

4地点間の交通量モデル

鈴木, 武

(出版者 / Publisher)

法政大学経営学会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

経営志林 / The Hosei journal of business

(巻 / Volume)

32

(号 / Number)

3

(開始ページ / Start Page)

55

(終了ページ / End Page)

75

(発行年 / Year)

1995-10-30

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00003417>

4 地点間の交通量モデル

鈴木 武

I. はじめに

1.1 本稿の構成

本稿では、4 地点間の交通量を考察する。I. では、道路サービスに関する需要、供給関数を考え、その均衡状態を 1 次近似式で導く。それに基づき、2 地点モデルの解を求めている。II. では、3 地点モデルを解いているが、そのさい無経由通行状態を考え、それによって表現している。III. では、4 地点モデルの可能なケースについて述べている。その結果、2 つのパターンがあることが分かる。IV. では 4 地点モデルのうちパターン A を、V. ではパターン B を解いている。本稿の最後には、記号の一覧を載せた。

1.2 交通量の需給関数

いくつかの地点があり、それらの各地点を結ぶルートがあるとする。いま地点 A, B 間を通行するという場合の用語の区別をしよう。どのルートを通過するかはともかくとして、起終点が地点 A および B であるような交通の場合、『地点 AB 間の通行を目的とする交通』といい、『目的交通』と呼ぶことにする。地点 AB 間の番号を i とするならば、その交通量を z_i と表す。それに対し、起終点が地点 A, B であるかにかかわらず、AB 間を直接結ぶルートを通過する交通を、『地点 AB 間を通過する交通』といい、『通過交通』と呼ぶ。同様に地点 AB 間を直接結ぶルートの番号を i とするならば、その交通量を y_i と表す。

ここで、『地点間 i 』と『ルート i 』という用

語の使い方を区別しておこう。地点間 i の場合には、その地点間を結ぶルートはいくつかありうるが、ルート i の場合には、他の地点を経由することなくその地点間を直接結ぶルートを指すことにする。

ある単位期間における地点間 i の目的交通量を z_i とする。この大きさは、どのルートを通過するかに関わらず、その地点間を通行することにより得られる便益の高い順から利用者を並べ、ある便益 p_i を指定したとき、その大きさ以上の便益が得られる交通量である。その逆関数を取り、通常的需求関数の形で表現すると

$$p_i = D_i(z_i) \quad (1.1)$$

である。

地点間 i を通行するには、時間がかかる。得られる便益の大きさは、当然、その所要時間コストをカバーするものである。ここでは、地点間 i を移動する場合いくつかのルートがありうるが、それぞれの所要時間のうちルート i を直接通過するときに、所要時間がもっとも短いと想定している。

ルート i を渋滞なくスムーズに通行するときの所要時間を t_i^* とし、それを『無渋滞所要時間』とよぶ。地点間 i を通行しようと思うとき、その無渋滞所要時間は最低限許容できなければならない。従って、得られる便益はその時間コストをカバーしているものとする。

単位時間当たりの機会費用を w とする。それらは各利用者に共通であると仮定する。最低限許容できる所要時間コストを明示的に考慮した場合の便益を P_i とする。従って、便益関数は

$$P_i = wt_i^* + D_i(z_i) \quad (1.2)$$

と表現される。

次に、ルート i の通過交通量について考えよう。これは地点間 i の目的交通量と一致するとは限らない。従って、この交通量を y_i とする。無渋滞所要時間で通行できる最大の交通量を y_i^* とし、『無渋滞交通量』とよぶ。

ここでは、道路建設投資が所与である短期のケースを考えよう。通過交通量が無渋滞交通量を超過して増加すれば渋滞が発生し、所要時間は長くなる。従って、所要時間は通過交通量の関数として表現される。すなわち

$$\begin{aligned} t_i &= t_i(y_i) & y_i &> y_i^* \\ &= t_i^* & y_i &\leq y_i^* \end{aligned} \quad (1.3)$$

ただし

$$\frac{\partial t_i}{\partial y_i} > 0 \quad y_i > y_i^*$$

と表現される。

1.3 均衡方程式

各地点間の目的交通量および各ルートの通過交通量がどの水準で決まるか考えよう。そのさい、各地点間の移動という『道路サービス』を考え、それぞれの需要、供給が均衡するという枠組みで考察することにしよう。

地点間 i に対する交通需要は (1.2) 式で表される。その場合、もし渋滞がなければ、ルート i を通行するときに所要時間が一番短いと想定しているから、地点間 i に対する交通需要をルート i に対する交通需要と読み変えてもよい。

他方、ルート i の交通供給は、価格ゼロのケースでは需要者の負担は所要時間コストだけであるので、供給関数は所要時間だけで決まる。そのさい、所要時間に影響するのは実際にそのルートを通過する交通量であるので、ルート i の供給関数は (1.3) 式から

$$P_i = wt_i(y_i) \quad (1.4)$$

となる。従って、ルート i において需給が均衡する交通量は

$$wt_i^* + D_i(z_i) = wt_i(y_i) \quad (1.5)$$

の方程式をみだす。

本稿では、1 次近似で需給均衡式を解くことにする。需給均衡式を y_i^* のまわりで 1 次近似すると、

$$\begin{aligned} wt_i^* + D_i(y_i^*) + (z_i - y_i^*)D_i'(y_i^*) \\ = w \{t_i(y_i^*) + (y_i - y_i^*)t_i'(y_i^*)\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

となる。これを変形すると

$$y_i^* z_i + y_i^c y_i = (y_i^* + y_i^c + y_i^e) y_i^* \quad (1.7)$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned} p_i^* &= D_i(y_i^*) \\ s_i^* &= -\frac{1}{D_i'(y_i^*)} \\ y_i^c &= s_i^* w y_i^* t_i'(y_i^*) \\ y_i^e &= s_i^* p_i^* \end{aligned}$$

である。(1.7) 式を『ルート i の需給均衡式』と呼ぶことにする。

p_i^* はルート i において無渋滞交通量を実現させるための価格であり、『無渋滞価格』と呼ぶ。 s_i^* は、無渋滞交通量において料金が 1 単位課されたときに減少する交通量である。 y_i^c はルート i の限界機会交通量である。すなわち、ルート i の無渋滞交通量において、限界機会費用だけ料金が課されるとした場合に減少する交通需要量である。ここで限界機会費用とは、無渋滞交通量において 1 台追加することにより増加する所要時間の全車合計分を貨幣換算した金額である。さらに、 y_i^e はルート i の最大超過交通量である。すなわち、価格ゼロで渋滞がないとしたときの交通需要量から無渋滞交通量を差し引いた超過分を意味している。

均衡交通量を求めるとき、本稿では『混雑度』という概念を用いて表現することにしよう。ここでの混雑度は、無渋滞交通量を基準にして、そ

れを超える交通量の割合をいう。すなわち、ルート i の混雑度を

$$\delta_i = \frac{y_i - y_i^*}{y_i^*} \quad (1.8)$$

と定義する。あるいは

$$y_i = (1 + \delta_i)y_i^* \quad (1.9)$$

と表現される。

1.4 2 地点モデル

2 地点しかない場合の交通量モデルについては、参考文献 (1) で述べている。すなわち、その 2 地点間の目的交通量 z と通過交通量 y とが一致するので、

$$z = y \quad (1.10)$$

である。従って、(1.7) 式から

$$y^*y + y^cy = (y^* + y^c + y^e)y^* \quad (1.11)$$

となる。よって均衡交通量は

$$y = \frac{y^* + y^c + y^e}{y^* + y^c} y^* \quad (1.12)$$

である。これを混雑度で表現すると

$$\delta = \frac{y^e}{y^* + y^c} \quad (1.13)$$

となる。

所要時間については

$$t = t^* + \delta t^c \quad (1.14)$$

となる。ここで、 t^* は無渋滞所要時間、 t^c は限界所要時間合計であり、

$$t^c = y^* t'(y^*) \quad (1.15)$$

と表され、無渋滞交通量において 1 台追加することにより増加する所要時間の全車合計分である。さらに

$$t^e = \delta t^c \quad (1.16)$$

とおく。これは超過所要時間である。

後の議論のために

$$d = \frac{y^e}{t^e} \quad (1.17)$$

を定義する。これは最大超過交通量を超過所要時間で割ったものである。変形して

$$\begin{aligned} d &= \frac{y^* + y^c}{y^e} \frac{y^e}{t^c} \\ &= \frac{y^* + swt^c}{t^c} \\ &= \frac{1}{t'(y^*)} - w \frac{1}{D'(y^*)} \\ &= \left. \frac{dy}{dt} \right|_{y^*} + (-w) \left. \frac{dy}{dp} \right|_{y^*} \end{aligned} \quad (1.18)$$

