線形項 w_{dr} 、 σ_r により決定される上に、残差 2 乗和が探索し易い下に凸の 2 次曲線であることから、特に側面制約は設

定しない。

以上の提案する方法は簡明なものであり、これによる計算時間の増加は生じない上に、発散防止に大きな効果を発揮する。

3.4.3 実行手順と計算の流れ

提案する方法の流れは最初に、FRFの実験値 y_i とその分散が入力され、非線形項 β_k (一般粘性減衰の場合は減衰固有角振動数 w_{dr} とモード減衰率 σ_r , 一般ヒステリシス減衰の場合はモード剛性 k_r とモード減衰係数 g_r) の初期値が決定される。非線形項の初期値の決定には、たとえば1自由度曲線適合法等が使用できる。式(A.1), (A.2)または式(A.5), (A.6)より、FRFの理論式 f_i の線形項(留数の実部と虚部, 剰余項)に関する微分係数が計算される。ここで式(3.59)により線形項が計算される。次に、線形項の極小条件式(3.54)が成立する領域内における、線形項と非線形項の関係式がニュートン法を使用して求められる。

この関係式(3.61)を使用してFRFの理論式 H_i の β_k に関する微分係数が計算される(式(3.64))。この微分係数を使用して、形項の極小条件が成立する領域内において、 β_k の変更量 $\Delta\beta_k$ がガウス・ニュートン法の式(3.65)により計算される。

β_k の線形近似が可能な領域内に変更量 $\beta_k + \Delta\beta_k$ があることを側面制約式(3.73)で検査し、側面制約を満足していなければ $\Delta\beta_k$ を修正する。 $\beta_k + \Delta\beta_k$ を次のステップにおける β_k の初期値として繰り返し計算を行い、残差2乗和が零に向かって収束すれば、ここで計算を終了する。

3.4.4 計算方法の改善と入力データの縮小

3.4.4.1 ヤコビアン行列の計算方法の改良

式(3.64)の微分係数が決まれば、式(3.65)のガウス・ニュートン法で非線形項の修正量 $\{\Delta\beta\}$ を求めることができる。式(3.65)における行列 $[C]$ はヤコビアン行列と呼ばれている。行列 $[C]$ の大きさは $2Nm \times v$ であり、周波数点の数 N 、FRFの数 m 、非線形項の数 v と共に増加する。式(3.65)の計算が計算機の記憶容量と計算時間の両方に対する大きい負荷となっている。本節では、この計算機負荷を除くために、 $[C]$ の計算方法を次のように改良する。

式(3.65)を解くには、正規方程式と呼ばれる v 元 v 行の連立方程式として解く方法と、 $[C]$ をハウスホルダ法等により直交変換して解く方法が、これまでに知られている。一般には後者の方が計算精度が良いと言われている。しかし、実際に計算して比較した結果、倍精度におけるこの場合の計算では両者の計算結果は同一であった。計算時間と記憶容量に関しては正規方程式を解くほうが有利であった。そこで、本論文では、倍精度で正規方程式を計算して解くことにする。

式(3.65)の正規方程式を次式で表す。

$$[G]\{\Delta\beta\} = \{d\} \quad (3.74)$$

式(3.74)の意味は、残差2乗和 S の極小値探索する式(3.48)のニュートン法である。そこで、式(3.74)における $[G]$ 、 $\{d\}$ をヤコビアン行列 $[C]$ から算出する際に、周波数応答関数の理論式 H_i の微分係数を、ニュートン法で使用する残差2乗和 S の微分係数に変換してその意味を考察する。

式(3.65)に式(3.64)を代入する2と、式(3.74)右辺は

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_{i=1}^{2Nm} \frac{\partial H_i}{\partial \beta_k} W_i(y_i - f_i) \\ &= \sum_{i=1}^{2Nm} \left[\frac{\partial f_i}{\partial \beta_k} - \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} \right] W_i(y_i - f_i) \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right\} : s \text{ 行成分が } \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \text{ である列ベクトル}$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} : s \text{ 行成分が } \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \text{ である列ベクトル}$$

展開して式(3.49)を代入すれば

$$d_k = -\frac{\partial S}{\partial \beta_k} + \left\{ \frac{\partial S}{\partial \alpha_s} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} \quad (3.76)$$

$\{\alpha\}$ は、繰り返し計算におけるある段階において極小条件を満足する。したがって、 $\partial S / \partial \alpha_s = 0$ ($s = 1 \sim u$)が成立する。式(3.76)は簡略化されて、

$$d_k = -\frac{\partial S}{\partial \beta_k} \quad (3.77)$$

次に左辺を簡略化する。式(3.50)において2次微分項を省略した量を次式で表す。

$$\frac{\partial^2 S'}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} = \sum_{i=1}^{2Nm} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} W_i \frac{\partial f_i}{\partial \beta_k} \quad (3.78)$$

式(3.74)左辺の係数行列 $[G]$ の成分 G_{jk} は式(3.65)より

$$G_{jk} = \sum_{i=1}^{2Nm} \frac{\partial H_i}{\partial \beta_j} W_i \frac{\partial H_i}{\partial \beta_k} \quad (3.79)$$

式(3.64)を代入すれば、

$$G_{jk} = \sum_{i=1}^{2Nm} \left[\frac{\partial f_i}{\partial \beta_j} - \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} \right] W_i \left[\frac{\partial f_i}{\partial \beta_k} - \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} \right]$$

(3. 80)

式(3.80)右辺=A+B+C と表し、式(3.50)と式(3.78)を代入し整理すれば

$$A = \sum_{i=1}^{2Nm} \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j} W_i \frac{\partial f_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial^2 S'}{\partial \beta_j \partial \beta_k} \quad (3. 81)$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^{2Nm} - \left[\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_j} \right\} W_i \frac{\partial f_i}{\partial \beta_k} + \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} W_i \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j} \right] \\ &= \left\{ \frac{\partial^2 S'}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_j} \right\} - \left\{ \frac{\partial^2 S'}{\partial \alpha_s \partial \beta_j} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} \end{aligned} \quad (3. 82)$$

$$C = \sum_{i=1}^{2Nm} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_j} \right\} W_i \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} \quad (3. 83)$$

ここで

$$\{x\}^T = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right\}^T [F]^{-1} \quad (3. 84)$$

$$\{a\} = \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_j} \right\} \quad (3. 85)$$

$$\{b\} = \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} \quad (3. 86)$$

とおけば

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^{2Nm} (\{x\}^T \{a\}) (\{x\}^T \{b\}) W_i \\ &= \sum_{i=1}^{2Nm} (\{x\}^T \{a\})^T (\{x\}^T \{b\}) W_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{a\}^T \sum_{i=1}^{2Nm} (\{x\} W_i \{x\}^T) \{b\} \\
 &= \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_j} \right\}^T [F]^{-1} [F] [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_j} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} \tag{3.87}
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 G_{jk} &= \frac{\partial^2 S'}{\partial \beta_j \partial \beta_k} - \left\{ \frac{\partial^2 S'}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_j} \right\} - \left\{ \frac{\partial^2 S'}{\partial \alpha_s \partial \beta_j} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} \\
 &\quad + \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_j} \right\}^T [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \beta_k} \right\} \tag{3.88}
 \end{aligned}$$

いままでは、式(3.64)右辺第2項の $[F]^{-1}$ の乗数回数が多く、計算時間に対する負担になっていた。しかも、この右辺第2項の計算を $2Nm \times v$ 回行っていた。ところが、式(3.85)においては G_{jk} を計算するために必要なこの計算の回数は3回

でよく、 $[G]$ 全体でも $3v^2$ 回となる。非線形項は全FRFの共通項であり、その数 v は周波数点 N や参照FRF数 m と比べて通常小さいので、この方法により計算時間が著しく短縮できることは明らかである。また、いままでは $2Nm$ 行 v 列の行列 $[C]$ をそのまま記憶していたが、この簡略化方法により N 、 m に関係なく、 v 列 v 行の $[G]$ と v 行の $\{d\}$ を記憶すればよくなり、必要な記憶容量が大きく減少する。

式(3.85)を計算するためには、 S と S の α_s と β_k に関する微分係数を計算すればよいことになる。これらはまとめて計算すれば効率がよい。

3.4.4.2 入力データの縮小

多チャンネルデータ処理装置，多軸加速度センサの発達に伴い，多点同時参照のモード特性同定法が実用されるようになった．しかしこれまでの方法では，参照点が増加すると共に入力データが増加し，これが計算機の記憶容量と計算時間に対するもう一つの大きい負荷となっていた．

入力データは，FRF 行列として与えられるので，この行列を縮小できれば上記の問題は解決する．この FRF 行列を縮小する方法としては，今までに，特異値分解による方法と主成分分析による方法が知られている．しかし，これらは共に数学的に基底ベクトルを算出するものであり，その物理的意味は必ずしも明確ではない．また，これらの縮小自体にかなりの計算時間と記憶容量を必要としている．そこで本章では，入力データに含まれる情報を保存したままで FRF を縮小するための，簡明で物理的意味が明確な方法を以下に提案する．

各点の FRF を列ベクトルとして並べた FRF 行列 $[P]$ を次式で縮小する．

$$[Q] = [P][K] \quad (3.89)$$

$[P]$; 実験で得られた FRF 行列	2N 行 m 列
$[Q]$; 縮小された FRF 行列	2N 行 n 列
$[K]$; 縮小のための行列	m 行 n 列

n ; 採用固有モード数

N ; 周波数点の数

m ; 周波数応答関数の数

行列 $[K]$ の作り方は，まず行列 $[P]$ (2N 行 m 列) のうち各固有モードの共振峰に対応する虚数部分だけを取り出して行方向に並べた行列を作成する．次にこの行列の各成分の符号は同じで大きさだけを 1 に変える．このようにして作成した行列を $[K]^T$ にする．

式(3.89)の計算は，ある固有モードの共振峰付近の虚数部分の符号が同一になるように全 FRF を重ね合わせることになる．この意味は，FRF 行列を測定する時の基準点を応答点として，ある固有モードが最も励起される様に各点の力の方向を調節して，同時に打撃加振する時の FRF を測定することに対応する．従って，固有モードの数に等しい数の FRF に，元の FRF 行列を縮小できる．実際に，あるモードが最も励起される様に各点を正しく加振することは大変困難で

ある。しかし、各点毎の打撃試験等で FRF を多数取得しておけば、式(3.89)を用いて同時衝撃加振に相当する測定結果を容易に得ることができる。

式(3.89)の処理は各 FRF に -1 または $+1$ を掛けて加算することである。加算係数の絶対値が 1 なので、加算後の FRF において不規則雑音は相殺されて減少する。

いかに FRF の数が多くても、式(3.89)により、抽出する固有モードの数と同一の本数に FRF を縮小できる。そのための計算時間と記憶容量は特異値分解、または主成分分析による方法よりはるかに少ない。

3.4.5 多数の固有モードの効率的同定法

近年のデータ処理装置の進歩により多数のスペクトル線を持つ FRF の取得が可能になり、現在 6401 本のスペクトル線を持つデータ処理装置が市販されている。このような装置で FRF を騒音領域まで採取すると、これには多数の固有モードが含まれている。一方、変数の縮小で述べた方法によれば、FRF の数は採取固有モード数にまで縮小される。この縮小は採取固有モードが 20 個位までならば、計算の効率に大きく貢献する。しかし、採取固有モード数がそれより増加すると縮小後の FRF の数も増加し、式(3.82)の元数が増加するために、計算時間と記憶容量が急増する。この問題を解決するために、対象周波数範囲を複数の領域に最適自動分割し分割後、各領域外の固有モードの影響を正確に補正しながら同定を行う手法を提案する。

3.4.5.1 対象周波数範囲の自動最適分割

対象周波数範囲の分割は隣接する固有モードの固有振動数になるべく離れている周波数点で行うことが望ましい。そして、分割後の各領域に存在する固有モード数は、規定数以内で、しかもできるだけ均等にしなければならない。この分割を論理的に実現することを試みたが、これは困難である。そこで、次のように対偶に近い考え方を取り入れ、手法を実現する。

まず分割された領域内に含まれる固有モードが 1 つだけになるように全周波数範囲を細分割する。次に固有モードが最も接近した 2 個の隣接領域を結合することを繰り返す。結合後の領域内の固有モード数が規定数になれば、この領域は以後他の領域と結合できないとする。このような現象は自然界において水滴の凝集現象などとして存在しており、これを類推することにより論理的にも成立すると考える。また、結合後の形態も当初狙ったものに近いと期待できる。

