３地点間複数ルートの交通量モデル

鈴木, 武

(出版者 / Publisher)
法政大学経営学会
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
経営志林 / The Hosei journal of business
(巻 / Volume)
31
(号 / Number)
3
(開始ページ / Start Page)
83
(終了ページ / End Page)
92
(発行年 / Year)
1994-10-30
(URL)
https://doi.org/10.15002/00003408

3 地点間複数ルートの交通量モデル

鈴 木 武

［Ｉ］はじめに

1．本稿の構成

本稿では，3地点間の交通量を考察する。そのさい，ここでは特に各地点間を結ぶルートが複数ある場合を取り上げる。

始めにモデルの前提を述べた後，〔Ⅱ〕で価格ゼロの場合，〔Ⅲ〕で社会厚生を最大化する場合を述べる。それぞれの場合について，1．各地点間における交通量をその地点間の複数ルートの間でどう配分するか，2．各地点間の複数ルートにおける需給均衡式を単一ルートにおける需給均衡式に還元して表現できること，3．各地点間の複数ルートにおける限界費用を単一ルートにおける限界費用に還元して表現できること，4．均衡状態における交通量の表現，を示す。

また，最後に記号の一覧を載せた。

2．モデルの前提

ある3地点A，B，Cがあり，それぞれを結ぶルートが複数あるとする。ここで，『地点ij間を通行』するという場合の用語の区別をしよう。どのルートを通過するかはともかくとして，起点および終点が地点ijであるような交通の場合，『地点ij間の通行を目的とする交通』という。それに対して，地点ij間を他のルートを経由することなく直接通過する交通を，『地点ij間を通過する交通』と呼ぶことにする。

ある単位期間において，地点ij間の通行を目的とする交通量を z_{ij} とする。この大きさは，地点ij間を通行することにより得られる便益の高い順から利用者を並べ，ある便益 p_{ij} を指定したとき，その大きさ以上の便益が得られる交通量である。この逆関数をとり，通常の需要関数の形で表現すると，

$$p_{ij} = D_{ij}(z_{ij})$$

地点ij間を通行するには，時間がかかる。得られる便益の大きさは，当然，その所要時間をカバーしたものである。それを明示的に表現するために，地点ij間を通行するさいに最低限許容できる所要時間を $\bar{t}_{ij}$ とする。また，単位時間当たりの機会費用はwであるとする。それらは各利用者に共通であると仮定する。

最低限許容できる所要時間も考慮に入れた場合の便益を P_{ij} とする。従って，便益関数は

$$P_{ij} = w\bar{t}_{ij} + D_{ij}(z_{ij})$$

と表現される。

次に，地点ijを通過する交通量を考えよう。これは地点ij間の通行を目的とする交通量と一致するとは限らない。従って，この交通量を y_{ij} とする。

地点ij間を直接通行するルートは複数あるとし，その数をnとする。より明確には n_{ij} とするのがよいが，記号が煩雑になるので簡略に用いる。地点ij間を通過する交通量のうち，ルートkを通行するものを y_{ijk} とする。各ルートの交通量の合計が y_{ij} である。すなわち

$$y_{ij} = y_{ij1} + \cdots + y_{ijn}$$

地点ij間のルートkを通過するために必要な費用を考えよう。まず道路建設をしなければならない。その投資累計を K_{ijk} とする。単位期間に利用者全体に課せられる負担は，そのレンタルコストになる。借入利子率，減価償却率等を含めた資本の割引率をrとする。従って，単位期間当たりのレンタルコストは rK_{ijk} となる。