右辺第 1 項は、無渋滞交通量で所要時間が 1 単位長くなるとするとき、許容される交通量の増加分を示す。第 2 項は、無渋滞交通量を維持する価格が課せられているとき、価格が 1 単位時間に相当する分だけ低下したとするときの交通量の増加分を示す。従って d は、無渋滞交通量において、所要時間が 1 単位分増加し、かつ、価格が 1 単位時間相当分だけ減少するとき許容される交通量の増加を意味する。これを『所要時間限界交通量』と呼ぶことにしよう。

II. 3 地点モデル

2.1 均衡方程式

3 地点の場合については、参考文献 (2) で述べている。いま図 1 のように 3 地点 A, B, C があり、地点間番号を (1) AB, (2) BC, (3) CA とする。各ルートの需給均衡式 (1.7) から

$$\begin{aligned} y_i^* z_i + y_i^c y_i \\ = (y_i^* + y_i^c + y_i^e) y_i^* \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

である。同じ地点間を結ぶのに複数のルートがあるとすると、均衡状態では、どのルートの所要

時間も等しくなることが言える。従って、以下の3つの方程式のどれか1つだけが成り立つ。

$$t_1(y_1) = t_2(y_2) + t_3(y_3) \quad (2.2)$$

$$t_2(y_2) = t_3(y_3) + t_1(y_1) \quad (2.3)$$

$$t_3(y_3) = t_1(y_1) + t_2(y_2) \quad (2.4)$$

もし3つの方程式のうち複数個が同時に成り立つとしたら、3地点ではなく、2地点以下のモデルになる。

ここでは第1番目の式(2.2)だけが成り立つとしよう。それを1次近似して

$$\begin{aligned} t'_1(y_1^*)y_1 - t'_2(y_2^*)y_2 - t'_3(y_3^*)y_3 \\ = (t_1^c - t_2^c - t_3^c) - (t_1^* - t_2^* - t_3^*) \end{aligned} \quad (2.5)$$

を得る。ここで t_i^c は(1.15)式で定義したルート i の限界所要時間合計である。

さらに、地点間2, 3の目的交通については、他の地点を経由して行く交通はないと仮定している。

$$y_1 + y_2 = z_1 + z_2 \quad (2.6)$$

$$y_1 + y_3 = z_1 + z_3 \quad (2.7)$$

が成立する。

以上、3つのルート需給均衡式(2.1), 1つの所要時間方程式(2.5), および2つの交通量間方程式(2.6), (2.7)を連立して解けば、均衡交通量が求められる。

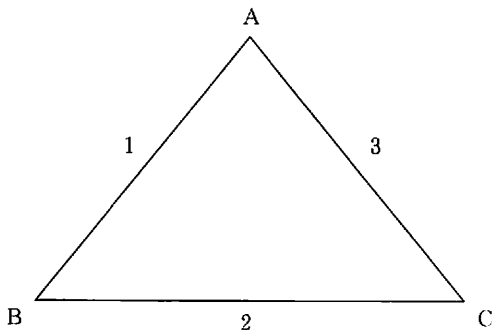


図 1

2.2 無経由通行状態

均衡交通量を表現するために、次のことを定義しよう。すなわち、各地点間の交通量のすべてが他地点を経由することなく、直接それぞれの地点を通行するような状態を『無経由通行状態』と呼ぶ。

無経由通行状態におけるルート i の混雑度を ϵ_i とすると、(1.13)式から

$$\epsilon_i = \frac{y_i^c}{y_i^* + y_i^c} \quad (2.8)$$

と表現される。

ルート i の混雑度を δ_i とし、その混雑度が無経由通行状態の混雑度からどれほど乖離しているかを示す割合を『混雑度の乖離割合』といい、 Δ_i とする。すなわち

$$\Delta_i = \frac{\delta_i - \epsilon_i}{\epsilon_i} \quad (2.9)$$

あるいは

$$\delta_i = (1 + \Delta_i)\epsilon_i \quad (2.10)$$

である。

また、無経由通行状態でのルート i の所要時間を $\hat{t}_i$ 、その超過所要時間を $\hat{t}_i^c$ とする。すなわち

$$\hat{t}_i = t_i^* + \hat{t}_i^c \quad (2.11)$$

$$\hat{t}_i^c = \epsilon_i t_i^c \quad (2.12)$$

である。

ここで

$$\begin{aligned} t_i &= t_i(y_i) \\ &= t'_i(y_i^*)y_i + t_i^* - t_i^c \end{aligned} \quad (2.13)$$

とおく。(2.10), (2.11), (2.12)式を用いて変形すると

$$\Delta_i = \frac{t_i - \hat{t}_i}{\hat{t}_i^c} \quad (2.14)$$

あるいは

$$t_i = \hat{t}_i + \Delta_i \hat{t}_i^e \quad (2.15)$$

となる。

ルート i の超過所要時間を t_i^e とおくと, (1.14) および (1.16) から $t_i = t_i^* + t_i^e$ であるから, 混雑度の乖離割合は

$$\Delta_i = \frac{t_i^e - \hat{t}_i^e}{\hat{t}_i^e} \quad (2.16)$$

あるいは

$$t_i^e = (1 + \Delta_i) \hat{t}_i^e \quad (2.17)$$

と表現される。

ルート i の混雑度を所要時間で表現しよう。(2.10) 式に (2.17) 式を代入し, (2.12) 式を用いて変形すると

$$\begin{aligned} \delta_i &= \frac{t_i^e}{\hat{t}_i^e} \epsilon_i \\ &= \frac{t_i - t_i^*}{t_i^e} \end{aligned} \quad (2.18)$$

となる。すなわち, ルート i の混雑度は, 超過所要時間を無渋滞交通量における限界所要時間合計で割ったものになる。

無経由通行状態におけるルート i の所要時間限界交通量を, (1.17) 式で定義したと同様に

$$d_i = \frac{y_i^e}{\hat{t}_i^e} \quad (2.19)$$

とする。

(1.7) 式から

$$z_i = (y_i^* + y_i^c + y_i^e) - \frac{y_i^c}{y_i^*} y_i$$

であるから

$$\begin{aligned} y_i - z_i &= \frac{y_i^* + y_i^c}{y_i^*} y_i - (y_i^* + y_i^c + y_i^e) \\ &= \frac{d_i \hat{t}_i^e}{y_i^*} y_i - d_i (t_i^c + \hat{t}_i^e) \\ &= d_i \{ t_i' (y_i^*) y_i^* - t_i^c - \hat{t}_i^e \} \\ &= d_i \{ (t_i' (y_i^*) y_i^* - t_i^c + t_i^*) - (t_i^* + \hat{t}_i^e) \} \\ &= d_i (t_i - \hat{t}_i) \end{aligned} \quad (2.20)$$

となる。従って

$$z_i = y_i + d_i (\hat{t}_i - t_i) \quad (2.21)$$

と表現される。これをさらに変形すると

$$z_i = y_i - \Delta_i y_i^e \quad (2.22)$$

である。

2.3 方程式の解

(2.20) 式を用いると, 2 つの交通量間方程式 (2.6), (2.7) は

$$d_1 (t_1 - \hat{t}_1) + d_2 (t_2 - \hat{t}_2) = 0 \quad (2.23)$$

$$d_1 (t_1 - \hat{t}_1) + d_3 (t_3 - \hat{t}_3) = 0 \quad (2.24)$$

と変形される。また, 所要時間方程式 (2.5) は, (2.13) 式を用いて

$$t_1 = t_2 + t_3 \quad (2.25)$$

となる。

以上 3 つの方程式 (2.23), (2.24), (2.25) を連立させて解くと

$$t_1 = \frac{d_1 (d_2 + d_3) \hat{t}_1 + d_2 d_3 (\hat{t}_2 + \hat{t}_3)}{d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3} \quad (2.26)$$

$$t_2 = \frac{d_2 (d_1 + d_3) \hat{t}_2 + d_1 d_3 (\hat{t}_1 - \hat{t}_3)}{d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3} \quad (2.27)$$

$$t_3 = \frac{d_3 (d_1 + d_2) \hat{t}_3 + d_1 d_2 (\hat{t}_1 - \hat{t}_2)}{d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3} \quad (2.28)$$