以下にこの最適分割の流れを示す。

- 1) 周波数領域を各固有モードが1個になるように細分割する。分割境界は各固有モードのピーク周波数の中間周波数にする。
- 2) 分割された領域1, 2の引力Fを計算する。

$$F=1 / (L \times N1 \times N2) \quad (3.90)$$

L : 領域端の固有モード間の距離

N1 : 領域1内の固有モード数

N2 : 領域2内の固有モード数

引力Fは隣接する領域端の固有モード間の距離が近いほど、また領域内の固有モード数が少ないほど大きくなる。

- 3) 引力Fの最も大きい領域を結合する。このとき、結合後の領域内の固有モード数が規定数を超えないようにする。
- 4) 2)と3)を繰り返す。

この手法では、固有モード数が大きい領域に挟まれた、固有モード数が1または2の領域が出現する可能性がある。これを避けるために、領域内の固有モードの規定数を*i*と表すと、まず*i/2*を規定数として上記論理で結合し、その後*i*を規定数として結合する。このようにすれば、固有モード数が1または2の領域が出現する可能性は大きく減少する。

3.4.5.2 対象領域外の固有モードの影響

通常、実験で得られたFRFには、対象領域外にも多数の固有モードが存在し、対象領域内のFRFの振幅と位相に影響する。これにより生じる誤差を修正するために、従来は剰余剛性Zと剰余質量Sという2定数を導入していた。これらは、対象領域の境界から充分離れた固有モード郡を表す係数として近似的に定義される。これらを用いた粘性減衰の仮定のもとにおけるFRFを次式に示す。

$$G(w) = \sum_{r=1}^n \left(\frac{A_r}{jw - \lambda_r} + \frac{A_r^*}{jw - \lambda_r^*} \right) - \frac{1}{w^2 S} + \frac{1}{Z} \quad (3.91)$$

$G(w)$ はコンプライアンスFRF、 w は角振動数、 j は虚数単位、 λ_r 、 A_r は*r*次

固有モードの複素固有値と留数， n は採用固有モード数， $*$ は複素共役を表す。試行計算の結果，上記の自動分割による同定の場合には，式(3.91)のように従来の剰余質量と剰余剛性を導入するだけでは精度的に不十分であることが判明した。

これを改良する手法として Laurent 級数を利用する方法，および領域外に仮想固有モードを追加してこれで領域外の固有モード郡を代表させる方法がある。後者は採用固有モード数+2 の自由度で系を表すことであり，前者より意図が明快である。

本章では，剰余質量と剰余剛性による方法と領域外に仮想固有モードを追加する方法とを併用することを提案する。この方法では，領域外の固有モードのうち，充分遠方の固有モード郡を剰余質量と剰余剛性で，また境界付近の固有モード郡を一つの固有モードで表すことになる。

領域外の固有モードの影響を補正するために，領域外に仮想固有モードを追加すると，繰り返し計算において収束性が悪化する。この問題を解決するために，モード特性の同定を 2 段階に分ける。まず第 1 段階では，従来の剰余質量と剰余剛性だけを採用してモード特性を同定する。ここでは収束性がよく，固有振動数を良好な精度で求めることができる。しかし，モード減衰比は領域外の固有モードの影響を受けて誤差を含んでいることが多い。次に第 2 段階では，領域外の固有モードの影響を補正するために，従来の剰余質量と剰余剛性に更に領域外に各 1 個の仮想固有モードを追加する。第 1 段階の結果を初期値にして固有振動数とモード減衰比とを求める。固有振動数の初期値が第 1 段階で精度良く求まっているので，第 2 段階における繰り返し計算の収束は容易である。ここで正確な固有振動数と正確なモード減衰比を求めることができる。

対象周波数領域内における固有モードを同定する場合，固有振動数がわずかに変化しても式(3.44)で示す残差 2 乗和は大きく変化する。そこで，今までは，繰り返し計算において，固有振動数にはその変化率が 0.05 以下，モード減衰比には 0.8 以下という側面制約を設定し，発散現象を防止している。本章でもこれと同じ側面制約を全固有モードに設定してみた。しかし，領域外の固有モードの固有振動数に領域内と同じ側面制約を設定すると，収束が遅くなることが判明した。そこで，本章では，領域外の各 1 個の固有モードに対しては，固有振動数とモード減衰比の変化率が共に 0.1 以下という側面制約を設定した。

また今までは，式(3.82)，(3.87)を計算するために式(2.58)の F の逆行列を使用していた。しかし，領域外に固有モードを追加すると， F の特異値分解の結果，この逆行列の計算がランク落ちにより不可能になる可能性があることが判明した。そこで本手法では，逆行列を用いないガウスの消去法による直接解法を用いる。

3.5 結言

本章では，実験データに対応する周波数応答関数の理論式を，一般粘性減衰と一般ヒステリシス減衰の仮定のもとに定式化した．そして，従来のモード特性同定法と本研究で用いた非線形最適化法を説明した．

第4章 テニスラケットの実験モード解析

4.1 はじめに

スポーツ用具は、素材の複合化により設計・製造に自由度が大きくなり、身体的条件や技術的条件の異なる使用者との整合を考慮したきめ細かい設計を目指す段階に至っている。現在は理論武装したテニスラケットも現れてきた。しかし、人間系と機械系（用具系）が複雑に絡んでいるためにラケットの性能やインパクト現象について不明な点が多い。

本章では、初級者用と上級者用の2種類のテニスラケットを用いて実験モード解析を行った。テニスラケットのモード特性（固有振動数、固有モード、モード減衰比）を求め、MATLABによりモードのアニメーション化を行い、実験モード解析によりテニスラケットの振動特性を掴むことを目的とする。

図4.1に今回の実験モード解析の簡単な流れを示す。

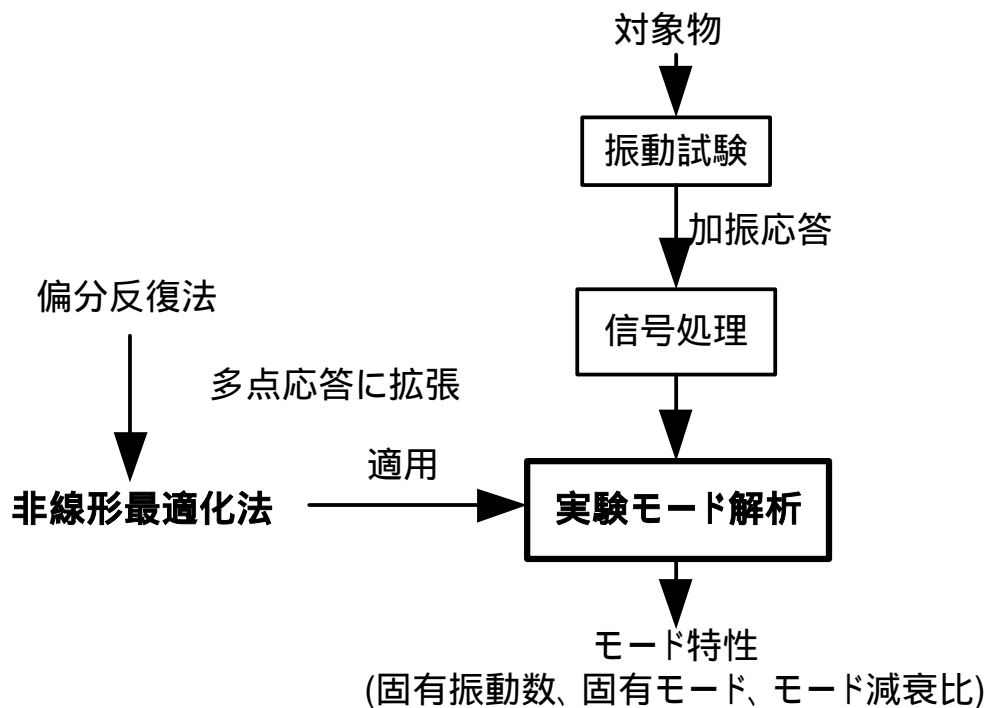


Fig.4.1 Flow of the experimental mode analysis

4.2 テニスラケット

以下に本研究で使用したテニスラケットの詳細を示す。

- ①初級者用ラケット—MIZUNO Wenew 1100 TL (Fig.4.2)
- 素材：グラファイト，カーボン 80， β チタン+Cu メッシュ
 - サイズ：1，2
 - 全長：27.5 インチ (0.5 インチロング)
 - 重さ：260 g (平均)
 - バランス：360 mm (平均)
 - 適正張力：45～55 ポンド



Fig.4.2 Tennis racket for beginner

- ②上級者用ラケット—MIZUNO MS500 (Fig.4.3)
- 素材：グラファイト
 - 全長：27.5 インチ (0.5 インチロング)
 - 重さ：313 g (平均)
 - バランス：295 mm (平均)
 - 適正張力：45～55 ポンド



Fig.4.3 Tennis racket for upper grade person

4.3 振動試験

まず、第一段階として実験対象であるテニスラケットを自由支持状態にし、振動試験を行った。テニスラケットを十分に細い紐で天井より吊るし、実用上十分な自由支持状態を実現した。また、上級者用ラケットに対して固定支持状態でも振動試験を行った。固定支持は実際に使用するような形で人間がテニスラケットを握ることで作った。

加振方法としては、加振器等で加振する方法ではなく、インパルス・ハンマを用いた。その理由としては、短時間で行うことができる、加振点の移動が極めて簡単であること等があげられる。インパルス・ハンマと加速度ピックアップを用いた打撃試験では、その実験精度が実施者の技能や熟練度に大きく左右される。そのため、加振する際には加振の方向や強さ、2度叩きなどに注意し、十分信頼できる精度が得られるよう努力した。

本研究の以前に行われた切込みの入った円筒の実験では、インパルス・ハンマを用いた打撃試験装置で実験対象のある1点を加振、そして加速度ピックアップを移動させ多点の応答を取るという単点加振・多点応答という形をとった。しかし、モードインジケータ関数による初期値選択の段階で、本来1つのピークが2つや3つまたはそれ以上に割れるという現象がおきた。これは、加速度ピックアップを1点1点付け替えながら多点の応答を取った際、加速度を測る

加速度ピックアップ自身の質量が影響して、それぞれの計測点での固有振動数に違いが生じたものと考えられる。また、ピックアップ移動ではピックアップを付け替える作業により実験効率が悪かった。

以上のことをふまえて本研究では、加速度ピックアップは1点に固定し、インパルス・ハンマを移動する加振点移動での打撃試験を行った。つまり、多点加振・単点応答という形である。これは、加振点移動と測定点を入れ替えても同じ周波数応答関数が生じるという性質を利用したものである。つまり、加振点移動法でピックアップは固定という条件で打撃試験を行っても多点応答の形でモード特性の同定を行うことができるのである。

今回のテニスラケットの加振点は自由支持、固定支持ともに49点、測定は3軸加速度ピックアップを用いた。加振点はテニスラケットの構造や本実験に必要な精度、人の負担等を考慮して49点が妥当であると判断した。

本研究で使用した機材の詳細をTable 4.1に、インパルス・ハンマをFig.4.4に、FFTアナライザをFig.4.5に、3軸加速度ピックアップをFig.4.6に示す。また、Fig.4.7に加振点及び計測点位置を示す。

Table 4.1 Details of the experimental equipment

FFT アナライザ : RION SA-01	
チャンネル数	4チャンネル
ダイナミックレンジ	90dB
レベルレンジ	-40dB~+30dB 10dB ステップ
周波数レンジ	1Hz~20Hz (1-2-5 系列ステップ)
ポイント数	256~32768 ポイント (2のべき乗)
インパルス・ハンマ : 小野測器 086M36A	
周波数範囲	8.0 kHz
ハンマの範囲	2200 N
ハンマの感度	2.3 mV/N
共振周波数	31 kHz
ハンマの質量	140 g
ヘッドの直径	15 mm
チップの直径	6.3 mm
グリップの長さ	203 mm
3軸加速度ピックアップ : PCB PIEZOTRONICS 356A32	