道路維持のための費用（M_{ijk}）も必要である。それは交通量に依存する。すなわち

$$M_{ijk} = M_{ijk}(y_{ijk})$$

さらに所要時間も費用として明示的に表現しよう。所要時間（t_{ijk}）は交通量の大きさと，道幅等の走行の容易さに依存する。走行の容易さは，道路建設投資に比例すると考える。ただし本稿では，道路建設投資はある水準に固定されているとする。従って

$$t_{ijk} = t_{ijk}(y_{ijk})$$

所要時間は渋滞が発生していないときには，どの交通量の大きさでも変わらないと想定してよい。渋滞が発生しない最大限の交通量を y^*_{ijk} とし，『無渋滞最大交通量』あるいは『無渋滞交通量』とよぶ。全ルートの合計を y^*_{ij} とする。すなわち

$$y^*_{ij} = y^*_{ijk} + \cdots + y^*_{ijn}$$

無渋滞交通量のときの所要時間を t^*_{ijk} とし，『無渋滞所要時間』とよぶ。渋滞が発生すると，所要時間は交通量の増加により逓増すると考えられる。従って

$$\begin{aligned} t_{ijk} &= t_{ijk}(y_{ijk}) &&: y_{ijk} > y^*_{ijk} \\ &= t^*_{ijk} &&: y_{ijk} \leq y^*_{ijk} \end{aligned}$$

ただし

$$\frac{\partial t_{ijk}}{\partial y_{ijk}} > 0$$

$$t_{ijk}(y^*_{ijk}) = t^*_{ijk}$$

と表現される。

地点 ij 間のルート k の混雑度を

$$\delta_{ijk} = \frac{y_{ijk} - y^*_{ijk}}{y^*_{ijk}}$$

と定義する。すなわち，無渋滞交通量を基準にして，それを超える交通量の割合を『混雑度』とする。

[II] 価格ゼロの場合の交通量

1．交通量配分比率

均衡状態では，限界便益が限界費用に等しい。価格ゼロの場合，私的限界費用は所要時間だけである。また，各ルートの所要時間は等しい。従って，地点 ij 間における需要均衡式は

$$\begin{aligned} w\bar{t}_{ij} + D_{ij}(z_{ij}) &= wt_{ij1}(y_{ij1}) \\ &\vdots \\ &= wt_{ijn}(y_{ijn}) \end{aligned}$$

地点 ij 間を通過する交通量 y_{ij} のうち，ルート k を通過する割合を β_{ijk} とする。

$t_{ijk}(y_{ijk})$ を y^*_{ijk} のまわりで一次近似する。

$$\begin{aligned} t_{ijk}(y_{ijk}) &= t^*_{ijk} + (y_{ijk} - y^*_{ijk})\, t'_{ijk}(y^*_{ijk}) \\ &= t^*_{ijk} + b^*_{ijk}(\beta_{ijk} y_{ij} - y^*_{ijk}) \\ &= (t^*_{ijk} - b^*_{ijk} y^*_{ijk}) \\ &\quad + \beta_{ijk} b^*_{ijk} y_{ij} \\ &= t^0_{ijk} + \beta_{ijk} b^*_{ijk} y_{ij} \end{aligned}$$

ここで

$$b^*_{ijk} = t'_{ijk}(y^*_{ijk})$$

$$t^0_{ijk} = t^*_{ijk} - b^*_{ijk} y^*_{ijk}$$

である。

b^*_{ijk} は地点 ij 間のルート k の無渋滞交通量における『限界所要時間』であり，1台追加することにより増加する所要時間である。t^0_{ijk} はそのルートにおける交通量に依存しない『固定時間費用』であり，無渋滞所要時間から限界所要時間合計を引いた値である。$\beta_{ijk} b^*_{ijk} y_{ij}$ は交通量に依存する『可変時間費用』である。所要時間は固定時間費用に，1台追加されるごとに限界所要時間の大きさを加算していくことによって求められる。

また

$$c^*_{ijk} = \frac{1}{b^*_{ijk}}$$

$$b^*_{ij} = \frac{1}{\Sigma_k c^*_{ijk}}$$

とおく。c^*_{ijk} は b^*_{ijk} の逆数である。b^*_{ijk} の値が大

きい場合には，そのルートの道路幅が狭く，すぐに混雑して所要時間が増加してしまうと想定される。逆に，この値が小さい場合には，道路幅が大きく，混雑の増加が少ない。従って，この逆数 c^*_{ijk} は地点 ij 間ルート k の道路幅の大きさとみなしてよい。b^*_{ij} は b^*_{ij1}，…，b^*_{ijn} の調和平均の $\frac{1}{n}$ 倍である。