となる。

ルート 1 の所要時間 t_1 について考えてみよう。いま, 地点 AB 間を移動するには, 直接 AB 間を移動するルート 1 と, ACB のようにルート 2, 3 を経由して移動する 2 つの方法がある。無経由通行状態における所要時間は, それぞれ $\hat{t}_1$ および $(\hat{t}_2 + \hat{t}_3)$ である。地点 AB を目的とする移動として, この 2 つの方法がある状態だから

$$\hat{t}_1 > \hat{t}_2 + \hat{t}_3 \quad (2.29)$$

かつ

$$t_1 = t_2 + t_3 \quad (2.30)$$

でなければならない。従って、ルート 1 の通過交通量は、無経由通行状態における通過交通量より少なくなり、所要時間も無経由通行状態における所要時間よりも短くなる。よって

$$\hat{t}_1 > t_1 > \hat{t}_2 + \hat{t}_3 \quad (2.31)$$

が成り立つ。

t_1 が $\hat{t}_1$ と $(\hat{t}_2 + \hat{t}_3)$ のどの内分点になるかは、各ルートの所要時間限界交通量に依存している。すなわち、所要時間が 1 単位長くなるときに許容される交通量の大きいルートほど、影響力が大きい。

いま、 $\hat{t}_1$ のウェイトを θ_1 、 $(\hat{t}_2 + \hat{t}_3)$ のウェイトを θ_{23} とするならば

$$t_1 = \theta_1 \hat{t}_1 + \theta_{23} (\hat{t}_2 + \hat{t}_3) \quad (2.32)$$

ただし

$$\theta_1 = \frac{d_1(d_2 + d_3)}{d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3}$$

$$\theta_{23} = \frac{d_2d_3}{d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3}$$

かつ

$$\theta_1 + \theta_{23} = 1$$

である。

ルート 2 の所要時間 t_2 については、いま地点 AB を目的とする移動として 2 つの方法があるケースを考えているから、ルート 1 を考えたときと同様に、(2.29)、(2.30) 式が成立しなければならない。従って、ルート 2 の通過交通量は、無経由通行状態における通過交通量より多くなり、所要時間も無経由通行状態における所要時間よりも長くなる。よって

$$\hat{t}_1 - \hat{t}_3 > t_2 > \hat{t}_2 \quad (2.33)$$

が成り立つ。

$(\hat{t}_1 - \hat{t}_3)$ のウェイトを θ_{13} 、 $\hat{t}_2$ のウェイトを θ_2 とするならば、ルート 2 の所要時間は

$$t_2 = \theta_2 \hat{t}_2 + \theta_{13} (\hat{t}_1 - \hat{t}_3) \quad (2.34)$$

と表現される。ただし

$$\theta_2 = \frac{d_2(d_1 + d_3)}{d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3}$$

$$\theta_{13} = \frac{d_1d_3}{d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3}$$

かつ

$$\theta_2 + \theta_{13} = 1$$

である。

ルート 3 の所要時間 t_3 についても同様に

$$t_3 = \theta_3 \hat{t}_3 + \theta_{12} (\hat{t}_1 - \hat{t}_2)$$

ただし

$$\theta_3 = \frac{d_3(d_1 + d_2)}{d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3}$$

$$\theta_{12} = \frac{d_1d_2}{d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3}$$

かつ

$$\theta_3 + \theta_{12} = 1$$

である。

混雑度の乖離割合を用いて表現すると

$$\Delta_1 = \theta_{23} \frac{\hat{t}_2 + \hat{t}_3 - \hat{t}_1}{\hat{t}_1^e} \quad (2.35)$$

$$\Delta_2 = \theta_{13} \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2 - \hat{t}_3}{\hat{t}_2^e} \quad (2.36)$$

$$\Delta_3 = \theta_{12} \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_2 - \hat{t}_3}{\hat{t}_3^e} \quad (2.37)$$

となる。

Δ_1 の解釈は次のようになる。ルート 1 の通過交通量は、無経由通行状態における通過交通量より少なくなるから、 $\delta_1 < \epsilon_1$ である。その混雑度の乖離割合は

$$\hat{t}_2 + \hat{t}_3 - \hat{t}_1$$

に比例する。また、無経由通行状態におけるルート 1 の超過所要時間が大きいほど、混雑度の乖離割合は小さくなるので、それに反比例する。さらに、無経由通行状態における各ルートの所要時間限界交通量にも影響される。

逆に、ルート 2, 3 においては、無経由通行状態の交通量より多くなる。

III. 4 地点モデルの可能なケース

3.1 可能なルート

4 地点 A, B, C, D があり、図 2 のように、各地点を結ぶルートが全部で 6 つあるとする。地点間番号を (1)AB, (2)BC, (3)CD, (4)DA, (5)AC, (6)BD とする。

可能なルートを考えるために、それぞれ 3 地点からなる 4 つの三角形 (α) ~ (δ) に分けよう。すなわち

	地点間番号		
(α)	1,	2,	5
(β)	2,	3,	6
(γ)	3,	4,	5
(δ)	1,	4,	6

である。

例えば、(α) は地点 A, B, C を結ぶルート 1, 2, 5 からできている三角形である。このとき、もし AB 間を目的とする交通であれば、ルート 1 を直接に行く方法と、ルート 2, 5 を経由する方法とがある。均衡状態では両ルートの所要時間は等しくなるので

$$t_1 = t_2 + t_5 \quad (3.1)$$

でなければならない。

同様に、BC 間を目的とする交通であれば、ルート 2 を直接に行くか、ルート 1, 5 を経由するので、均衡状態では

$$t_2 = t_1 + t_5 \quad (3.2)$$

である。また、AC 間を目的とする交通であれば、ルート 5 を直接に行くか、ルート 1, 2 を経由するので

$$t_5 = t_1 + t_2 \quad (3.3)$$

でなければならない。

しかし、A, B, C が異なる地点であるとするならば、この 3 つの方程式 (3.1), (3.2), (3.3) のうち、どれか 1 つしか成り立たない。(β), (γ), (δ) の三角形についても同様である。従って、成立する組合せは 3 の 4 乗で、81 通りある。表 1 にすべてのケースを列挙した。

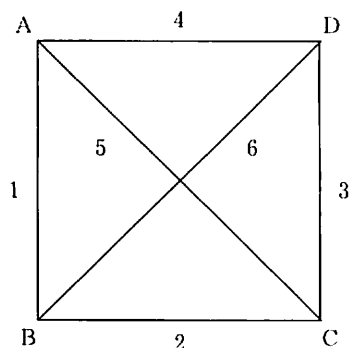


図 2

3.2 表の見方

表の見方は次のようである。例えば No.1 は、(α) 欄が 1, (β) 欄が 2, (γ) 欄が 3, (δ) 欄が 1 である。

(α) 欄が 1 というのは、3 地点 A, B, C 間の交通に関して、AB 間を目的とする交通の時のみルート 1 とルート 2, 5 の両方があることを示している。それ以外の BC 間を目的とする交通はルート 2 のみ、AC 間を目的とする交通はルート 5 のみである。従って

$$t_1 = t_2 + t_5 \quad (3.4)$$

が成り立つ。

同様に、(β) 欄が 2 ということは、3 地点 B, C, D 間の交通に関して、BC 間を目的とする交通のみが、ルート 2 を直接に行く場合と、ルー

表 1 : 4 地点モデルの可能なケース

ケース	三 角 形				モ デ ル		
	(α)	(β)	(γ)	(δ)	4 点	3 点	2 点
No. 1	1	2	3	1		○	
No. 2	1	2	3	4			○
No. 3	1	2	3	6			○
No. 4	1	2	4	1	A		
No. 5	1	2	4	4		○	
No. 6	1	2	3	6			○
No. 7	1	2	5	1		○	
No. 8	1	2	5	4			○
No. 9	1	2	5	6			○
No. 10	1	3	3	1	B		
No. 11	1	3	3	4		○	
No. 12	1	3	3	6		○	
No. 13	1	3	4	1		○	
No. 14	1	3	4	4	A		
No. 15	1	3	4	6			○
No. 16	1	3	5	1		○	
No. 17	1	3	5	4			○
No. 18	1	3	5	6			○
No. 19	1	6	3	1		○	
No. 20	1	6	3	4			○
No. 21	1	6	3	6	A		
No. 22	1	6	4	1		○	
No. 23	1	6	4	4		○	
No. 24	1	6	4	6		○	
No. 25	1	6	5	1	A		
No. 26	1	6	5	4			○
No. 27	1	6	5	6		○	