Fig.4.4 Impulse hammer



Fig.4.5 FFT analyzer



Fig.4.6 Three-axis acceleration pickup

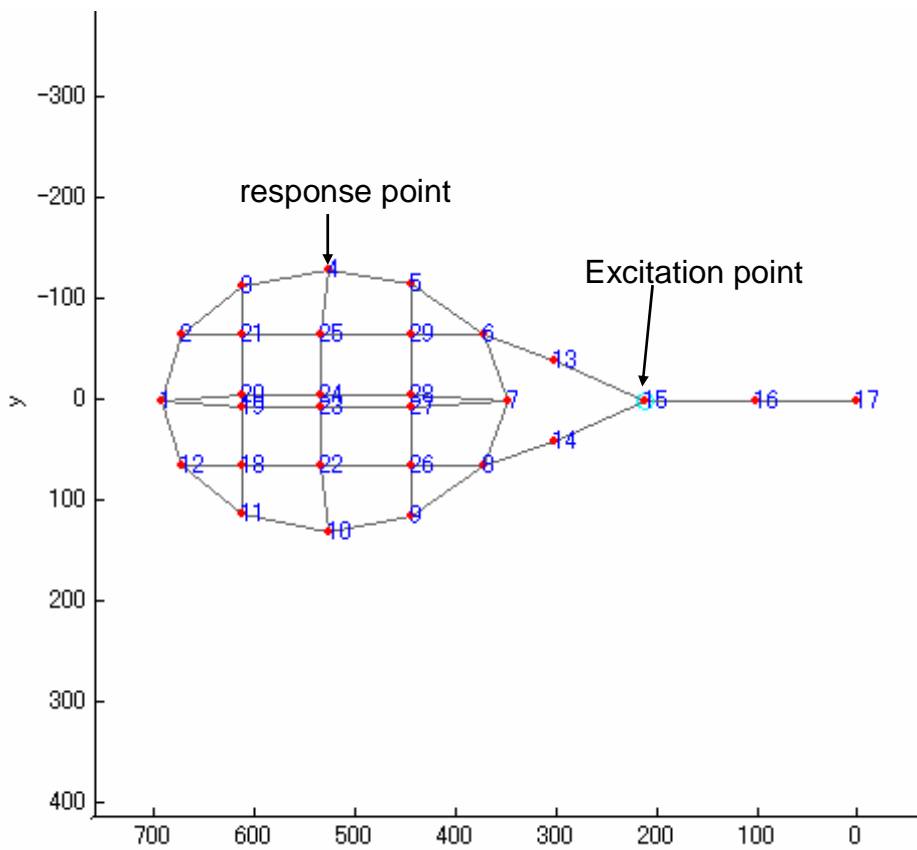


Fig.4.7 Excitation point and response point

4.4 信号処理

振動試験で得られた加振力と応答の測定結果から、信号処理によって周波数応答関数を求める。FFT アナライザに入力されたインパルス・ハンマと加速度ピックアップによる2つの信号は毎回フーリエ変換し、各加振点での（応答／加振）の伝達関数として記録した。シロッコファンの計測ではFFTとCAT-System（パソコンによる機械系振動騒音解析システム）を使用した。CAT-Systemは市販のA/Dボードを使用してパソコンで実験データ計測～解析を行うシステムである。本研究では、実験データをCSVファイルで保存させ、MATLAB言語で組んだプログラムファイルによってモード特性同定用のバイナリファイルとテキスト形式ファイルに変換する。

4.5 支持条件の違い

まず、支持条件の違いでは固有振動数や減衰比にどのような影響を与えるのかを初級者用ラケットで調べた。Fig.4.8に固有振動数の比較を、Table4.2に減衰率の比較を示す。

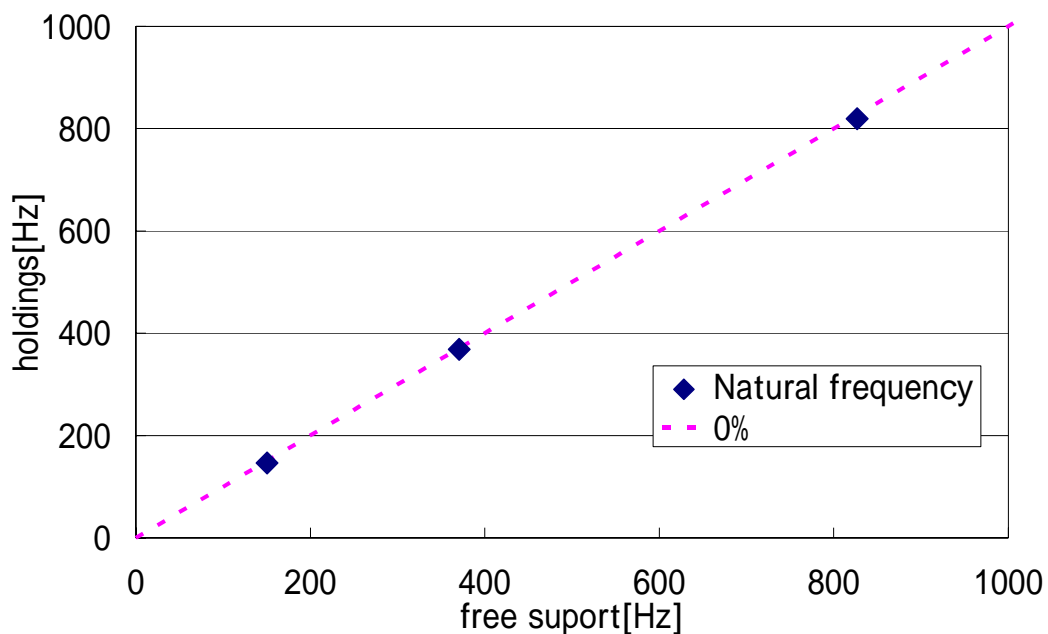


Fig.4.8 Comparison of natural frequency

Table 4.2 Comparison of damping ratio

mode No.	damping ratio	
	free support	holdings
1	1.16%	5.99%
2	1.34%	2.78%
3	1.36%	1.73%

4.6 実験結果

前項から、自由支持でも固定支持でも固有振動数には大差がないことがわかる。他の実験や計算を考慮し今回の実験モード解析は自由支持で行うことにした。テニスラケットの実験モード解析を行った結果 1000Hz までに初級者用は3個、上級者用は7個のモードを得ることができた。初級者用の第1次モードから第3次モードを Fig.4.9～Fig.4.11 に、上級者用の第1次モードから第7次モードを Fig.4.12～Fig.4.18 に示す。

Mode Shape : Order = 2, $f = 149.8$ (Hz), $\zeta = 1.16$ (%)



Fig.4.9 First mode for beginner

Mode Shape : Order = 3, $f = 367.7$ (Hz), $\zeta = 1.34$ (%)



Fig.4.10 Second mode for beginner

Mode Shape : Order = 4, $f = 812.3$ (Hz), $\zeta = 1.36$ (%)



Fig.4.11 Third mode for beginner

Mode Shape : Order = 2, $f = 130.9$ (Hz), $\zeta = 4.73$ (%)



Fig.4.12 First mode for upper grade person

Mode Shape : Order = 3, $f = 363.2$ (Hz), $\zeta = 0.442$ (%)



Fig.4.13 Second mode for upper grade person

Mode Shape : Order = 4, $f = 516$ (Hz), $\zeta = 0.918$ (%)



Fig.4.14 Third mode for upper grade person

Mode Shape : Order = 5, $f = 626.8$ (Hz), $\zeta = 2.68$ (%)



Fig.4.15 Fourth mode for upper grade person

Mode Shape : Order = 6, $f = 712.5$ (Hz), $\zeta = 1.12$ (%)



Fig.4.16 Fifth mode for upper grade person

Mode Shape : Order = 7, $f = 834.6$ (Hz), $\zeta = 1.14$ (%)



Fig.4.17 Sixth mode for upper grade person

Mode Shape : Order = 8, $f = 904$ (Hz), $\zeta = 0.517$ (%)

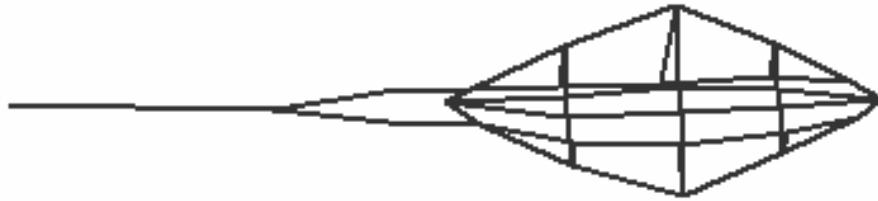


Fig.4.18 Seventh mode for upper person

4.7 考察

支持条件の違いからは、第1次モードで減衰の差が大きかった。これは人の手に伝わる振動の中で第1次モードの振動が最も大きいものと思われる。また、初級者用ラケットの方がモードの数が少ないが、それを除けば同じようなモード形状が出ていることがわかる。

第5章 実打時のテニスラケットの振動

5.1 はじめに

本章では実際にラケットが使用される時、つまり人間がラケットを持ち、テニスボールを実際に打った時、ラケットがどのように振動するかを確認する必要がある。本章では、実際に人間がラケットを使用したときの振動を測定し、それにより、テニスラケットの振動特性についての理解を深めることを目的とする。

5.2 実打試験

実際にラケットでボールを打った時の振動を測定するために、加速度ピックアップおよびFFTアナライザとしてCAT-Systemを使用した。今回、加速度ピックアップはラケットのグリップエンドに取り付けた (Fig.5.1)。これは、実際に人間がラケットを振るという運動が必要であるため、ピックアップ自身のコードの長さ、実際にボールを打つ人間の動きやすさ等を考慮したうえで、グリップエンドに取り付けることが最適であると判断したからである。本実験では、ラケットの振動で最も重要であると考えられる方向、つまりラケットの面に垂直な方向がz軸となるように加速度ピックアップを取り付けた。実験の様子をFig.5.2に示す。



Fig.5.1 Position of the acceleration pickup



Fig.5.2 Experiment scene

実験では、ラケットの sweet spot でボールを打った場合と、わざと sweet spot をはずして打った場合の2つの方法で行った。また、ラケットはそれぞれ初級者用、上級者用と呼ばれている2種類のラケットを使用した。

本研究でも実験モード解析で使用した FFT アナライザと3軸加速度ピックアップを使用した。

実打試験で得られた応答の測定結果から、信号処理によって周波数応答関数を求める。FFT アナライザに入力された加速度ピックアップによる信号は、毎回フーリエ変換し、伝達関数として記録し、縦軸を加速度、横軸を周波数としてグラフ化した。初級者用ラケットの振動を Fig.5.3 に、上級者用ラケットの振動を Fig.5.4 に示す。

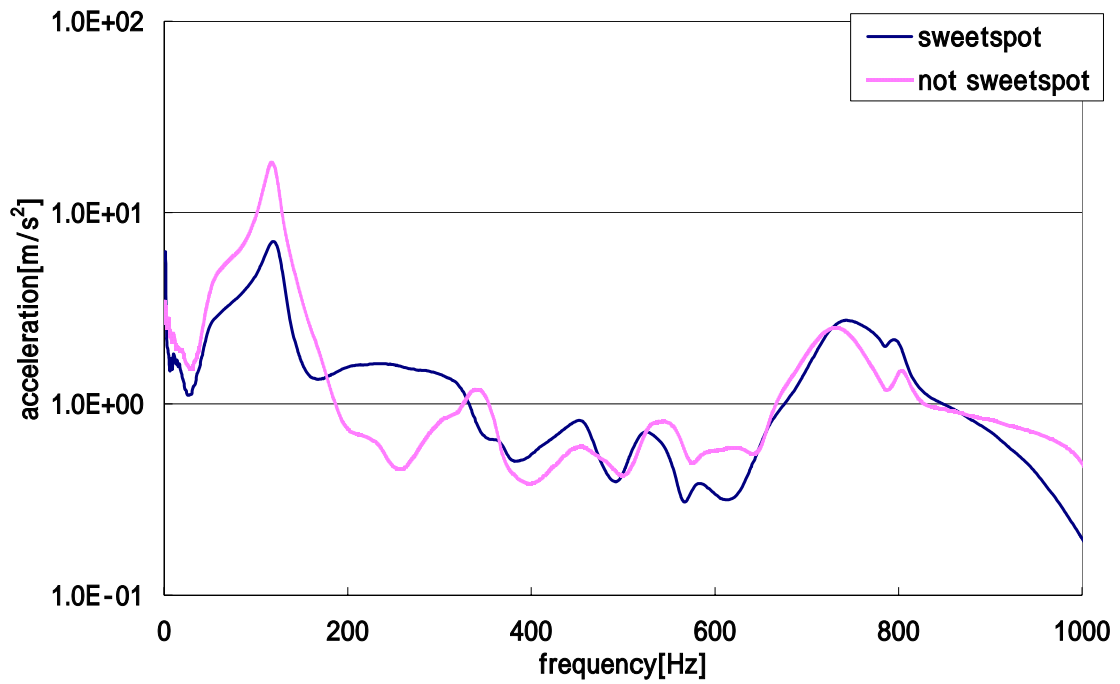


Fig.5.3 Vibration of the racket for the beginner in striking actually

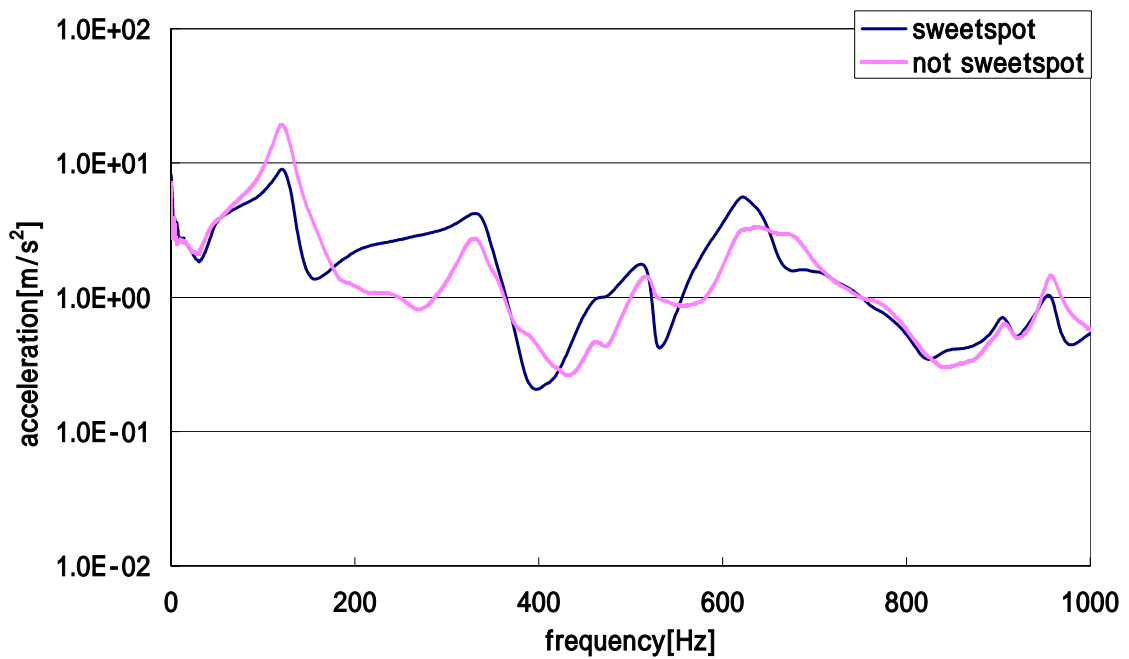


Fig.5.4 Vibration of the racket for the upper grade person in striking actually

5.3 実験モード解析との比較

初級者用も上級者用も **sweet spot** で打ったときと外して打ったときの波形は異なるものが出た。また、どちらのラケットでも **sweet spot** を外して打った場合の1次の振動が最も大きな振動であった。