さらに

$$t^*_{ij}=\frac{\Sigma_k c^*_{ijk}\,t^*_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}$$

$$t^0_{ij}=\frac{\Sigma_k c^*_{ijk}\,t^0_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}$$

$$=t^*_{ij}-b^*_{ij}\,y^*_{ij}$$

とおく。t^*_{ij} は t^*_{ij1}，…，t^*_{ijn} の各ルートの道路幅 c^*_{ijk} による加重平均である。t^0_{ij} は地点 ij 間の各ルートの固定時間費用を，それぞれの道路幅で加重平均したものである。

方程式

$$wt_{ij1}(y_{ij1})=\cdots=wt_{ijn}(y_{ijn})$$

を解く。すなわち一次近似として

$$t^0_{ij1}+\frac{1}{c^*_{ij1}}\beta_{ij1}y_{ij}=\cdots=t^0_{ijn}+\frac{1}{c^*_{ijn}}\beta_{ijn}y_{ij}$$

$$\beta_{ij1}+\cdots+\beta_{ijn}=1$$

ただし

$$\beta_{ijk}\geq 0\quad(k=1,\cdots,n)$$

t を共通な所要時間とすると

$$t^0_{ijk}+\frac{1}{c^*_{ijk}}\beta_{ijk}\,y_{ij}=t$$

これを変形する。

$$\beta_{ijk}=\frac{c^*_{ijk}}{y_{ij}}(t-t^0_{ijk})$$

従って

$$\sum_k c^*_{ijk}(t-t^0_{ijk})=y_{ij}$$

$$t=\frac{y_{ij}+\Sigma_k c^*_{ijk}\,t^0_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}$$

これを代入すると

$$\beta_{ijk}=\frac{c^*_{ijk}}{y_{ij}}\left(\frac{y_{ij}+\Sigma_k c^*_{ijk}t^0_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}-t^0_{ijk}\right)$$

$$=\frac{c^*_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}+\frac{c^*_{ijk}}{y_{ij}}\left(\frac{\Sigma_k c^*_{ijk}t^0_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}-t^0_{ijk}\right)$$

$$=\frac{c^*_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}+\frac{c^*_{ijk}(t^0_{ij}-t^0_{ijk})}{y_{ij}}$$

ルート k の交通量があるためには $\beta_{ijk}\geq 0$ であるから，

$$b^*_{ij}\,y_{ij}\geq t^0_{ijk}-t^0_{ij}$$

が成り立たなければならない。従って，ルート k の固定時間費用 t^0_{ijk} が全ルート平均の固定時間費用 t^0_{ij} より大きく，その差が限界所要時間合計 $b^*_{ij}\,y_{ij}$ を超えるならば，ルート k の交通量はゼロになる。

2. 需給均衡式

地点 ij 間のルート k の需給均衡式は

$$w\bar{t}_{ij}+D_{ij}(z_{ij})=wt_{ijk}(y_{ijk})$$

一次近似をして

$$w\bar{t}_{ij}+D(y^*_{ij})+(z_{ij}-y^*_{ij})D'(y^*_{ij})$$
$$=wt_{ijk}(y^*_{ijk})+w(y_{ijk}-y^*_{ijk})t'_{ijk}(y^*_{ijk})$$

これを変形して

$$w\bar{t}_{ij}+p^*_{ij}-\frac{1}{s^*_{ij}}(z_{ij}-y^*_{ij})=w(t^*_{ijk}$$
$$-b^*_{ijk}\,y^*_{ijk}+b^*_{ijk}\,\beta_{ijk}\,y_{ij})$$

$$b^*_{ijk}\,\beta_{ijk}\,y_{ij}+\frac{1}{s^*_{ij}w}z_{ij}=\frac{1}{w}\left(p^*_{ij}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{s^*_{ij}}y^*_{ij}\right)+(\bar{t}_{ij}-t^*_{ijk})+b^*_{ijk}\,y^*_{ijk}$$