ケース	三 角 形				モ デ ル		
	(α)	(β)	(γ)	(δ)	4 点	3 点	2 点
No. 28	2	2	3	1	A		
No. 29	2	2	3	4		○	
No. 30	2	2	3	6		○	
No. 31	2	2	4	1		○	
No. 32	2	2	4	4	B		
No. 33	2	2	3	6		○	
No. 34	2	2	5	1		○	
No. 35	2	2	5	4		○	
No. 36	2	2	5	6	A		
No. 37	2	3	3	1		○	
No. 38	2	3	3	4	A		
No. 39	2	3	3	6		○	
No. 40	2	3	4	1			○
No. 41	2	3	4	4		○	
No. 42	2	3	4	6			○
No. 43	2	3	5	1			○
No. 44	2	3	5	4			○
No. 45	2	3	5	6			○
No. 46	2	6	3	1			○
No. 47	2	6	3	4			○
No. 48	2	6	3	6		○	
No. 49	2	6	4	1			○
No. 50	2	6	4	4		○	
No. 51	2	6	4	6	A		
No. 52	2	6	5	1			○
No. 53	2	6	5	4			○
No. 54	2	6	5	6		○	

ケース	三 角 形				モ デ ル		
	(α)	(β)	(γ)	(δ)	4 点	3 点	2 点
No. 55	5	2	3	1			○
No. 56	5	2	3	4			○
No. 57	5	2	3	6			○
No. 58	5	2	4	1			○
No. 59	5	2	4	4		○	
No. 60	5	2	3	6			○
No. 61	5	2	5	1		○	
No. 62	5	2	5	4	A		
No. 63	5	2	5	6		○	
No. 64	5	3	3	1		○	
No. 65	5	3	3	4		○	
No. 66	5	3	3	6	A		
No. 67	5	3	4	1			○
No. 68	5	3	4	4		○	
No. 69	5	3	4	6			○
No. 70	5	3	5	1	A		
No. 71	5	3	5	4		○	
No. 72	5	3	5	6		○	
No. 73	5	6	3	1			○
No. 74	5	6	3	4			○
No. 75	5	6	3	6		○	
No. 76	5	6	4	1			○
No. 77	5	6	4	4	A		
No. 78	5	6	4	6		○	
No. 79	5	6	5	1		○	
No. 80	5	6	5	4		○	
No. 81	5	6	5	6	B		

ト 3, 6 を経由する場合の両方があることを示している。よって

$$t_2 = t_3 + t_6 \quad (3.5)$$

また, (γ) 欄が 3 であるから

$$t_3 = t_4 + t_5 \quad (3.6)$$

(δ) 欄が 1 であるから

$$t_1 = t_4 + t_6 \quad (3.7)$$

である。

ケース No.1 は 4 つの方程式 (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) が同時に成り立つ場合である。これを解くと

$$\begin{aligned} t_5 &= 0, t_1 = t_2, \\ t_3 &= t_4, t_1 = t_3 + t_6 \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる。よって, A と C は同一地点であり, 図 3 のように 3 地点モデルになる。

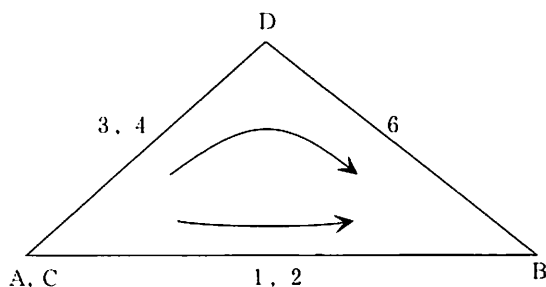


図 3

3.3 いくつかのケース

ケース No.2 を見よう。 (α) 欄が 1, (β) 欄が 2, (γ) 欄が 3, (δ) 欄が 4 であるから

$$t_1 = t_2 + t_5 \quad (3.9)$$

$$t_2 = t_3 + t_6 \quad (3.10)$$

$$t_3 = t_4 + t_5 \quad (3.11)$$

$$t_4 = t_1 + t_6 \quad (3.12)$$

が同時に成立しなければならない。従って

$$t_5 = t_6 = 0, \quad t_1 = t_2 = t_3 = t_4 \quad (3.13)$$

である。よって, A と C, および B と D が同一地点であり, 図 4 のように 2 地点モデルになる。

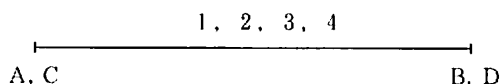


図 4

ケース No.3 は (α) 欄が 1, (β) 欄が 2, (γ) 欄が 3, (δ) 欄が 6 であるから

$$t_1 = t_2 + t_5 \quad (3.14)$$

$$t_2 = t_3 + t_6 \quad (3.15)$$

$$t_3 = t_4 + t_5 \quad (3.16)$$

$$t_6 = t_1 + t_4 \quad (3.17)$$

が同時に成立しなければならない。従って

$$t_3 = t_4 = t_5 = 0, \quad t_1 = t_2 = t_6 \quad (3.18)$$

である。よって, A, C, D が同一地点であり, 図 5 のように 2 地点モデルになる。

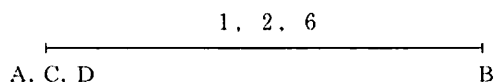


図 5

ケース No.4 は (α) 欄が 1, (β) 欄が 2, (γ) 欄が 4, (δ) 欄が 1 であるから

$$t_1 = t_2 + t_5 \quad (3.19)$$

$$t_2 = t_3 + t_6 \quad (3.20)$$

$$t_4 = t_3 + t_5 \quad (3.21)$$

$$t_1 = t_4 + t_6 \quad (3.22)$$

が同時に成立しなければならない。

4 つの方程式のうち 1 つは、残りの 3 つの方程式から導くことができる。例えば

$$\begin{aligned} t_4 &= t_1 - t_6 \\ &= (t_2 + t_5) - t_6 \\ &= (t_3 + t_6) + t_5 - t_6 \\ &= t_3 + t_5 \end{aligned}$$

であるので, (3.19), (3.20), (3.22) 式から (3.21) 式を導ける。

これは図 6 のように, 4 地点モデルである。この 4 地点モデルをパターン A と呼ぶことにしよう。

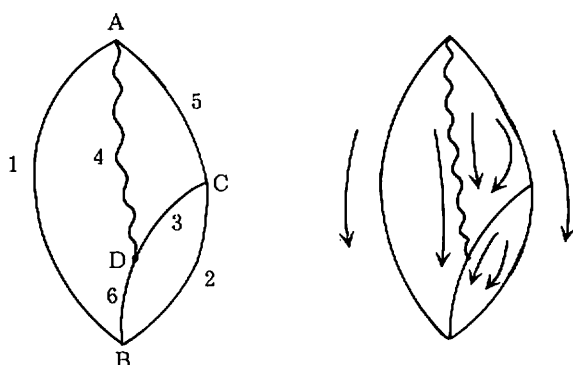


図 6 (パターン A)

ケース No.10 は (α) 欄が 1, (β) 欄が 3, (γ) 欄が 3, (δ) 欄が 1 であるから

$$t_1 = t_2 + t_5 \quad (3.23)$$

$$t_3 = t_2 + t_6 \quad (3.24)$$

$$t_3 = t_4 + t_5 \quad (3.25)$$

$$t_1 = t_4 + t_6 \quad (3.26)$$

が同時に成立しなければならない。従って

$$t_1 = t_3, \quad t_2 = t_4, \quad t_5 = t_6 \quad (3.27)$$

であり, 図 7 のように 4 地点モデルになる。この 4 地点モデルをパターン B と呼ぶことにしよう。

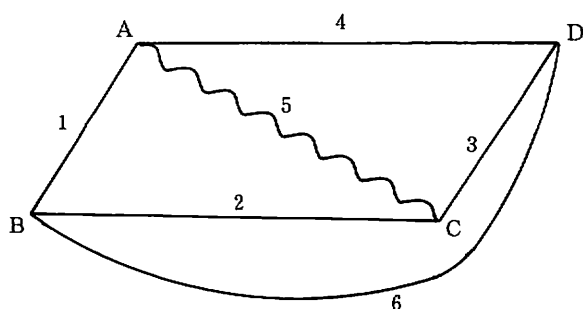


図 7 (パターン B)

表 1 に示してあるように, 81 ケースのうち, 4 地点モデルが 15 ケースであり, そのうちパターン A が 12 ケース, パターン B が 3 ケースである。また, 3 地点モデルは 36 ケース, 2 地点モデルは 30 ケースである。

IV. 4 地点モデル : パターン A

4.1 均衡方程式

4 地点モデルのうち, パターン A を考えてみよう。表 1 では 12 ケースあることが分かる。ここでは No.4 を解いてみるが, 残りのケースについても, 図 6 における地点間番号を入れ替えば, 同様に求められる。