この結果から、**sweet spot** を外して打った場合では1次の固有モードが最も影響し、この振動が一番手に伝わってきていると考えられる。

第6章 ボール落下時のテニスラケットの振動

6.1 はじめに

実打試験は人間がラケットを持っているのでラケット本体での振動は測定できない。そこで、実打時の振動よりも詳細なデータを得るためにボールの落下試験を行う。

6.2 ボールの落下試験

まず、ラケット単体での振動特性を得るためにラケットを自由支持状態にする。今回は Fig.6.1 に示すようにラケットをやわらかいスポンジではさむことで自由支持を作った。図の①～⑤はそれぞれボールを落とした場所である。入力の値を一定にするためにラケットの 30cm 上からそれぞれの場所にボールを落とした。測定には実打試験と同様に加速度ピックアップおよび FFT アナライザとして CAT-System を使用した。加速度ピックアップは図に示した位置に取り付け振動を測定した。

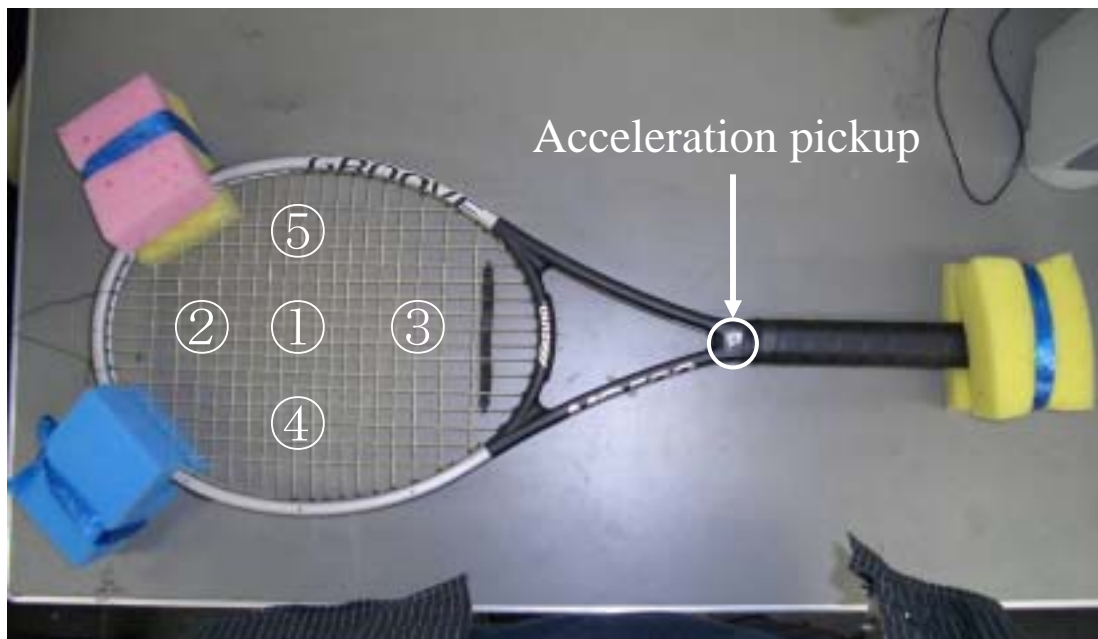


Fig.6.1 Experiment scene

初級者用ラケットから得られた振動を Fig.6.2 に、上級者用ラケットから得られた振動を Fig.6.3 に示す。

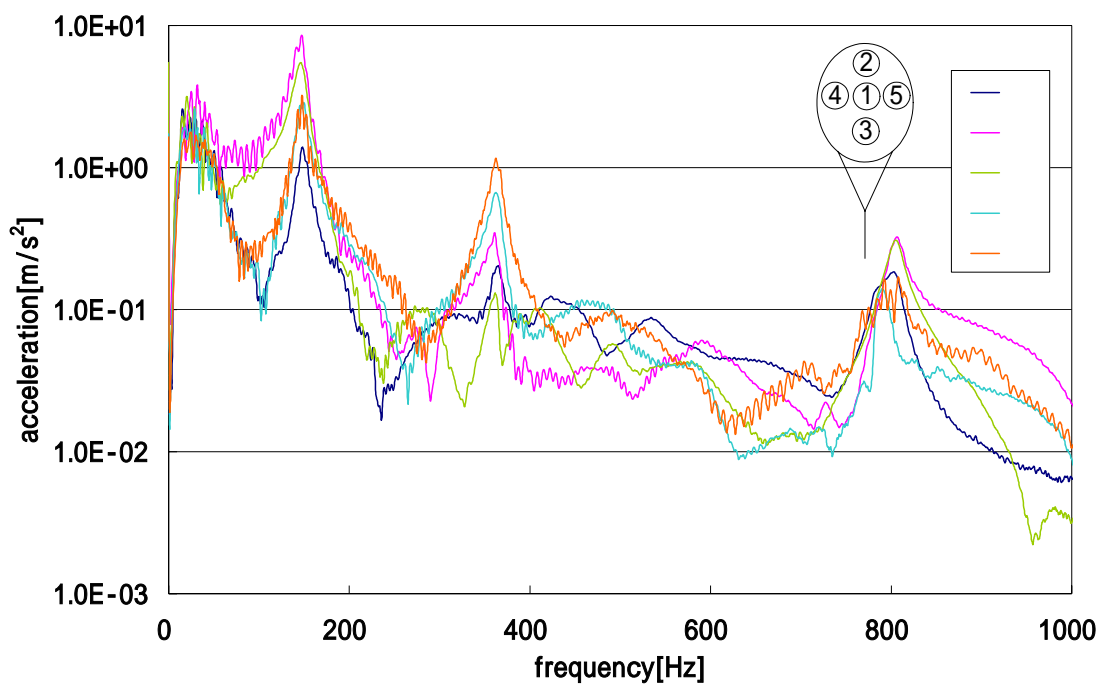


Fig.6.2 Vibration in dropping the ball for beginner

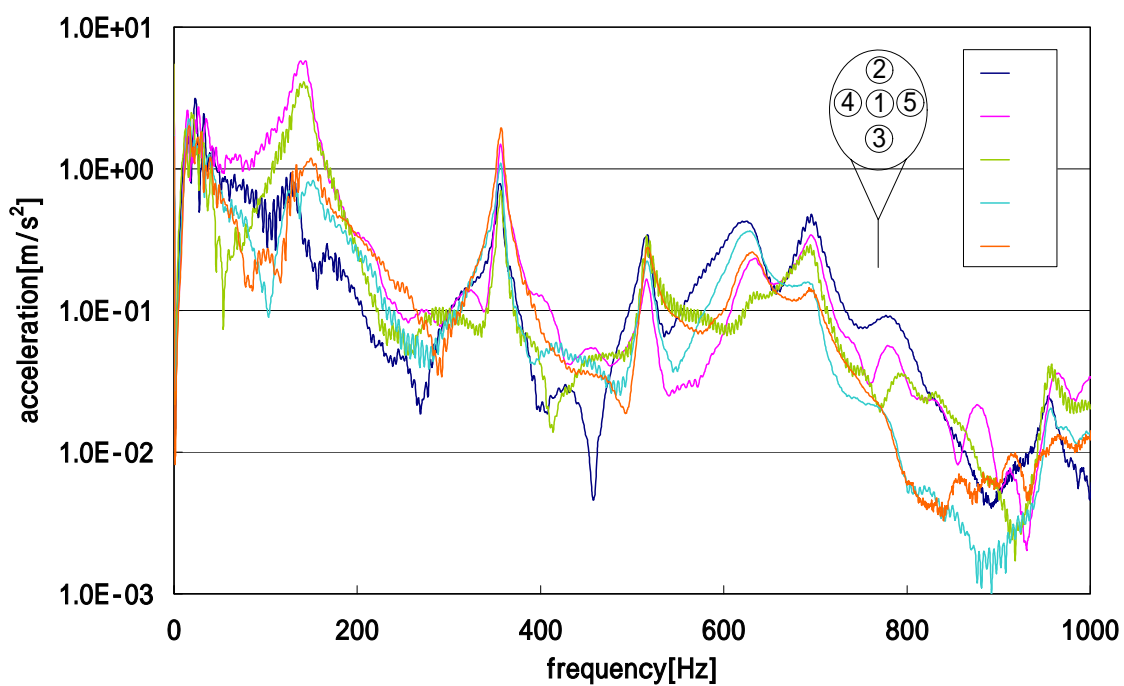


Fig.6.3 Vibration in dropping the ball for the upper grade person

6.3 実験モード解析との比較

初級者用ラケットでは 150.5Hz 付近(第1次モード)では①④⑤で小さな, ②③で大きな振動が得られ, 370.6Hz 付近(第2次モード)では①②③で小さく④⑤で大きな振動が得られた. これは実験モード解析によって得られた固有モードの振幅大小と一致した. 上級者用のラケットでも同じことが言える.

第7章 反共振点移動理論を用いた構造最適化

7.1 はじめに

テニスラケットは様々な材料が混ざり合っていており、また、複雑な形状をしているために正確なモデル化が困難である。

そこで今回は、模型テニスラケットとしてテニスラケットと同じ1次の固有振動数を持つアルミ板を使いモデル化し、NASTRANにより計算から共振点と反共振点を求めた。

また、アルミ板の板厚およびその周囲に付けた質量に対し、反共振点移動理論を用いて、実験で最も振動が大きいことがわかった第1次モードにおいて加振応答点を節にすることにした。

7.2 共振点と反共振点の計算

今、Fig.7.1のような2自由度不減衰系を考える。

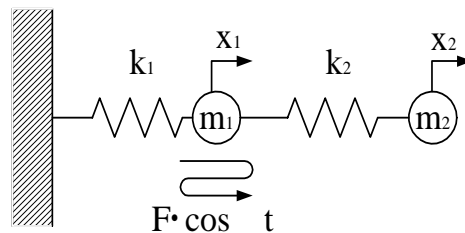


Fig.7.1 System of the two-degree-of-freedom

この系の運動方程式は、

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 = F \cdot e^{j\omega t} \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 - k_2 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

となる。2自由度系の運動方程式の解を複素指数関数の形で仮定して、

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{とおく。ここで } X_1 \text{ と } X_2 \text{ は振幅であり、時刻 } t \text{ に関係のない}$$

値である。これを式(7.1)に代入すると、

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \cdot \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

を得る。これから、 X_1 を求めると、

$$X_1 = \frac{(-\omega^2 \cdot m_2 + k_2)F}{(-\omega^2 \cdot m_1 + k_1 + k_2)(-\omega^2 \cdot m_2 + k_2) - k_2^2} \quad (7.3)$$

となる。質量 m_1 の反共振点の振動数は振幅 X_1 が 0 のときの振動数なので

$$\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (7.4)$$

ここで質量 m_1 を固定した場合の固有振動数を考える。このときの運動方程式は、

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + k_2 \cdot x_2 = F \cdot e^{j\omega t} \quad (7.5)$$