β_{ijk} に上で求めた式を代入する。

$$\frac{b^*_{ijk}c^*_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}y_{ij}+\frac{1}{s^*_{ij}w}z_{ij}=\frac{1}{w}\Big(p^*_{ij}$$
$$+\frac{1}{s^*_{ij}}y^*_{ij}\Big)+(\bar{t}_{ij}-t^*_{ijk})+b^*_{ijk}y^*_{ijk}$$
$$-b^*_{ijk}c^*_{ijk}(t^0_{ij}-t^0_{ijk})$$

$$\frac{1}{\Sigma_k c^*_{ijk}}y_{ij}+\frac{1}{s^*_{ij}w}z_{ij}=\frac{1}{w}\Big(p^*_{ij}$$
$$+\frac{1}{s^*_{ij}}y^*_{ij}\Big)+\bar{t}_{ij}-t^0_{ij}$$

$$\frac{1}{\Sigma_k c^*_{ijk}}y_{ij}+\frac{1}{s^*_{ij}w}z_{ij}=\frac{1}{w}\Big(p^*_{ij}$$
$$+\frac{1}{s^*_{ij}}y^*_{ij}\Big)+b^*_{ij}y^*_{ij}+\bar{t}_{ij}-t^*_{ij}$$

上式は

$$s^*_{ij}wb^*_{ij}y_{ij}+z_{ij}=s^*_{ij}p^*_{ij}+y^*_{ij}$$
$$+s^*_{ij}wb^*_{ij}y^*_{ij}+s^*_{ij}w(\bar{t}_{ij}-t^*_{ij})$$

となる。

$$y^c_{ij}=s^*_{ij}wy^*_{ij}b^*_{ij}$$

$$y^e_{ij}=s^*_{ij}p^*_{ij}$$

と表す。

$$y^c_{ij}y_{ij}+y^*_{ij}z_{ij}=(y^*_{ij}+y^e_{ij}+y^c_{ij})y^*_{ij}$$
$$+s^*_{ij}wy^*_{ij}(\bar{t}_{ij}-t^*_{ij})$$

ここで

$$\bar{t}_{ij}=t^*_{ij}$$

と仮定する。$\bar{t}_{ij}$ は t^*_{ij1}, …, t^*_{ijn} の各ルートの道路幅による加重平均である。

$$y^c_{ij}y_{ij}+y^*_{ij}z_{ij}=(y^*_{ij}+y^e_{ij}+y^c_{ij})y^*_{ij}$$

すなわち，地点 ij 間の複数ルートの需給均衡式が単一ルートの需給均衡式の場合と同様に表現される。

いま3地点が A，B，C ある。地点 ij 間の交通量についての均衡式が上式のように得られるので，各地点間の需給均衡式は以下のようになる。

$$y^*_{AB}z_{AB}+y^c_{AB}y_{AB}$$
$$=(y^*_{AB}+y^e_{AB}+y^c_{AB})y^*_{AB} \tag{1}$$

$$y^*_{BC}z_{BC}+y^c_{BC}y_{BC}$$
$$=(y^*_{BC}+y^e_{BC}+y^c_{BC})y^*_{BC} \tag{2}$$

$$y^*_{CA}z_{CA}+y^c_{CA}y_{CA}$$
$$=(y^*_{CA}+y^e_{CA}+y^c_{CA})y^*_{CA} \tag{3}$$

3．所要時間

地点 ij 間を結ぶルートは複数ある。価格ゼロのケースでは，均衡状態において，各ルートの所要時間は等しい。従って

$$t_{ij1}=\cdots=t_{ijn}$$

いま地点 A，B の通行を目的とする交通量があるとする。それが直接 AB を結ぶルートと C を経由していくルートとに分かれるとする。価格ゼロの均衡状態においては，直接 AB 間を通行する場合と，C を経由して通行する場合とにおいて，所要時間は等しくなる。従って，たとえば地点 AB 間はルート h を，地点 BC 間はルート k，地点 CA 間はルート ℓ を通行するとすれば

$$t_{ABh}(y_{ABh})=t_{BCk}(y_{BCk})+t_{CA\ell}(y_{CA\ell})$$

同様に地点 BC 間，地点 CA 間の交通に対しては

$$t_{BCk}(y_{BCk})=t_{CA\ell}(y_{CA\ell})+t_{ABh}(y_{ABh})$$

$$t_{CA\ell}(y_{CA\ell})=t_{ABh}(y_{ABh})+t_{BCk}(y_{BCk})$$

もし3つの方程式が同時に成り立つとしたら，各地点を結ぶ所要時間はゼロになる。従って，このようなことはあり得ない。

そこで，いま地点 CA 間の通行を目的とする交通は，B を経由することなく直接 CA 間を通行するものとする。このときには，上式の始めの2つの方程式が成り立つ。この場合には地点 CA 間の所要時間はゼロになり，A と C は同じ地点を示す。このケースは2地点間交通量の問題であり，ここでは省略する。