No.4 のケースにおける均衡状態では, 各ルートの所要時間について, 上述の方程式 (3.19) ~ (3.22) が成立する。そのうち, 1 つは独立ではない。ここでは, (3.19), (3.20), (3.22) 式を取り上げよう。すなわち

$$t_1 = t_2 + t_5 \quad (4.1)$$

$$t_2 = t_3 + t_6 \quad (4.2)$$

$$t_1 = t_4 + t_6 \quad (4.3)$$

である。

地点 AB 間の通行を目的とする交通のルートは 3 通りあり, ルート 1 を直接に行く場合と, ルート 4, 6 を経由する場合, および, ルート 2, 5 を経由する場合がある。目的交通量 z_1 のうち, それぞれのルートを通行する割合を α_1^1 , α_1^{46} , α_1^{25} とする。ここで

$$\alpha_1^1 + \alpha_1^{46} + \alpha_1^{25} = 1 \quad (4.4)$$

である。

同様に, 地点間 BC については, ルート 2 の場合とルート 3, 6 を経由する場合の 2 通りがある。 z_2 のうち, 各ルートの割合を α_2^2 , α_2^{36} とする。ここで

$$\alpha_2^2 + \alpha_2^{36} = 1 \quad (4.5)$$

さらに地点間 AD については, ルート 4 の場合とルート 3, 5 を経由する場合がある。 z_4 のうち, 各ルートの割合を α_4^4 , α_4^{35} とする。ここで

$$\alpha_4^4 + \alpha_4^{35} = 1 \quad (4.6)$$

である。

地点間 CD, AC, BD の通行を目的とする交通は, 直接にそれぞれのルートを通行するものだけである。

従って, 通過交通量と目的交通量との関係は

$$y_1 = \alpha_1^1 z_1 \quad (4.7)$$

$$y_2 = \alpha_1^{25} z_1 + \alpha_2^2 z_2 \quad (4.8)$$

$$y_3 = \alpha_2^{36} z_2 + z_3 + \alpha_4^{35} z_4 \quad (4.9)$$

$$y_4 = \alpha_1^{46} z_1 + \alpha_4^4 z_4 \quad (4.10)$$

$$y_5 = \alpha_1^{25} z_1 + \alpha_4^{35} z_4 + z_5 \quad (4.11)$$

$$y_6 = \alpha_1^{46} z_1 + \alpha_2^{36} z_2 + z_6 \quad (4.12)$$

となる。

この 6 方程式 (4.7)~(4.12) から, 以下の 3 つの交通量間方程式が得られる。すなわち

$$y_1 + y_4 + y_5 = z_1 + z_4 + z_5 \quad (4.13)$$

$$y_1 + y_2 + y_6 = z_1 + z_2 + z_6 \quad (4.14)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \quad (4.15)$$

また, 各ルートの需給均衡式 (1.7) から

$$y_i^* z_i + y_i^c y_i = (y_i^* + y_i^c + y_i^e) y_i^* \\ i = 1, \dots, 6 \quad (4.16)$$

である。

以上, 3 つの所要時間方程式 (4.1), (4.2), (4.3), 3 つの交通量間方程式 (4.13), (4.14), (4.15), および, 6 つの需給均衡式 (4.16) を連立させて, 6 つの通過交通量と 6 つの目的交通量を解くことができる。

4.2 方程式の解:ルート1

(2.20) 式を用いて交通量間方程式を書き直すと

$$\begin{aligned} d_1 t_1 + d_4 t_4 + d_5 t_5 \\ = d_1 \hat{t}_1 + d_4 \hat{t}_4 + d_5 \hat{t}_5 \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} d_1 t_1 + d_2 t_2 + d_6 t_6 \\ = d_1 \hat{t}_1 + d_2 \hat{t}_2 + d_6 \hat{t}_6 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} d_1 t_1 + d_2 t_2 + d_3 t_3 + d_4 t_4 \\ = d_1 \hat{t}_1 + d_2 \hat{t}_2 + d_3 \hat{t}_3 + d_4 \hat{t}_4 \end{aligned} \quad (4.19)$$

である。所要時間方程式から

$$t_5 = t_1 - t_2$$

$$t_6 = t_2 - t_3$$

$$t_4 = t_1 - t_6 = t_1 + t_3 - t_2$$

となるので、交通量間方程式 (4.17), (4.18), (4.19) に代入すると, t_1, t_2, t_3 に関する 3 つの方程式が得られる。すなわち

$$\begin{aligned} (d_1 + d_4 + d_5)t_1 - (d_4 + d_5)t_2 + d_4 t_3 \\ = d_1 \hat{t}_1 + d_4 \hat{t}_4 + d_5 \hat{t}_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 t_1 + (d_2 + d_6)t_2 - d_6 t_3 \\ = d_1 \hat{t}_1 + d_2 \hat{t}_2 + d_6 \hat{t}_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d_1 + d_4)t_1 + (d_2 - d_4)t_2 + (d_3 + d_4)t_3 \\ = d_1 \hat{t}_1 + d_2 \hat{t}_2 + d_3 \hat{t}_3 + d_4 \hat{t}_4 \end{aligned}$$

これから t_3 を消去すると

$$\begin{aligned} \{d_1(d_4 + d_6) + d_6(d_4 + d_5)\}t_1 \\ + (d_2 d_4 - d_5 d_6)t_2 \\ = d_1(d_4 + d_6)\hat{t}_1 + d_2 d_4 \hat{t}_2 \\ + d_4 d_6 \hat{t}_4 + d_5 d_6 \hat{t}_5 + d_4 d_6 \hat{t}_6 \\ \{d_1(d_3 + d_4 + d_6) + d_4 d_6\}t_1 \\ + \{d_6(d_2 + d_3) + d_2(d_3 + d_4)\}t_2 \\ = d_1(d_3 + d_4 + d_6)\hat{t}_1 \\ + d_2(d_3 + d_4 + d_6)\hat{t}_2 \\ + d_3 d_6 \hat{t}_3 + d_4 d_6 \hat{t}_4 \\ + d_6(d_3 + d_4)\hat{t}_6 \end{aligned}$$

となる。

さらに t_2 を消去すると

$$\begin{aligned} \{d_1(d_2 d_3 + d_2 d_4 + d_2 d_6 + d_3 d_4 \\ + d_3 d_5 + d_3 d_6 + d_4 d_5 + d_5 d_6) \\ + d_2 d_5(d_3 + d_4 + d_6) + d_4 d_6(d_2 \\ + d_3 + d_5) + d_2 d_3 d_4 + d_3 d_5 d_6\}t_1 \\ = d_1(d_2 d_3 + d_2 d_4 + d_2 d_6 + d_3 d_4 \\ + d_3 d_5 + d_3 d_6 + d_4 d_5 + d_5 d_6)\hat{t}_1 \\ + d_2 d_5(d_3 + d_4 + d_6)(\hat{t}_2 + \hat{t}_5) \\ + d_4 d_6(d_2 + d_3 + d_5)(\hat{t}_4 + \hat{t}_6) \\ + d_2 d_3 d_4(\hat{t}_2 + \hat{t}_4 - \hat{t}_3) \\ + d_3 d_5 d_6(\hat{t}_3 + \hat{t}_5 + \hat{t}_6) \end{aligned}$$

である。

分母を

$$\begin{aligned} D = d_1(d_2 d_3 + d_2 d_4 + d_2 d_6 + d_3 d_4 \\ + d_3 d_5 + d_3 d_6 + d_4 d_5 + d_5 d_6) \\ + d_2 d_5(d_3 + d_4 + d_6) \\ + d_4 d_6(d_2 + d_3 + d_5) \\ + d_2 d_3 d_4 + d_3 d_5 d_6 \end{aligned} \quad (4.20)$$

とする。

$$\begin{aligned} t_1 = \theta_1 \hat{t}_1 + \theta_{25}(\hat{t}_2 + \hat{t}_5) + \theta_{46}(\hat{t}_4 + \hat{t}_6) \\ + \theta_{234}(\hat{t}_2 + \hat{t}_4 - \hat{t}_3) \\ + \theta_{356}(\hat{t}_3 + \hat{t}_5 + \hat{t}_6) \end{aligned} \quad (4.21)$$

ただし

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{D} d_1(d_2 d_3 + d_2 d_4 + d_2 d_6 + d_3 d_4 \\ &\quad + d_3 d_5 + d_3 d_6 + d_4 d_5 + d_5 d_6) \\ \theta_{25} &= \frac{d_2 d_5(d_3 + d_4 + d_6)}{D} \\ \theta_{46} &= \frac{d_4 d_6(d_2 + d_3 + d_5)}{D} \\ \theta_{234} &= \frac{d_2 d_3 d_4}{D} \\ \theta_{356} &= \frac{d_3 d_5 d_6}{D} \end{aligned}$$