となる。ここで同様に x_2 を置き換えると、

$$(-\omega^2 \cdot m_2 + k_2)X_2 = F \quad (7.6)$$

となり、このときの固有振動数は

$$\omega' = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (7.7)$$

である。これは(7.4)式の反共振点と一致する。

このことより、2自由度系の反共振点は加振応答点を固定したときの固有振動数である。多自由度系においては、(7.2)式の係数行列の加振・応答点の行成分と列成分を取り除いた余因子行列 = {0} の固有値方程式を解くことで反共振点を求めることができる。

以上のことを用いて今回 NASTRAN で計算することのできた自己周波数応答関数及び固有振動数、反共振点の周波数を Fig.7.2 に示す。

NASTRAN の計算においてもそれぞれの値が計算でき、自己周波数応答関数の底部に反共振点が一致することが確認できた。

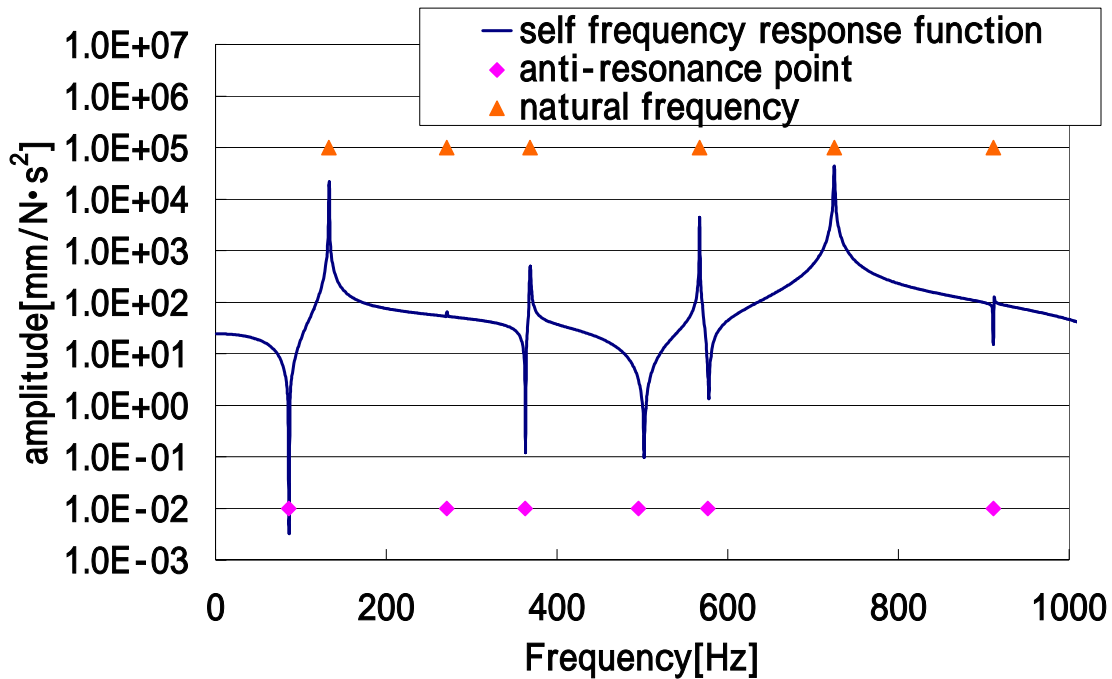


Fig.7.2 Calculation result of the anti-resonance point

7.3 反共振点移動理論

まず、NASTRAN の計算により最適化したい項目について、その場所をどれだけ変化させればいいのかという感度 $\partial f / \partial m$ が計算できる。この感度を使用し、目標とする周波数を求める。

現在の周波数を f_0 、目標とする周波数を f とすると、1つの場所を変化させるためには、

$$f = f - f_0 = m \cdot \frac{\partial f}{\partial m} \quad (7.8)$$

ここで、 Δm が求めたい変化量である。実際には n 個の場所を変化させ構造最適化するので、

$$f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial m_i} \cdot m_i \quad (7.9)$$

となる。

共振点の周波数を f_R 、反共振点の周波数を f_U とすると、

$$f_R = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_R}{\partial m_i} \cdot m_i \quad (7.10)$$

$$f_U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_U}{\partial m_i} \cdot m_i \quad (7.11)$$

である.

また, 構造最適化のためには共振点と反共振点の周波数が一致するので,

$$f_R + f_R = f_U + f_U$$

$$f_R - f_U = f_U - f_R$$

$$\therefore f_U - f_R = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_R}{\partial m_i} - \frac{\partial f_U}{\partial m_i} \right) \cdot m_i \quad (7.12)$$

ここで $\frac{\partial f_R}{\partial m_i} - \frac{\partial f_U}{\partial m_i} = a_i$ とおくと, 擬似最小二乗法より,

$$\{ m \} = \{ a \} \cdot [\{ a \}^T \cdot \{ a \}]^{-1} \cdot (f_U - f_R) \quad (7.13)$$

式(7.6)から算出される変化量 $\{\Delta m\}$ は, もとの値 m_0 よりも大きくなりすぎて

しまい計算誤差が大きくなってしまふ. そこで今回は $b \cdot \left| \frac{m_i}{m_0} \right|_{\max} = 1.8$ とな

るような定数 b を $\{\Delta m\}$ にかけて使用する. ここでの基準値 1.8 は計算誤差がほとんどない範囲内にある.

7.4 質量の構造最適化

7.4.1 1つの加振応答点に対する構造最適化

まず, アルミ板の周囲 36ヶ所に 1.0 g の質量を付ける. Fig.7.3 に今回使用した有限要素モデルを示す. モデルの寸法は縦の長さをテニスラケットとほぼ同じ長さにし, $L \times W \times H = 690 \times 200 \times 12$ [mm], 質量は 4.24 [kg] となった. また, $L \times W \times H = 10 \times 10 \times 4$ [mm] の六面体要素を使用してメッシュを切り, 接点数 5880, 要素数 4140 となった.

Fig.7.4 に質量をつけた 36ヶ所を示す. 加振応答点は図に示す箇所にした. これはアルミ板をテニスラケットに見立てた場合に, ラケットの面の中心にくるような位置とした.

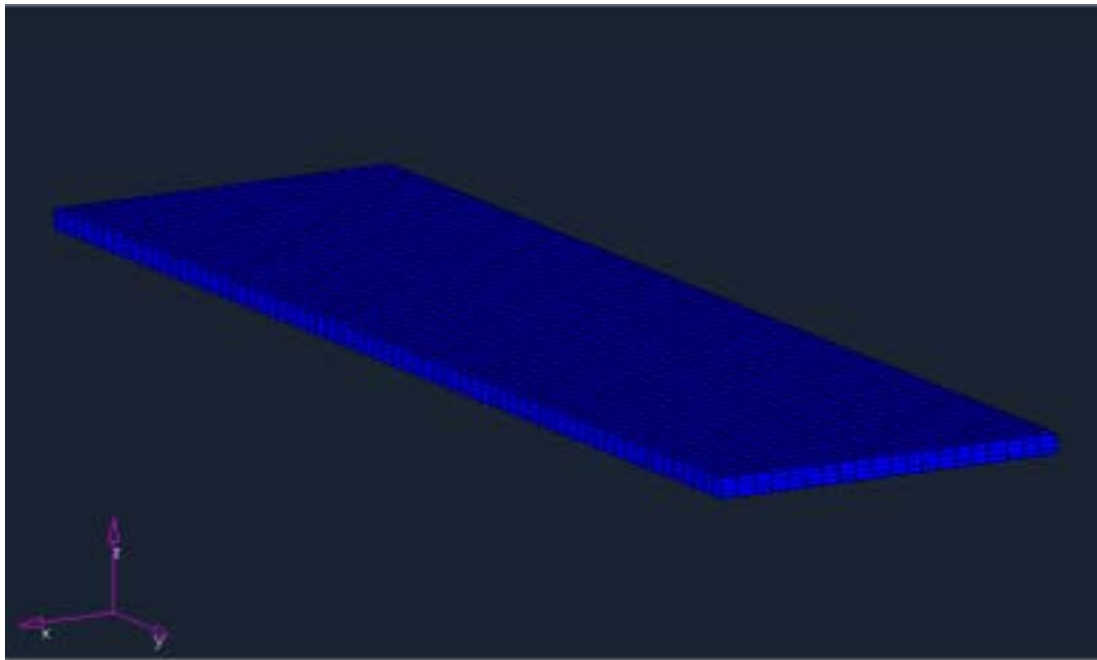


Fig.7.3 FEM model

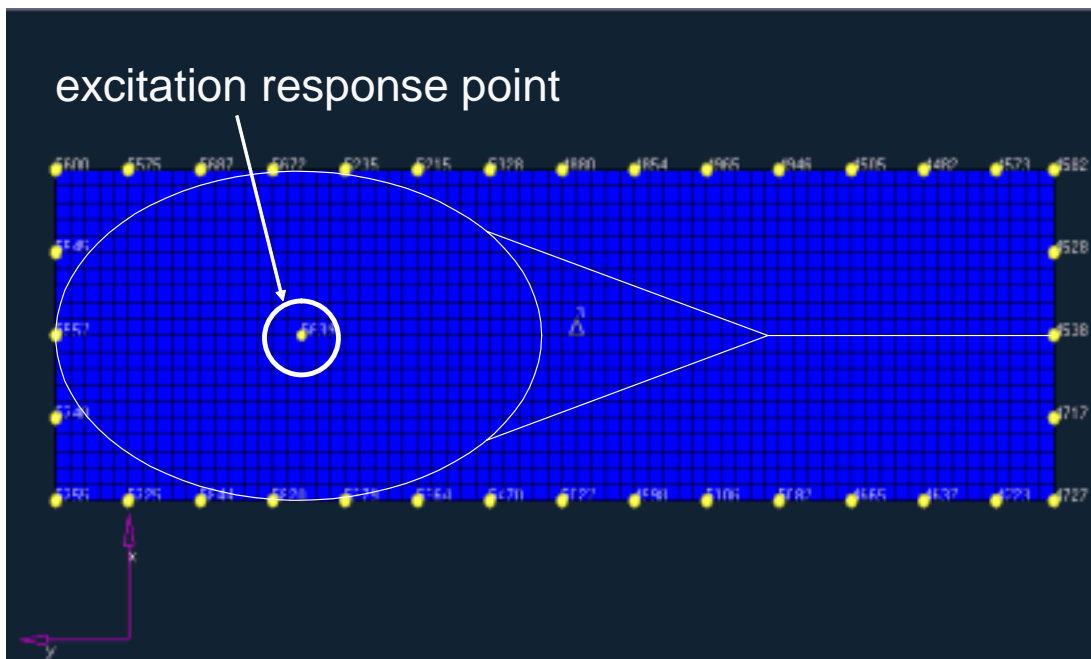


Fig.7.4 36 places which added the mass

周囲に付けた質量を設計変数とし、実験によって最も振動が大きいことがわかった第1次モードにおいて加振応答点を節にすることにした。構造最適化後の質量の分布を Fig.7.5 に示す。

図の円の面積の大きい部分が質量の大きいことを表し、構造最適化後の質量

は最大で 42.9g, 計 635g となった. これはモデルの約 15%の質量となった.

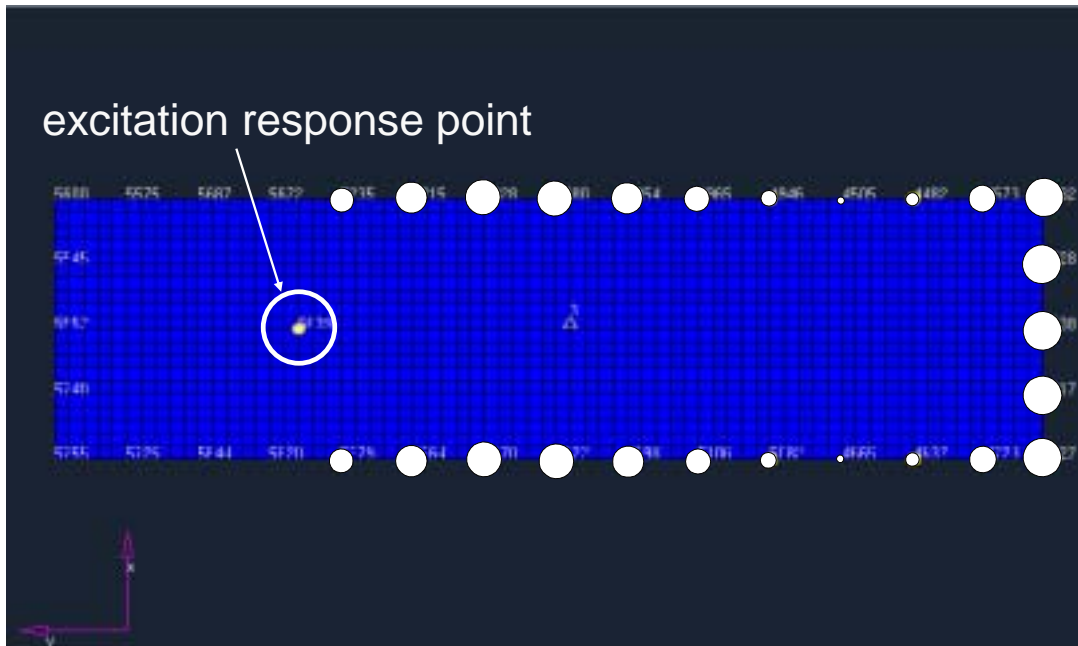


Fig.7.5 Mass distribution

繰り返し計算した際の, 共振点がなくなるまでの周波数応答関数の経緯を Fig7.6 に示す.