そこでさらに，地点 CA 間の他に地点 BC 間の通行を目的とする交通に対しても，他の地点を経由して行く交通はないと仮定する。そのさいには，始めの式だけが成り立つ。従って

$$t_{ABh}(y_{ABh})=t_{BCk}(y_{BCk})+t_{CA\ell}(y_{CA\ell})$$

地点 ij 間のルート k の所要時間を一次近似して

$$t_{ijk}(y_{ijk}) = t^*_{ijk} + b^*_{ijk}(y_{ijk} - y^*_{ijk})$$

$t_{ij}(y_{ij})$ を $t_{ij1}(y_{ij1})$, …, $t_{ijn}(y_{ijn})$ の道路幅 c^*_{ijk} による加重平均とする。それを変形すると

$$\begin{aligned} t_{ij}(y_{ij}) &= \frac{\Sigma_k c^*_{ijk} t_{ijk}(y_{ijk})}{\Sigma_k c^*_{ijk}} \\ &= \frac{\Sigma_k (c^*_{ijk} t^*_{ijk} + y_{ijk} - y^*_{ijk})}{\Sigma_k c^*_{ijk}} \\ &= \frac{\Sigma_k c^*_{ijk} t^*_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}} + \frac{\Sigma_k (y_{ijk} - y^*_{ijk})}{\Sigma_k c^*_{ijk}} \\ &= t^*_{ij} + b^*_{ij}(y_{ij} - y^*_{ij}) \end{aligned}$$

均衡状態においては

$$t_{ij1}(y_{ij1}) = \cdots = t_{ijn}(y_{ijn}) = t_{ij}(y_{ij})$$

が成立するので

$$t_{AB}(y_{AB}) = t_{BC}(y_{BC}) + t_{CA}(y_{CA})$$

となる。従って，複数ルートのケースも単一ルートのケースと同様に表現できる。

一次近似して

$$\begin{aligned} & t_{AB}(y^*_{AB}) + (y_{AB} - y^*_{AB})\, t'_{AB}(y^*_{AB}) \\ = {} & t_{BC}(y^*_{BC}) + (y_{BC} - y^*_{BC})\, t'_{BC}(y^*_{BC}) \\ & + t_{CA}(y^*_{CA}) + (y_{CA} - y^*_{CA})\, t'_{CA}(y^*_{CA}) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & t'_{AB}(y^*_{AB})\, y_{AB} - t'_{BC}(y^*_{BC})\, y_{BC} - t'_{CA}(y^*_{CA})\, y_{CA} \\ = {} & (t^c_{AB} - t^c_{BC} - t^c_{CA}) - (t^*_{AB} - t^*_{BC} - t^*_{CA}) \end{aligned} \qquad (4)$$

ここで

$$t^c_{ij} = y^*_{ij}\, t'_{ij}(y^*_{ij})$$

地点 BC 間の通行を目的とする交通に対しては，他の地点を経由して行く交通はないと仮定しているので

$$y_{BC} = (1 - \alpha_{AB})\, z_{AB} + z_{BC}$$

ただし α_{AB} は，地点 AB 間を通行する目的の交通のうち，他の C 地点を経由しないで直接 AB 間を通行する交通量の割合である。$y_{AB} = \alpha_{AB} z_{AB}$ であるから

$$z_{AB} + z_{BC} = y_{AB} + y_{BC} \qquad (5)$$

同様に，地点 CA 間の仮定から

$$z_{AB} + z_{CA} = y_{AB} + y_{CA} \qquad (6)$$

4．方程式の解

3 地点 A，B，C がある。地点 AB 間の通行を目的とする交通の場合には，直接地点 AB 間を通行する交通のほかに，地点 C を経由する交通もあるとする。また，地点 BC 間および地点 CA 間の通行を目的とする交通に対しては，他の地点を経由して行く交通はないと仮定する。そのさいに，均衡状態における交通量は(1)から(6)の方程式を解けば得られる。[(1)]