かつ

$$\theta_1 + \theta_{25} + \theta_{46} + \theta_{234} + \theta_{356} = 1$$

である。

混雑度の乖離割合は

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \frac{1}{\hat{t}_1} \{ & \theta_{25}(\hat{t}_2 + \hat{t}_5 - \hat{t}_1) \\ & + \theta_{46}(\hat{t}_4 + \hat{t}_6 - \hat{t}_1) \\ & + \theta_{234}(\hat{t}_2 + \hat{t}_4 - \hat{t}_3 - \hat{t}_1) \\ & + \theta_{356}(\hat{t}_3 + \hat{t}_5 + \hat{t}_6 - \hat{t}_1) \} \quad (4.22) \end{aligned}$$

となる。

ルート1の交通量は以下のように表現される。(4.21)式で所要時間が求められる。それは、各ルートの無経由通行状態における所要時間、混雑度、所要時間限界交通量で表されている。それらは(2.11), (2.8), (2.19)式で求められる。

ルート1の通過交通量 y_1 は(1.9)式を用いて、混雑度で表現される。さらに混雑度は(2.18)式から、所要時間と限界所要時間合計で求めることができる。また、目的交通量 z_1 は(2.21)式を用いて、通過交通量で表現できる。

4.3 解の解釈

(4.21)式の解釈は次のようである。(3.19)～(3.22)式から

$$t_1 = t_2 + t_5$$

$$t_1 = t_4 + t_6$$

$$t_1 = t_2 + t_4 - t_3$$

$$t_1 = t_3 + t_5 + t_6$$

が成立しなければならない。ということは、無経由通行状態では

$$\hat{t}_1 > \hat{t}_2 + \hat{t}_5$$

$$\hat{t}_1 > \hat{t}_4 + \hat{t}_6$$

$$\hat{t}_1 > \hat{t}_2 + \hat{t}_4 - \hat{t}_3$$

$$\hat{t}_1 > \hat{t}_3 + \hat{t}_5 + \hat{t}_6$$

が成立することを意味する。従って、ルート1の所要時間は5つの値

$$\hat{t}_1 \quad (\hat{t}_2 + \hat{t}_5) \quad (\hat{t}_4 + \hat{t}_6)$$

$$(\hat{t}_2 + \hat{t}_4 - \hat{t}_3), \quad (\hat{t}_3 + \hat{t}_5 + \hat{t}_6)$$

の内分点になる。

そのさい、各値に対するウェイトは、それぞれの所要時間限界交通量に依存している。具体的に述べるならば、いま3ルートから構成される閉じない回路を考える。というのは、例えば、もしルート1を含む閉じた回路を構成するルートを考えるならば、地点間1の移動に関して、ルート1ともう一つのルートとを考えていることとなり、ウェイトを考えるとき、ルート1に関したウェイトか、もう一つのルートに関したウェイトか判断がつかなくなってしまう。それゆえ、閉じない回路を考えるのである。

3ルートから構成される閉じない回路は全部で16通りある。すなわち、3つのルート番号を連ねて記すと

$$\begin{array}{llll} 123, & 124, & 126, & 134, \\ 135, & 136, & 145, & 156, \\ 234, & 235, & 245, & 246, \\ 256, & 346, & 356, & 456 \end{array}$$

である。

このうち、例えば $\hat{t}_1$ に対するウェイトは、ルート1を含み、閉じない回路を構成する3ルートを取り出す。すなわち

$$\begin{array}{llll} 123, & 124, & 126, & 134, \\ 135, & 136, & 145, & 156 \end{array}$$

の8通りある。

3ルートの所要時間限界交通量の積を、ルート1に係する8つの回路で計算し、その和を求める。全体についても同様に、16回路について所要時間限界交通量の積を計算し、その和を求める。全体を分母にし、ルート1に関するものを分子にした値が、 $\hat{t}_1$ に対するウェイトになる。

同様に, $(\hat{t}_2 + \hat{t}_5)$ についてのウェイトは, ルート 2, 5 を含み, 閉じない回路を構成する 3 ルートを取り出す。すなわち

$$235, \quad 245, \quad 256$$

の 3 通りある。この回路の所要時間限界交通量の積を計算し, その和を分子にし, 全体の和を分母にしたものがウェイトになる。

$(\hat{t}_4 + \hat{t}_6)$ の場合には, ルート 4, 6 を含み, 閉じない回路を構成する 3 ルートは

$$246, \quad 346, \quad 456$$

である。

さらに $(\hat{t}_2 + \hat{t}_4 - \hat{t}_3)$ の場合には, ルート 2, 3, 4 を含み, 閉じない回路を構成する 3 ルートは

$$234$$

しかない。同様に, $(\hat{t}_3 + \hat{t}_5 + \hat{t}_6)$ の場合には

$$356$$

である。

4.4 方程式の解：ルート 2～6

ルート 2 の所要時間は

$$\begin{aligned} t_2 = & \theta_2 \hat{t}_2 + \theta_{15} (\hat{t}_1 - \hat{t}_5) + \theta_{36} (\hat{t}_3 + \hat{t}_6) \\ & + \theta_{134} (\hat{t}_1 + \hat{t}_3 - \hat{t}_4) \\ & + \theta_{456} (\hat{t}_4 + \hat{t}_6 - \hat{t}_5) \end{aligned} \quad (4.23)$$

ただし

$$\begin{aligned} \theta_2 = & \frac{1}{D} d_2 (d_1 d_3 + d_1 d_4 + d_1 d_6 + d_3 d_4 \\ & + d_3 d_5 + d_4 d_5 + d_4 d_6 + d_5 d_6) \\ \theta_{15} = & \frac{d_1 d_5 (d_3 + d_4 + d_6)}{D} \\ \theta_{36} = & \frac{d_3 d_6 (d_1 + d_4 + d_5)}{D} \\ \theta_{134} = & \frac{d_1 d_3 d_4}{D} \\ \theta_{456} = & \frac{d_4 d_5 d_6}{D} \end{aligned}$$

かつ

$$\theta_2 + \theta_{15} + \theta_{36} + \theta_{134} + \theta_{456} = 1$$

である。

これはルート 1 の場合と同様に

$$t_2 = t_1 - t_5$$

$$t_2 = t_3 + t_6$$

$$t_2 = t_1 + t_3 - t_4$$

$$t_2 = t_4 + t_6 - t_5$$

が成立することから言える。

ルート 3 の所要時間は

$$\begin{aligned} t_3 = & \theta_3 \hat{t}_3 + \theta_{26} (\hat{t}_2 - \hat{t}_6) + \theta_{45} (\hat{t}_4 - \hat{t}_5) \\ & + \theta_{124} (\hat{t}_2 + \hat{t}_4 - \hat{t}_1) \\ & + \theta_{156} (\hat{t}_1 - \hat{t}_5 - \hat{t}_6) \end{aligned} \quad (4.24)$$

ただし

$$\begin{aligned} \theta_3 = & \frac{1}{D} d_3 (d_1 d_2 + d_1 d_4 + d_1 d_5 + d_1 d_6 \\ & + d_2 d_4 + d_2 d_5 + d_4 d_6 + d_5 d_6) \\ \theta_{26} = & \frac{d_2 d_6 (d_1 + d_4 + d_5)}{D} \\ \theta_{45} = & \frac{d_4 d_5 (d_1 + d_2 + d_6)}{D} \\ \theta_{124} = & \frac{d_1 d_2 d_4}{D} \\ \theta_{156} = & \frac{d_1 d_5 d_6}{D} \\ \theta_3 + \theta_{26} + \theta_{45} + \theta_{124} + \theta_{156} = & 1 \end{aligned}$$

である。これは

$$t_3 = t_2 - t_6$$

$$t_3 = t_4 - t_5$$

$$t_3 = t_2 + t_4 - t_1$$

$$t_3 = t_1 - t_5 - t_6$$

が成立することから言える。

ルート 4 の所要時間は

$$\begin{aligned} t_4 = & \theta_4 \hat{t}_4 + \theta_{16} (\hat{t}_1 - \hat{t}_6) + \theta_{35} (\hat{t}_3 + \hat{t}_5) \\ & + \theta_{123} (\hat{t}_1 + \hat{t}_3 - \hat{t}_2) \\ & + \theta_{256} (\hat{t}_2 + \hat{t}_5 - \hat{t}_6) \end{aligned} \quad (4.25)$$

ただし

$$\begin{aligned}\theta_4 &= \frac{1}{D} d_4 (d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_1 d_5 + d_2 d_3 \\ &\quad + d_2 d_5 + d_2 d_6 + d_3 d_6 + d_5 d_6) \\ \theta_{16} &= \frac{d_1 d_6 (d_2 + d_3 + d_5)}{D} \\ \theta_{35} &= \frac{d_3 d_5 (d_1 + d_2 + d_6)}{D} \\ \theta_{123} &= \frac{d_1 d_2 d_3}{D} \\ \theta_{256} &= \frac{d_2 d_5 d_6}{D} \\ \theta_4 + \theta_{16} + \theta_{35} + \theta_{123} + \theta_{256} &= 1\end{aligned}$$