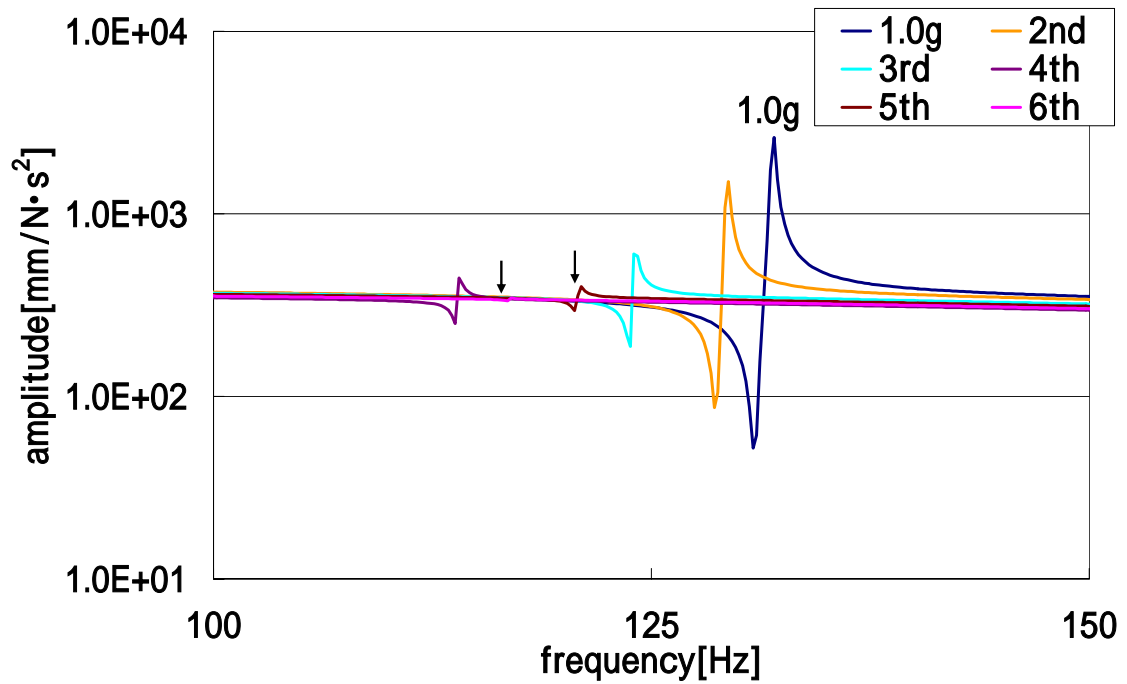


Fig.7.6 Frequency response function of the mass change

今回の計算では3回目から4回目が離れているが、これは前述の補正值が大きく、求めたい周波数を過ぎてしまったためと考えられ、補正值を小さくしたところ5回目のようになり6回目の計算でほぼピークを消すことができた。

計算から得られた共振点と反共振点の変化を Fig.7.7 に示す。

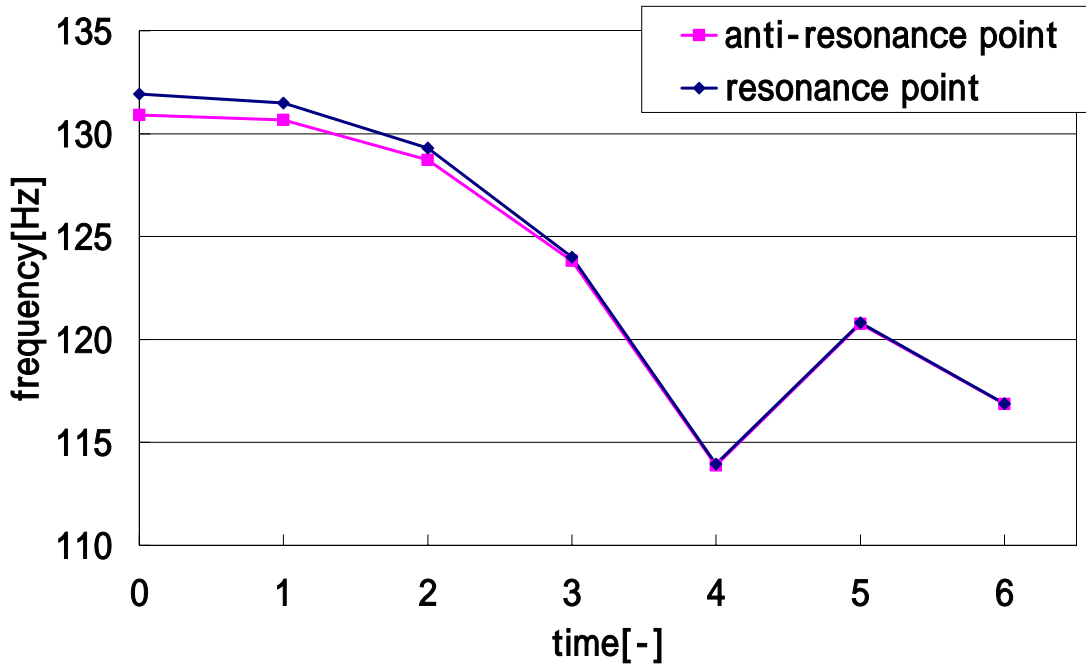


Fig.7.7 Change of the frequency

続いて構造最適化前の第1次モードの変位を Fig.7.8 に、構造最適化後の第1次モードの変位を Fig.7.9 に示す。

図中の赤い部分が6mm以上の変位がある部分で、青い部分が変位の小さい部分、すなわちモードの節となる部分である。図からもわかるとおり、節の位置を変化させ加振応答点を節にすることに成功した。

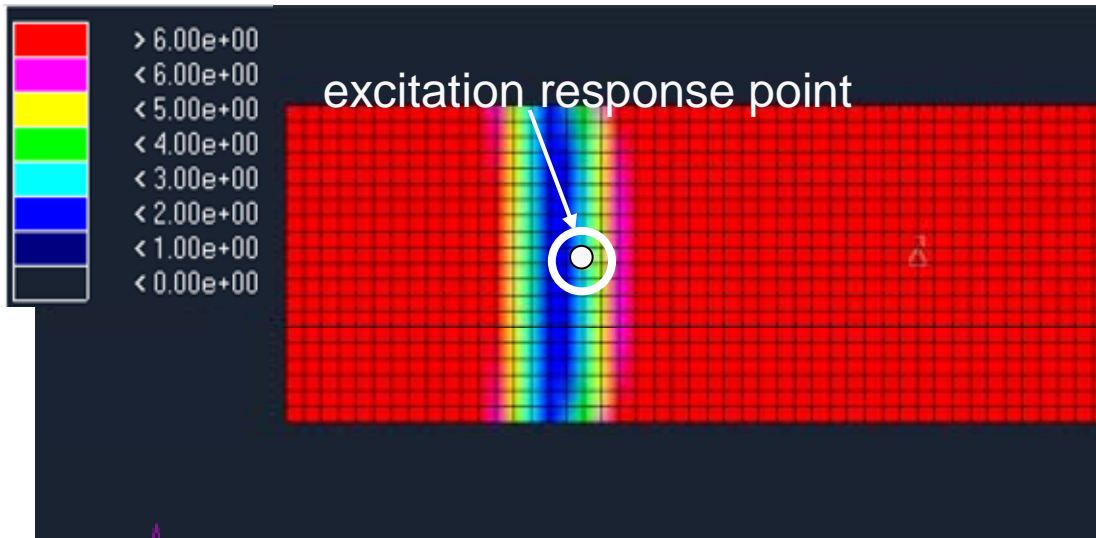


Fig.7.8 Displacement before structural optimization of the first mode

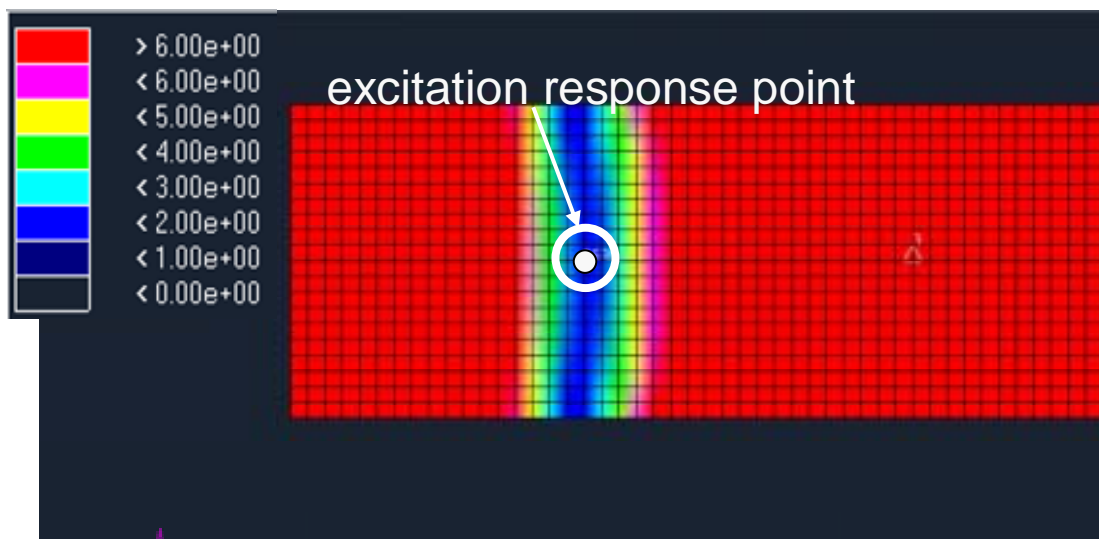


Fig.7.9 Displacement after structural optimization of the first mode

7.4.2 2つの加振応答点に対する構造最適化

前項で設計変数を質量とした場合、1つの加振応答点に対しては構造最適化することができた。ここでは節の幅を広げることが目的とし、加振応答点を2つにした場合の構造最適化について述べる。

有限要素モデルは前項と同じものを使用した。2つの加振応答点の箇所をFig.7.10に示す。この2つの点は構造最適化する前の第1次モードの節をはさむような場所にとった。

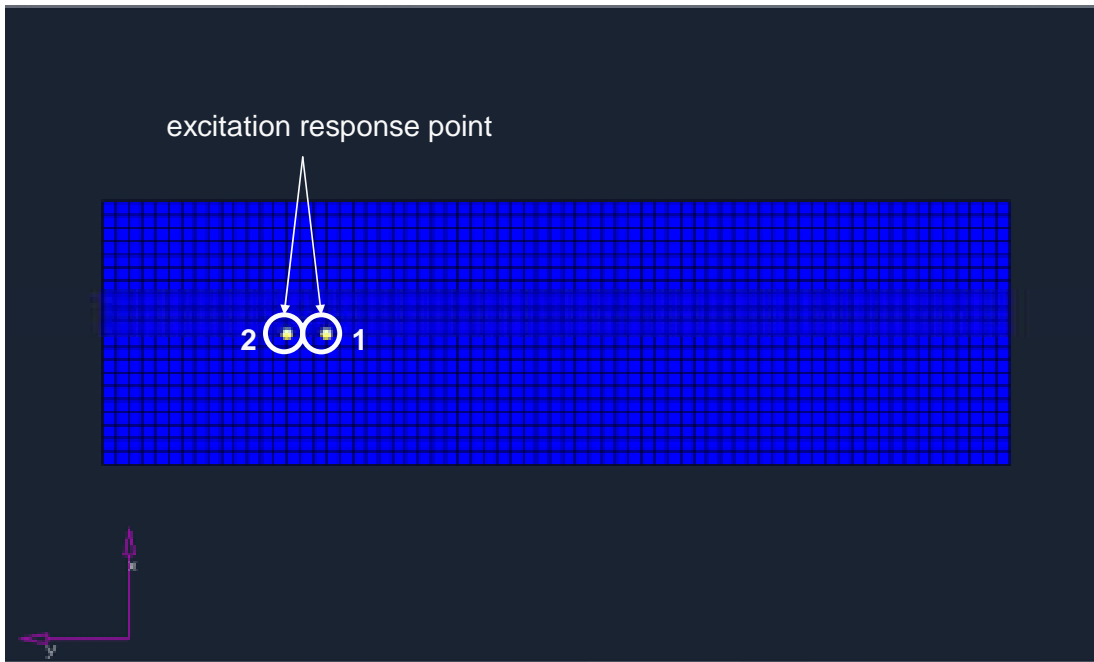


Fig.7.10 Position in two excitation response point

前項と同様に周囲に付けた質量を変え，第1次モードにおいて2つの加振応答点を節にする．繰り返し計算した際の加振応答点1番の周波数応答関数の経緯を Fig.7.11 に，その際の共振点と反共振点の変化を Fig.7.12 に示す．