価格ゼロにおける地点 ij 間の混雑度を $\delta^{\not{c}}_{ij}$ とする。

$$\delta^{\not{c}}_{ij} = \frac{y^{\not{c}}_{ij} - y^*_{ij}}{y^*_{ij}}$$

各地点間の交通量がすべて他地点を経由することなく，直接それぞれの地点を通行する場合を想定しよう。そのような状態を『無経由通行状態』と呼ぶ。価格ゼロにおいて，この場合に生じる地点 ij 間の混雑度を $\varepsilon^{\not{c}}_{ij}$ とする。それは

$$\varepsilon^{\not{c}}_{ij} = \frac{y^c_{ij}}{y^*_{ij} + y^c_{ij}}$$

と表現される。

さらに

$$\hat{t}^{c\not{c}}_{ij} = \varepsilon^{\not{c}}_{ij}\, t^c_{ij}$$

$$\hat{t}^{\not{c}}_{ij} = t^*_{ij} + \hat{t}^{c\not{c}}_{ij}$$

とする。$\hat{t}^{\not{c}}_{ij}$ は，価格ゼロの無経由通行状態における地点 ij 間の所要時間である。また，$\hat{t}^{c\not{c}}_{ij}$ はそのときの無渋滞所要時間を超過する所要時間である。

地点 AB 間の交通量は

$$y^{\not{c}}_{AB} = (1 + \delta^{\not{c}}_{AB})\, y^*_{AB}$$

$$\delta^{\not{c}}_{AB} = (1 - \Delta^{\not{c}}_{AB})\, \varepsilon^{\not{c}}_{AB}$$

$$\varepsilon^{\phi}_{AB} = \frac{y^{e}_{AB}}{y^{*}_{AB} + y^{e}_{AB}}$$

$$\Delta^{\phi}_{AB} = \frac{\hat{t}^{\phi}_{AB} - \hat{t}^{\phi}_{BC} - \hat{t}^{\phi}_{CA}}{\hat{t}^{e\phi}_{AB} + \hat{t}^{e\phi}_{BC}\frac{y^{e}_{AB}}{y^{e}_{BC}} + \hat{t}^{e\phi}_{CA}\frac{y^{e}_{AB}}{y^{e}_{CA}}}$$

$$z^{\phi}_{AB} = y^{\phi}_{AB} + \Delta^{\phi}_{AB}\, y^{e}_{AB}$$

地点 AB 間のルート k の交通量は

$b^{*}_{ABk}\, y_{AB} \geq t^{0}_{ABk} - t^{0}_{AB}$のとき

$$y_{ABk} = \frac{c^{*}_{ABk}}{\Sigma_k c^{*}_{ABk}}\, y_{AB} + c^{*}_{ABk}\,(t^{0}_{AB} - t^{0}_{ABk})$$

$b^{*}_{ABk}\, y_{AB} < t^{0}_{ABk} - t^{0}_{AB}$ のとき

$$y_{ABk} = 0$$

地点 BC 間の交通量は

$$y^{\phi}_{BC} = (1 + \delta^{\phi}_{BC})\, y^{*}_{BC}$$

$$\delta^{\phi}_{BC} = (1 - \Delta^{\phi}_{BC})\, \varepsilon^{\phi}_{BC}$$

$$\varepsilon^{\phi}_{BC} = \frac{y^{e}_{BC}}{y^{*}_{BC} + y^{e}_{BC}}$$

$$\Delta^{\phi}_{BC} = -\Delta^{\phi}_{AB}\frac{y^{e}_{AB}}{y^{e}_{BC}}$$

$$z^{\phi}_{BC} = y^{\phi}_{BC} + \Delta^{\phi}_{BC}\, y^{e}_{BC}$$

地点 BC 間のルート k の交通量は

$b^{*}_{BCk}\, y_{BC} \geq t^{0}_{BCk} - t^{0}_{BC}$ のとき

$$y_{BCk} = \frac{c^{*}_{BCk}}{\Sigma_k c^{*}_{BCk}}\, y_{AB} + c^{*}_{BCk}\,(t^{0}_{BC} - t^{0}_{BCk})$$