である。これは

$$\begin{aligned}t_4 &= t_1 - t_6 \\ t_4 &= t_3 + t_5 \\ t_4 &= t_1 + t_3 - t_2 \\ t_4 &= t_2 + t_5 - t_6\end{aligned}$$

が成立することから言える。

ルート 5 の所要時間は

$$\begin{aligned}t_5 &= \theta_5 \hat{t}_5 + \theta_{12} (\hat{t}_2 - \hat{t}_1) + \theta_{34} (\hat{t}_4 - \hat{t}_3) \\ &\quad + \theta_{136} (\hat{t}_1 - \hat{t}_3 - \hat{t}_6) \\ &\quad + \theta_{246} (\hat{t}_4 + \hat{t}_6 - \hat{t}_2)\end{aligned}\quad (4.26)$$

ただし

$$\begin{aligned}\theta_5 &= \frac{1}{D} d_5 (d_1 d_3 + d_1 d_4 + d_1 d_6 + d_2 d_3 \\ &\quad + d_2 d_4 + d_2 d_6 + d_3 d_6 + d_4 d_6) \\ \theta_{12} &= \frac{d_1 d_2 (d_3 + d_4 + d_5)}{D} \\ \theta_{34} &= \frac{d_3 d_4 (d_1 + d_2 + d_6)}{D} \\ \theta_{136} &= \frac{d_1 d_3 d_6}{D} \\ \theta_{246} &= \frac{d_2 d_4 d_6}{D} \\ \theta_3 + \theta_{26} + \theta_{45} + \theta_{124} + \theta_{156} &= 1\end{aligned}$$

である。これは

$$t_5 = t_2 - t_1$$

$$t_5 = t_4 - t_3$$

$$t_5 = t_1 - t_3 - t_6$$

$$t_5 = t_4 + t_6 - t_2$$

が成立することから言える。

ルート 6 の所要時間は

$$\begin{aligned}t_6 &= \theta_6 \hat{t}_6 + \theta_{14} (\hat{t}_1 - \hat{t}_4) + \theta_{23} (\hat{t}_2 - \hat{t}_3) \\ &\quad + \theta_{135} (\hat{t}_1 - \hat{t}_3 - \hat{t}_5) \\ &\quad + \theta_{245} (\hat{t}_2 + \hat{t}_5 - \hat{t}_4)\end{aligned}\quad (4.27)$$

ただし

$$\begin{aligned}\theta_6 &= \frac{1}{D} d_6 (d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_1 d_5 + d_2 d_4 \\ &\quad + d_2 d_5 + d_3 d_4 + d_3 d_5 + d_4 d_5) \\ \theta_{14} &= \frac{d_1 d_4 (d_2 + d_3 + d_5)}{D} \\ \theta_{23} &= \frac{d_2 d_3 (d_1 + d_4 + d_5)}{D} \\ \theta_{135} &= \frac{d_1 d_3 d_5}{D} \\ \theta_{245} &= \frac{d_2 d_4 d_5}{D} \\ \theta_6 + \theta_{14} + \theta_{23} + \theta_{135} + \theta_{245} &= 1\end{aligned}$$

である。これは

$$\begin{aligned}t_6 &= t_1 - t_4 \\ t_6 &= t_2 - t_3 \\ t_6 &= t_1 - t_3 - t_5 \\ t_6 &= t_2 + t_5 - t_4\end{aligned}$$

が成立することから言える。

V. 4 地点モデル：パターン B

5.1 均衡方程式

4 地点モデルのうち、パターン B を考えてみよう。表 1 では 3 ケースある。ここでは No.10 を解いてみるが、残りのケースについても、同様に求められる。

No.10 のケースにおける均衡状態では、各ルートの所要時間について、4 つの方程式 (3.23) ~

(3.26) が成立する。それを解くと, (3.27) 式が成立する。すなわち

$$t_1 = t_3, \quad t_2 = t_4, \quad t_5 = t_6 \quad (5.1)$$

である。方程式が 4 つ必要なので, もう 1 つを (3.23) 式

$$t_1 = t_2 + t_5 \quad (5.2)$$

としよう。

地点 AB 間の通行を目的とする交通のルートは 3 通りあり, ルート 1 を直接に行く場合と, ルート 4, 6 を経由する場合, および, ルート 2, 5 を経由する場合がある。目的交通量 z_1 のうち, それぞれのルートを通行する割合を α_1^1 , α_1^{46} , α_1^{25} とする。ここで

$$\alpha_1^1 + \alpha_1^{46} + \alpha_1^{25} = 1 \quad (5.3)$$

である。

同様に, 地点間 CD についてもルートが 3 通りあり, ルート 3 を直接に行く場合と, ルート 2, 6 を経由する場合, および, ルート 4, 5 を経由する場合がある。目的交通量 z_3 のうち, それぞれのルートを通行する割合を α_3^3 , α_3^{26} , α_3^{45} とする。ここで

$$\alpha_3^3 + \alpha_3^{26} + \alpha_3^{45} = 1 \quad (5.4)$$

である。

その他の 4 地点間 BC, AD, AC, BD の通行を目的とする交通は, 直接にそれぞれのルートを通行するものだけである。

従って, 通過交通量と目的交通量との関係は

$$y_1 = \alpha_1^1 z_1 \quad (5.5)$$

$$y_2 = \alpha_1^{25} z_1 + \alpha_3^{26} z_3 + z_2 \quad (5.6)$$

$$y_3 = \alpha_3^3 z_3 \quad (5.7)$$

$$y_4 = \alpha_1^{46} z_1 + \alpha_3^{45} z_3 + z_4 \quad (5.8)$$

$$y_5 = \alpha_1^{25} z_1 + \alpha_3^{45} z_3 + z_5 \quad (5.9)$$

$$y_6 = \alpha_1^{46} z_1 + \alpha_3^{26} z_3 + z_6 \quad (5.10)$$

となる。

この 6 方程式 (5.5)~(5.10) から, 以下の 2 つの交通量間方程式が得られる。すなわち

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 + y_5 + y_6 \\ = z_1 + z_3 + z_5 + z_6 \end{aligned} \quad (5.12)$$

また, 各ルートの需給均衡式 (1.7) から

$$\begin{aligned} y_i^* z_i + y_i^c y_i \\ = (y_i^* + y_i^c + y_i^e) y_i^*, \quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (5.13)$$

である。

以上, 4 つの所要時間方程式 (5.1), (5.2), 2 つの交通量間方程式 (5.11), (5.12), および, 6 つの需給均衡式 (5.13) を連立させて, 6 つの通過交通量と 6 つの目的交通量を解くことができる。

5.2 方程式の解

(2.20) 式を用いて交通量間方程式を書き直すと

$$\begin{aligned} d_1 t_1 + d_2 t_2 + d_3 t_3 + d_4 t_4 \\ = d_1 \hat{t}_1 + d_2 \hat{t}_2 + d_3 \hat{t}_3 + d_4 \hat{t}_4 \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} d_1 t_1 + d_3 t_3 + d_5 t_5 + d_6 t_6 \\ = d_1 \hat{t}_1 + d_3 \hat{t}_3 + d_5 \hat{t}_5 + d_6 \hat{t}_6 \end{aligned} \quad (5.15)$$

である。所要時間方程式 (5.1) 式を代入すると, 交通量間方程式は

$$\begin{aligned} (d_1 + d_3) t_1 + (d_2 + d_4) t_2 \\ = d_1 \hat{t}_1 + d_2 \hat{t}_2 + d_3 \hat{t}_3 + d_4 \hat{t}_4 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} (d_1 + d_3) t_1 + (d_5 + d_6) t_5 \\ = d_1 \hat{t}_1 + d_3 \hat{t}_3 + d_5 \hat{t}_5 + d_6 \hat{t}_6 \end{aligned} \quad (5.17)$$

(5.2) 式を用いて t_5 を消去すると, (5.17) 式は

$$\begin{aligned} (d_1 + d_3 + d_5 + d_6) t_1 - (d_5 + d_6) t_2 \\ = d_1 \hat{t}_1 + d_3 \hat{t}_3 + d_5 \hat{t}_5 + d_6 \hat{t}_6 \end{aligned} \quad (5.18)$$