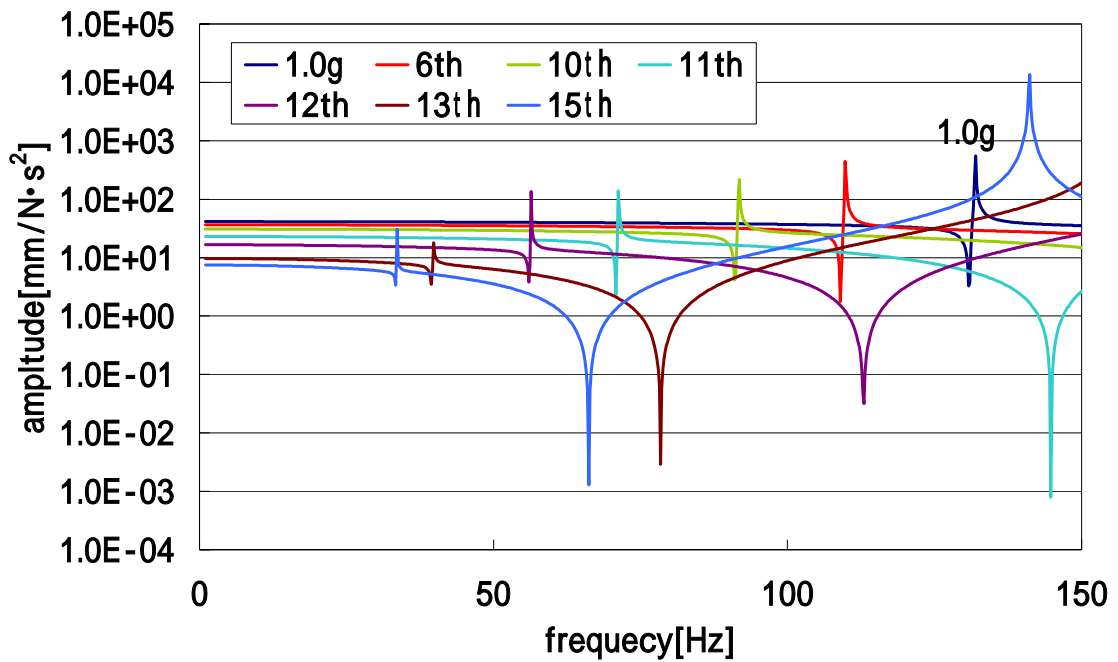


Fig.7.11 Frequency response function of the mass change

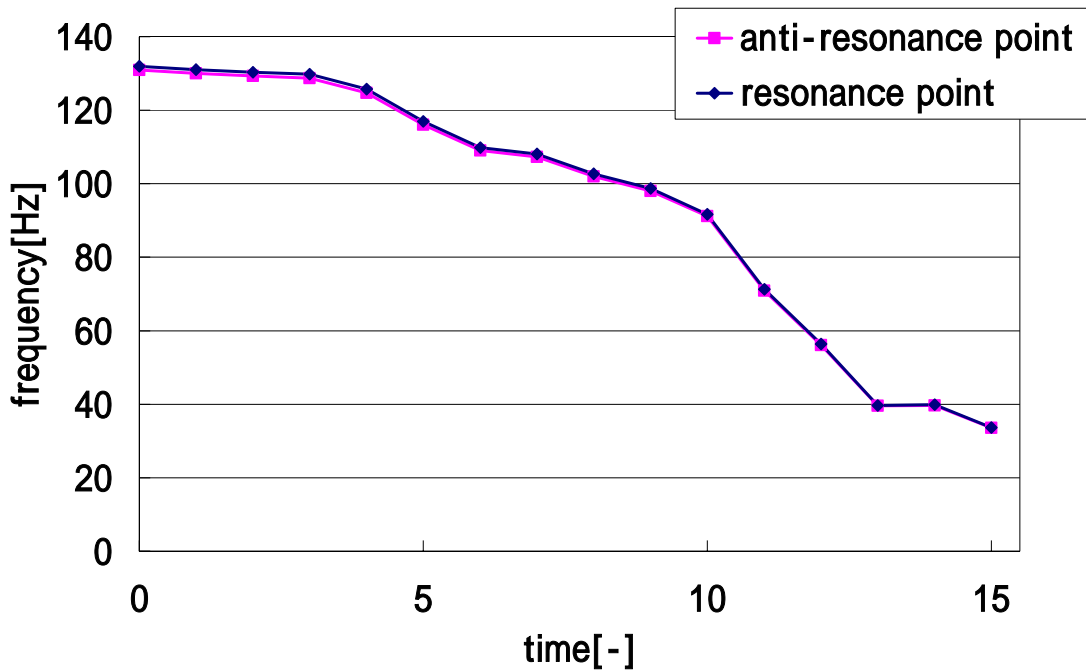


Fig.7.12 Change of the frequency

今回, 15 回目の計算で全体の質量の合計が 27.9[kg]となったが共振点を消すことができなかった. 共振点の振幅は徐々に小さくなっているが, これは全体の質量が大きくなったために固有振動数, 反共振点と同じ割合で小さくなり, その差も同時に小さくなったためだと思われる.

7.5 板厚の構造最適化

7.5.1 1つの加振応答点に対する構造最適化

ここでは設計変数を板厚として構造最適化を試みる. 使用した有限要素モデルを Fig.7.12 に示す. モデルの寸法及び質量は質量の構造最適化と同様だが, メッシュを切っている要素は $L \times W = 10 \times 10$ [mm]の板要素を使用した. 接点数は 1470, 要素数は 1380 となった.

構造最適化後の板厚を Fig.7.13 に示す. 図中の青い円が加振応答点で, 色が薄い部分が板の厚さが薄い部分で, 濃い部分が板の厚い部分である. 厚さの最も薄い部分が 9.56[mm], 最も厚い部分が 14.1[mm]となった. 最も厚い部分は加振応答点とした場所であった.