$b^{*}_{BCk}\, y_{BC} < t^{0}_{BCk} - t^{0}_{BC}$ のとき

$$y_{BCk} = 0$$

地点 CA 間の交通量は

$$y^{\phi}_{CA} = (1 + \delta^{\phi}_{CA})\, y^{*}_{CA}$$

$$\delta^{\phi}_{CA} = (1 - \Delta^{\phi}_{CA})\ \varepsilon^{\phi}_{CA}$$

$$\varepsilon^{\phi}_{CA} = \frac{y^{e}_{CA}}{y^{*}_{CA} + y^{e}_{CA}}$$

$$\Delta^{\phi}_{CA} = -\Delta^{\phi}_{AB}\frac{y^{e}_{AB}}{y^{e}_{CA}}$$

$$z^{\phi}_{CA} = y^{\phi}_{CA} + \Delta^{\phi}_{CA}\, y^{e}_{CA}$$

地点 CA 間のルート k の交通量は

$b^{*}_{CAk}\, y_{CA} \geq t^{0}_{CAk} - t^{0}_{CA}$ のとき

$$y_{CAk} = \frac{c^{*}_{CAk}}{\Sigma_k c^{*}_{CAk}}\, y_{CA} + c^{*}_{CAk}\,(t^{0}_{CA} - t^{0}_{CAk})$$

$b^{*}_{CAk}\, y_{CA} < t^{0}_{CAk} - t^{0}_{CA}$ のとき

$$y_{CAk} = 0$$

[Ⅲ] 社会厚生最大化の場合の交通量

1．交通量配分比率

地点 ij 間のルート k における限界費用関数は

$$MC_{ijk} = wt_{ijk}(y_{ijk}) + wy_{ijk}t'_{ijk}(y_{ijk}) + M'_{ijk}$$

均衡状態では，地点 ij 間を通行するさいの限界便益が，地点 ij 間の各ルートの限界費用に等しい。従って，地点 ij 間における需要均衡式は

$$\begin{aligned} w\bar{t}_{ij} + D_{ij}(z_{ij}) &= wt_{ij1}(y_{ij1}) \\ &\quad + wy_{ij1}t'_{ij1}(y_{ij1}) + M'_{ij1} \\ &\quad \vdots \\ &= wt_{ijn}(y_{ijn}) \\ &\quad + wy_{ijn}t'_{ijn}(y_{ijn}) + M'_{ijn} \end{aligned}$$

地点 ij 間を通過する交通量 y_{ij} のうち，ルート k を通過する割合を β_{ijk} とし，$t_{ijk}(y_{ijk})$ を y^{*}_{ijk} のまわりで一次近似して，上記の方程式を解く。ただし，

$$t'_{ijk}(y_{ijk}) = t'_{ijk}(y^{*}_{ijk}) = b^{*}_{ijk}$$

$$M'_{ijk} = m \quad (\text{一定})$$

とする。

MC を共通な限界費用とすると

$$t^{0}_{ijk} + \frac{2}{c^{*}_{ijk}}\,\beta_{ijk}\, y_{ij} + m = \frac{MC}{w}$$

これを変形する。

$$\beta_{ijk}=\frac{c^*_{ijk}}{2y_{ij}}\left(\frac{MC}{w}-t^0_{ijk}-m\right)$$

従って

$$\sum_k \frac{c^*_{ijk}}{2}\left(\frac{MC}{w}-t^0_{ijk}-m\right)=y_{ij}$$

$$\frac{MC}{w}=\frac{2y_{ij}+\Sigma_k c^*_{ijk}t^0_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}+m$$