となる。

さらに (5.16), (5.18) 式から t_2 を消去すると

$$\begin{aligned} & \{(d_1 + d_3)(d_2 + d_4) + (d_1 + d_3)(d_5 + d_6) \\ & \quad + (d_2 + d_4)(d_5 + d_6)\} \\ & = (d_2 + d_4 + d_5 + d_6)(d_1 \hat{t}_1 + d_3 \hat{t}_3) \\ & \quad + (d_5 + d_6)(d_2 \hat{t}_2 + d_4 \hat{t}_4) \\ & \quad + (d_2 + d_4)(d_5 \hat{t}_5 + d_6 \hat{t}_6) \end{aligned}$$

である。

分母を

$$\begin{aligned} D &= (d_1 + d_3)(d_2 + d_4) \\ & \quad + (d_1 + d_3)(d_5 + d_6) \\ & \quad + (d_2 + d_4)(d_5 + d_6) \end{aligned} \quad (5.19)$$

とする。ルート 1 およびルート 3 の所要時間は

$$\begin{aligned} t_1 &= t_3 \\ &= \theta_1 \hat{t}_1 + \theta_3 \hat{t}_3 + \theta_{25}(\hat{t}_2 + \hat{t}_5) \\ & \quad + \theta_{46}(\hat{t}_4 + \hat{t}_6) + \theta_{26}(\hat{t}_2 + \hat{t}_6) \\ & \quad + \theta_{45}(\hat{t}_4 + \hat{t}_5) \end{aligned} \quad (5.20)$$

ただし

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{d_1(d_2 + d_4 + d_5 + d_6)}{D} \\ \theta_3 &= \frac{d_3(d_2 + d_4 + d_5 + d_6)}{D} \\ \theta_{25} &= \frac{d_2 d_5}{D} \\ \theta_{46} &= \frac{d_4 d_6}{D} \\ \theta_{26} &= \frac{d_2 d_6}{D} \\ \theta_{45} &= \frac{d_4 d_5}{D} \end{aligned}$$

かつ

$$\theta_1 + \theta_3 + \theta_{25} + \theta_{46} + \theta_{26} + \theta_{45} = 1$$

となる。

同様に、ルート 2 およびルート 4 の所要時間は

$$t_2 = t_4$$

$$\begin{aligned} &= \theta_2 \hat{t}_2 + \theta_4 \hat{t}_4 + \theta_{15}(\hat{t}_1 - \hat{t}_5) \\ & \quad + \theta_{36}(\hat{t}_3 - \hat{t}_6) + \theta_{16}(\hat{t}_1 - \hat{t}_6) \\ & \quad + \theta_{35}(\hat{t}_3 - \hat{t}_5) \end{aligned} \quad (5.21)$$

ただし

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{d_2(d_1 + d_3 + d_5 + d_6)}{D} \\ \theta_4 &= \frac{d_4(d_1 + d_3 + d_5 + d_6)}{D} \\ \theta_{15} &= \frac{d_1 d_5}{D} \\ \theta_{36} &= \frac{d_3 d_6}{D} \\ \theta_{16} &= \frac{d_1 d_6}{D} \\ \theta_{35} &= \frac{d_3 d_5}{D} \end{aligned}$$

かつ

$$\theta_2 + \theta_4 + \theta_{15} + \theta_{36} + \theta_{16} + \theta_{35} = 1$$

である。

また、ルート 5 およびルート 6 の所要時間は

$$\begin{aligned} t_5 &= t_6 \\ &= \theta_5 \hat{t}_5 + \theta_6 \hat{t}_6 + \theta_{12}(\hat{t}_1 - \hat{t}_2) \\ & \quad + \theta_{34}(\hat{t}_3 - \hat{t}_4) + \theta_{14}(\hat{t}_1 - \hat{t}_4) \\ & \quad + \theta_{23}(\hat{t}_3 - \hat{t}_2) \end{aligned} \quad (5.22)$$

ただし

$$\begin{aligned} \theta_5 &= \frac{d_5(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)}{D} \\ \theta_6 &= \frac{d_6(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)}{D} \\ \theta_{12} &= \frac{d_1 d_2}{D} \\ \theta_{34} &= \frac{d_3 d_4}{D} \\ \theta_{14} &= \frac{d_1 d_4}{D} \\ \theta_{23} &= \frac{d_2 d_3}{D} \end{aligned}$$

かつ

$$\theta_5 + \theta_6 + \theta_{12} + \theta_{34} + \theta_{14} + \theta_{23} = 1$$

である。

5.3 解の解釈

(5.20) 式の解釈は次のようである。(3.23)～(3.26) 式から

$$t_1 = t_2 + t_5$$

$$t_1 = t_4 + t_6$$

$$t_3 = t_2 + t_6$$

$$t_3 = t_4 + t_5$$

が成立しなければならない。ということは、無経路通行状態では

$$\hat{t}_1 > \hat{t}_2 + \hat{t}_5$$

$$\hat{t}_1 > \hat{t}_4 + \hat{t}_6$$

$$\hat{t}_3 > \hat{t}_2 + \hat{t}_6$$

$$\hat{t}_3 > \hat{t}_4 + \hat{t}_5$$

が成立することを意味する。従って、ルート 1 およびルート 3 の所要時間は 6 つの値

$$\hat{t}_1, \quad \hat{t}_3, \quad (\hat{t}_2 + \hat{t}_5), \\ (\hat{t}_4 + \hat{t}_6), (\hat{t}_2 + \hat{t}_6), (\hat{t}_4 + \hat{t}_5)$$

の内分点になる。

そのさい、各値に対するウェイトは、それぞれの所要時間限界交通量に依存している。すなわち、いま 2 ルートから構成される閉じない回路を考えよう。パターン A の場合には 3 ルートから構成される閉じない回路を考えたが、ここでは 2 ルートから構成される閉じない回路を考えている。というのは、ルート 1 とルート 3 を同時に含むような回路を考慮してはいけなからである。同様に、ルート 2 とルート 4、ルート 5 とルート 6 もそれぞれ同時に含んではいけないからである。

2 ルートから構成される閉じない回路は全部で 12 通りある。すなわち、2 つのルート番号を

連ねて記すと

12, 14, 15, 16

32, 34, 35, 36

25, 26, 45, 46

である。

このうち、例えば $\hat{t}_1$ に対するウェイトは、ルート 1 を含み、閉じない回路を構成する 2 ルートを取り出す。すなわち

12, 14, 15, 16

の 4 通りある。

2 ルートの所要時間限界交通量の積を、ルート 1 に関係する 4 つの回路で計算し、その和を求める。全体についても同様に、12 回路について所要時間限界交通量の積を計算し、その和を求める。全体を分母にし、ルート 1 に関するものを分子にした値が、 $\hat{t}_1$ に対するウェイトになる。

他のウェイトに関しても同様である。

記号の定義

z_i : 地点間 i の目的交通量。

y_i : ルート i の通過交通量。

t_i : ルート i の所要時間。

p_i : ルート i の価格。

δ_i : ルート i の混雑度。

y_i^* : ルート i の無渋滞交通量。

t_i^* : ルート i の無渋滞交通量における所要時間。

$t_i^c = t_i - t_i^*$: ルート i の超過所要時間。

p_i^* : ルート i の無渋滞交通量における価格。ここで $p_i^* = D_i(y_i^*)$ 。

$s_i^* = -\frac{1}{D_i'(y_i^*)}$: ルート i の無渋滞交通量において料金が 1 単位課されたときに減少する交通量。

$t_i^c = y_i^* t_i'(y_i^*)$: ルート i の限界所要時間合計。無渋滞交通量において、1 台追加することにより増加する所要時間の全車合計分。

$y_i^c = s_i^* w t_i^c$: ルート i の限界機会交通量。無渋滞交通量において、限界機会費用だけ料金が課されるとした場合に減少する交通需要量。

$y_i^e = s_i^* p_i^*$: ルート i の最大超過交通量。

$\hat{t}_i$: 無経由通行状態におけるルート i の所要時間。

$\hat{t}_i^c = \hat{t}_i - t_i^*$: 無経由通行状態におけるルート i の超過所要時間。

ϵ_i : 無経由通行状態におけるルート i の混雑度。

$d_i = \frac{y_i^e}{t_i^c}$: ルート i の所要時間限界交通量。無経由通行状態で、ルート i が無渋滞交通量にあるとき、所要時間が 1 単位分増加し、かつ、価格が 1 単位時間相当分だけ減少するときに許容される交通量の増加を意味する。

Δ_i : ルート i における混雑度の乖離割合。

参考文献

- (1) 鈴木武「二地点間の交通量モデル」経営志林 第 31 巻第 1 号, 1994 年 4 月
- (2) 鈴木武「3 地点間の単一ルート交通量モデル」経営志林 第 31 巻第 2 号, 1994 年 7 月