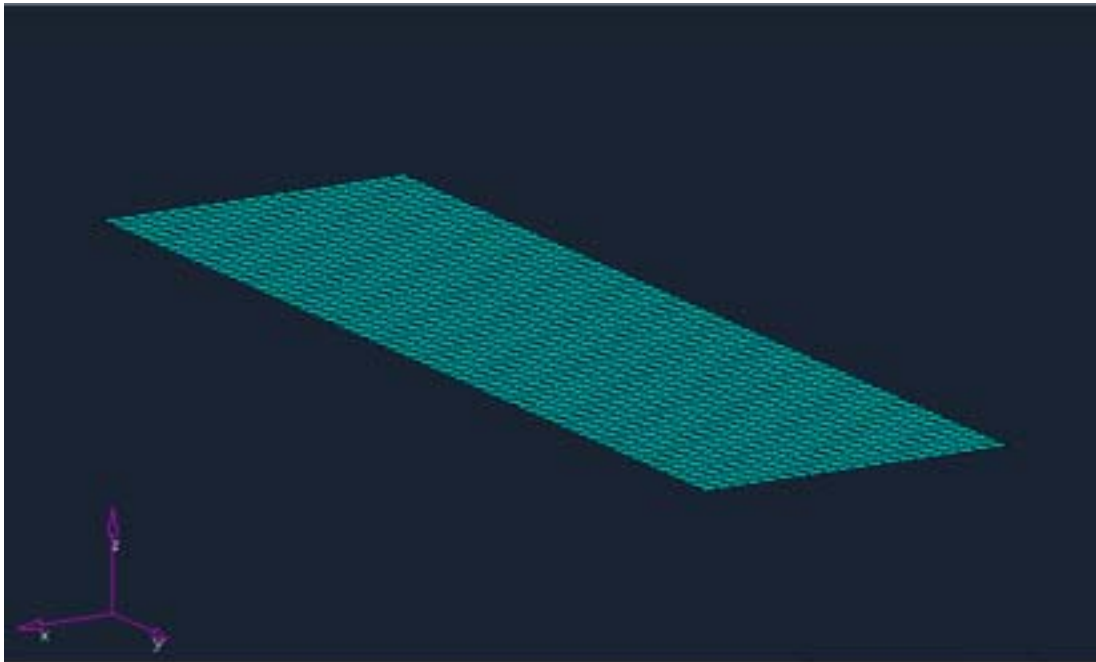


Fig.7.12 FEM model

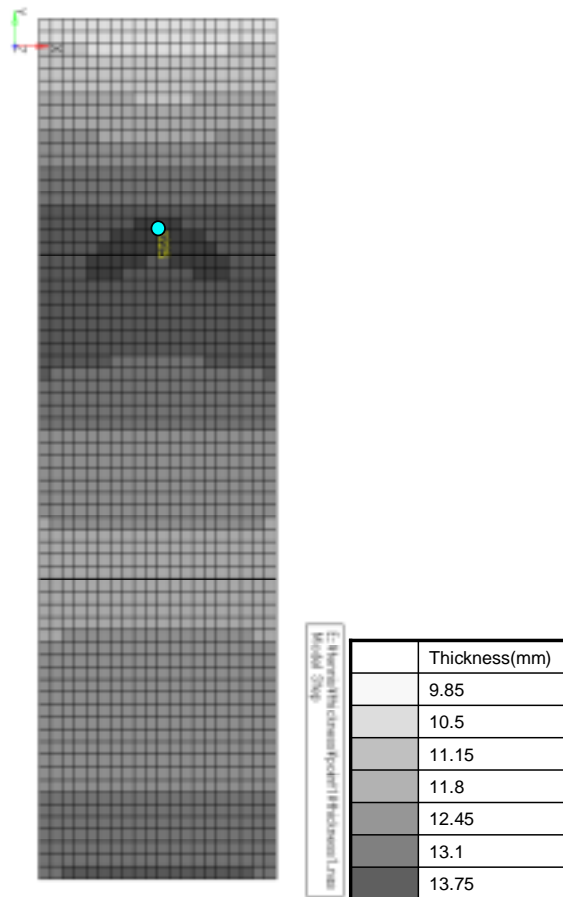


Fig.7.13 Distribution of the thickness

また、繰り返し計算をした際の周波数応答関数を Fig.7.14 に、得られた共振点と反共振点の周波数の変化を Fig.7.15 に示す。

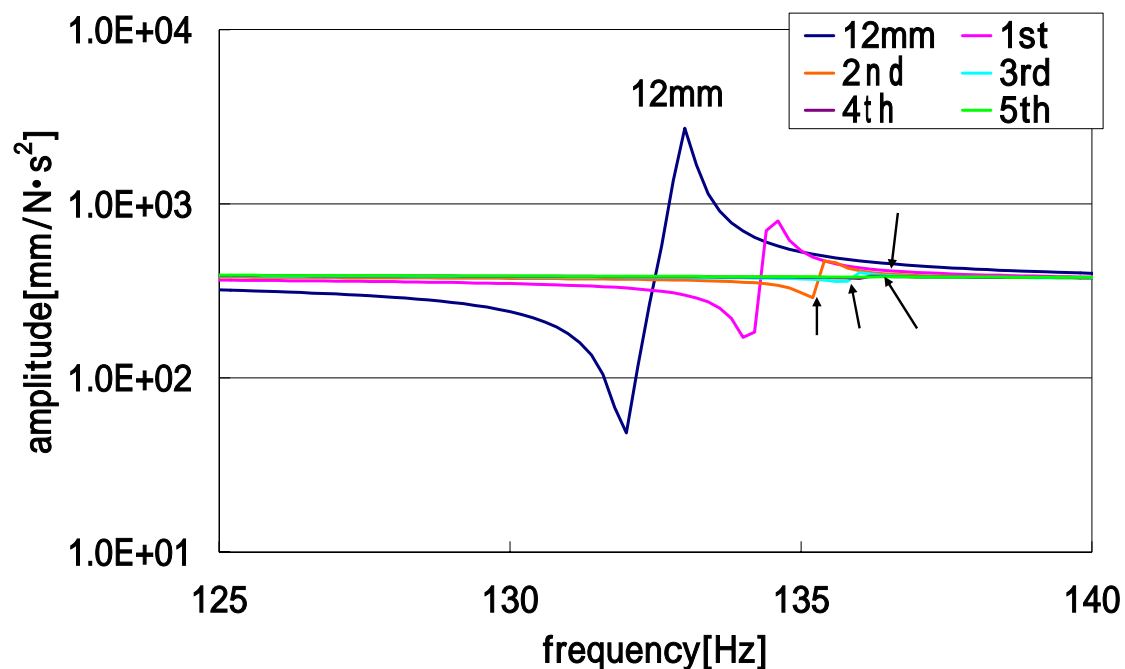


Fig.7.14 Frequency response function of the thickness change

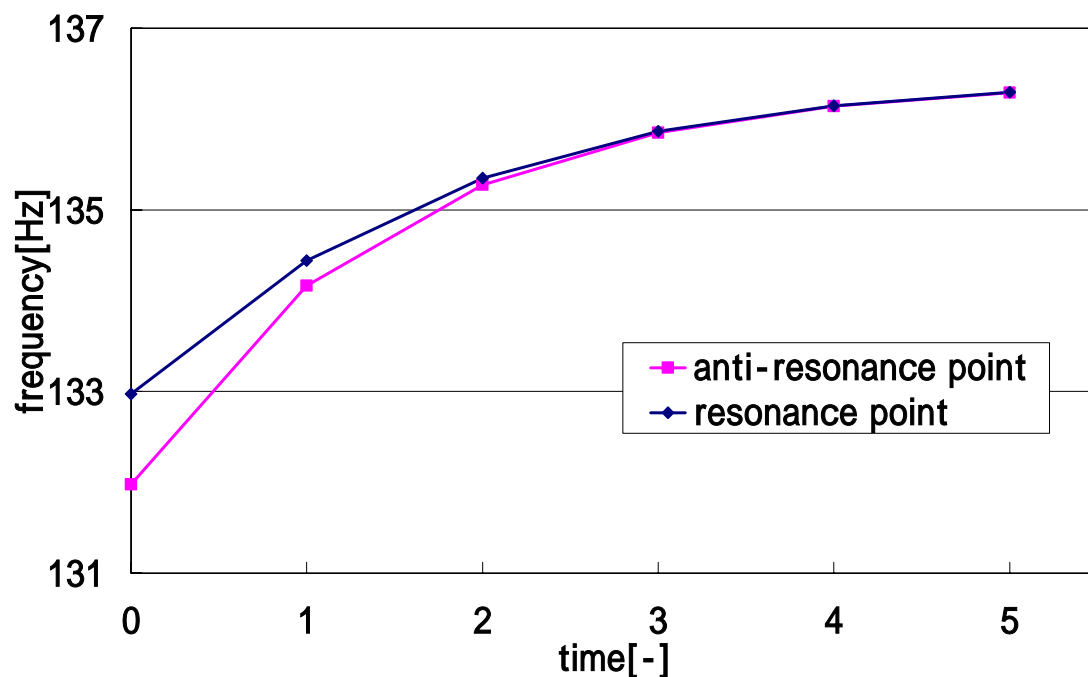


Fig.7.15 Change of the frequency

設計変数を板厚とした場合、固有振動数と反共振点が共に高くなっていき、計算 5 回目にはほぼピークを消すことができた。変化量をそのまま使用しても計算誤差が少なかったため、前述の補正值は使わなかった。

7.5.2 2つの加振応答点に対する構造最適化

前項で設計変数を板厚とした場合、1つの加振応答点に対して構造最適化することができた。ここでは設計変数を質量とした場合と同様に、節の幅を広げることを目的として、加振応答点を2つにして構造最適化を行う。

有限要素モデルは前項と同じものを使用した。2つの加振応答点の箇所を Fig.7.16 に示す。この2つの点は質量の時と同様に、構造最適化前の第1次モードの節をはさむような場所にとった

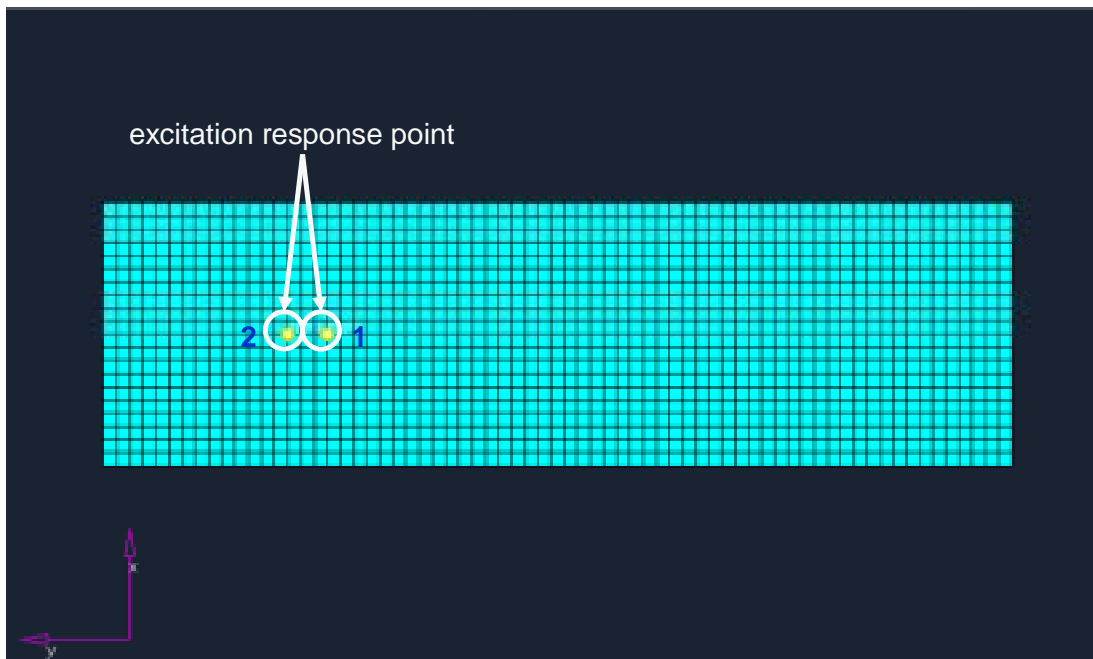


Fig.7.16 Position in two excitation response point

前項と同様に板厚を変更し、第1次モードにおいて2つの加振応答点を節にする。繰り返し計算した際の加振応答点1番の周波数応答関数の経緯を Fig.7.17 に、その際の共振点と反共振点の変化を Fig.7.18 に示す。

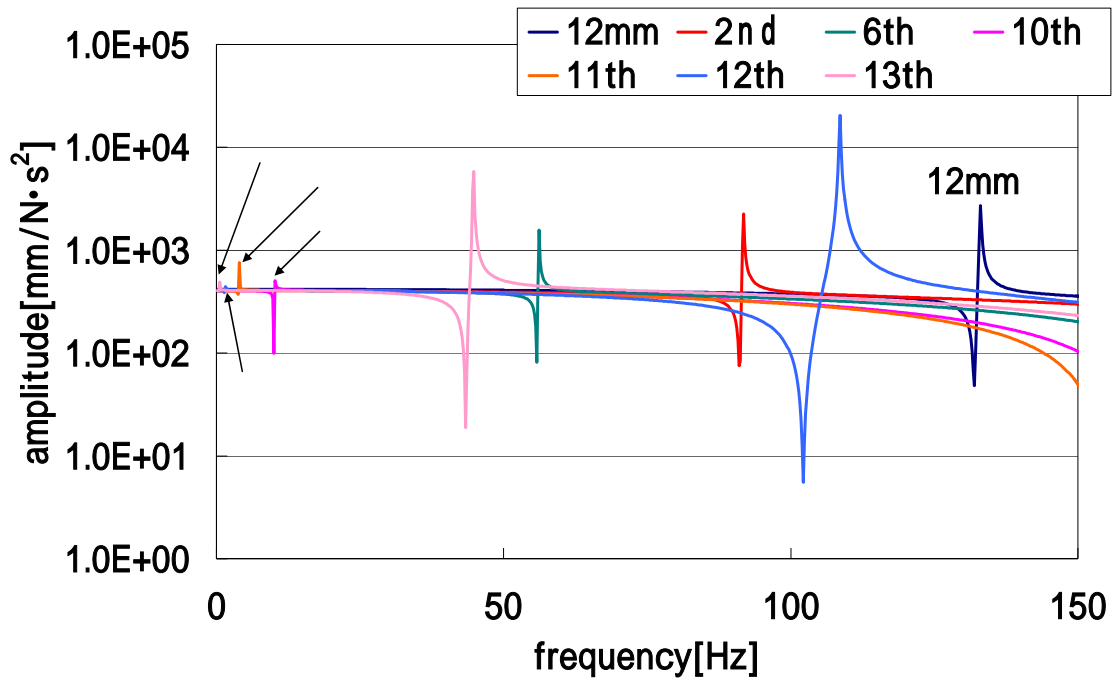


Fig.7.17 Frequency response function of the thickness change

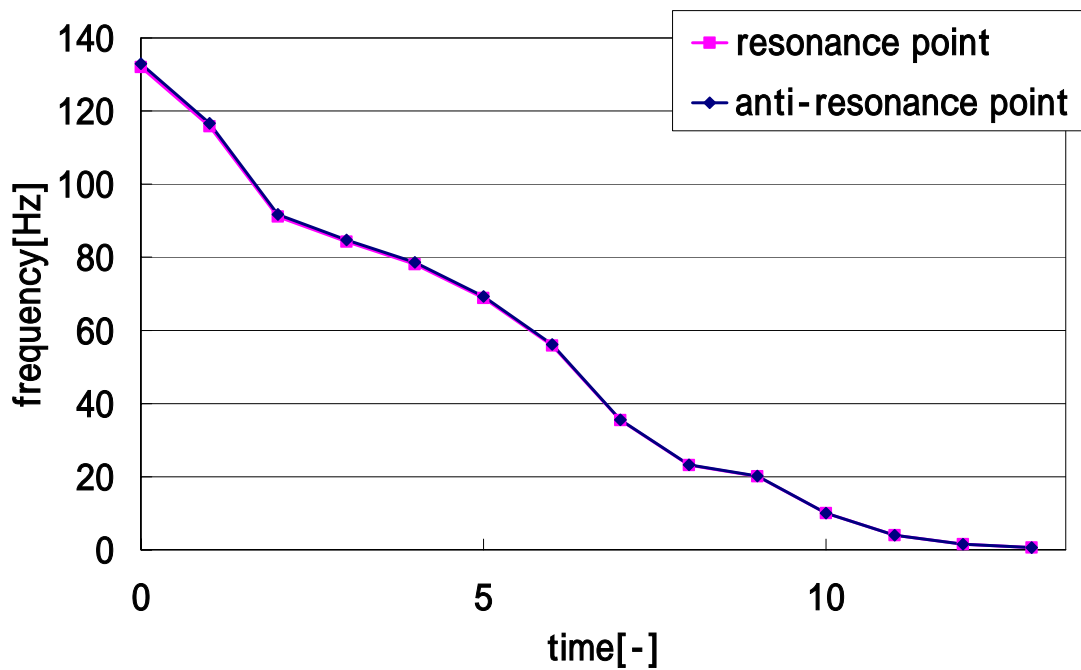


Fig.7.18 Change of the frequency

質量を設計変数とした場合と比べると、周波数の変化の割合は大きかったが、最終的に共振点の振幅をなくすことはできなかった。

第8章 結論

8.1 結論

本研究から以下の結論が挙げられる。

1. テニスラケットの実打試験から初級者用も上級者用も **sweet spot** から外れて打った場合の第1次モードの振動が最も大きな振動であることがわかった。
2. ボールの落下試験ではラケットの面のそれぞれの場所で振動の大きさが異なり、実験モード解析の結果とも一致する振動が得られた。
3. NASTRAN による反共振点の計算が可能となり、自己周波数応答関数の底部とも一致することが確認できた。
4. ある1点の加振応答点に対して、第1次モードを節にするという構造最適化を設計変数をアルミ板周囲の質量及びその板厚とした場合行うことができた。

8.2 今後の課題

今後の課題としては、

- ①2点の加振応答点に対する構造最適化を成功させる。
- ②実際のアルミ板に実験モード解析を行い、本当に加振応答点が節となっているかを確認する。
- ③テニスラケットのモデルに対し、反共振点移動理論を用いて構造最適化を行う。

ということが挙げられる。

参考文献

- 1) 長松昭男, モード解析入門, 1993年, コロナ社
- 2) 梶原・他3名, 日本機械学会論文集, No.87-1173A, p.2084-2087 (1988)
- 3) 川副嘉彦, 日本機械学会論文集, No.89-1210B, p.1511-1517 (1990)
- 4) 石井・他2名, 非線形最適化法による実験モード解析, 法政大学計算科学研究センター研究報告 16 巻, p.41-46 (2003)
- 5) 石渡・他2名, モード解析による打楽器シンバルの振動特性に関する研究, 法政大学計算科学研究センター研究報告 16 巻, p.35-40 (2003)

謝辞

本研究を行うにあたり，懇切丁寧に御指導，御助言をして下さいました，法政大学 長松昭男 教授，岩原光男 助手に心より感謝の意を表すると同時に，この場を借りて深く御礼申し上げます。

また，実験・データ解析作業等に尽力してくれた本研究担当 法政大学学部 4 年生 鈴木芳君，何かと力になって下さった，長松研究室の皆様に感謝致します。