これを代入すると

$$\beta_{ijk}=\frac{c^*_{ijk}}{2y_{ij}}\left(\frac{2y_{ij}+\Sigma_k c^*_{ijk}t^0_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}-t^0_{ijk}\right)$$

$$=\frac{c^*_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}+\frac{c^*_{ijk}}{2y_{ij}}\left(\frac{\Sigma_k c^*_{ijk}t^0_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}-t^0_{ijk}\right)$$

$$=\frac{c^*_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}+\frac{c^*_{ijk}(t^0_{ij}-t^0_{ijk})}{2y_{ij}}$$

ルートkの交通量があるためには $\beta_{ijk}\geq 0$ であるから，

$$2b^*_{ij}y_{ij}\geq t^0_{ijk}-t^0_{ij}$$

が成り立たなければならない。従って，ルートkの固定時間費用 t^0_{ijk} が全ルート平均の固定時間費用 t^0_{ij} より大きく，その差の $\frac{1}{2}$ が限界所要時間合計 $b^*_{ijl}y_{ij}$ を超えるならば，ルートkの交通量はゼロになる。

2．需給均衡式

地点ij間のルートkの需給均衡式は

$$w\bar{t}_{ij}+D_{ij}(z_{ij})=wt_{ijk}(y_{ijk})+wy_{ijk}t'_{ijk}(y_{ijk})+M'_{ijk}$$

一次近似をして

$$w\bar{t}_{ij}+D(y^*_{ij})+(z_{ij}-y^*_{ij})D'(y^*_{ij})$$
$$=wt_{ijk}(y^*_{ijk})+w(y_{ijk}-y^*_{ijk})t'_{ijk}(y^*_{ijk})+wy_{ijk}t'_{ijk}(y_{ijk})+M'_{ijk}$$
$$=wt_{ijk}(y^*_{ijk})+w(2y_{ijk}-y^*_{ijk})t'_{ijk}(y^*_{ijk})+m$$

これを変形して

$$w\bar{t}_{ij}+p^*_{ij}-\frac{1}{s^*_{ij}}(z_{ij}-y^*_{ij})$$
$$=w(t^*_{ijk}-b^*_{ijk}y^*_{ijk}+2b^*_{ijk}\beta_{ijk}y_{ij})+m$$

$$2b^*_{ijk}\beta_{ijk}y_{ij}+\frac{1}{s^*_{ij}w}z_{ij}$$
$$=\frac{1}{w}\left(p^*_{ij}+\frac{1}{s^*_{ij}}y^*_{ij}\right)+(\bar{t}_{ij}-t^*_{ijk})+b^*_{ijk}y^*_{ijk}-\frac{m}{w}$$

β_{ijk} に上で求めた式を代入する。

$$\frac{2b^*_{ijk}c^*_{ijk}}{\Sigma_k c^*_{ijk}}y_{ij}+\frac{1}{s^*_{ij}w}z_{ij}$$
$$=\frac{1}{w}\left(p^*_{ij}+\frac{1}{s^*_{ij}}y^*_{ij}\right)+(\bar{t}_{ij}-t^*_{ijk})+b^*_{ijk}y^*_{ijk}-\frac{m}{w}-b^*_{ijk}c^*_{ijk}(t^0_{ij}-t^0_{ijk})$$

$$\frac{2}{\Sigma_k c^*_{ijk}}y_{ij}+\frac{1}{s^*_{ij}w}z_{ij}$$
$$=\frac{1}{w}\left(p^*_{ij}+\frac{1}{s^*_{ij}}y^*_{ij}\right)+\bar{t}_{ij}-t^0_{ij}-\frac{m}{w}$$

$$\frac{2}{\Sigma_k c^*_{ijk}}y_{ij}+\frac{1}{s^*_{ij}w}z_{ij}$$
$$=\frac{1}{w}\left(p^*_{ij}+\frac{1}{s^*_{ij}}y^*_{ij}\right)+b^*_{ij}y^*_{ij}+\bar{t}_{ij}-t^*_{ij}-\frac{m}{w}$$

上式は

$$2s^*_{ij}wb^*_{ij}y_{ij}+z_{ij}$$
$$=s^*_{ij}p^*_{ij}+y^*_{ij}+s^*_{ij}wb^*_{ij}y^*_{ij}+s^*_{ij}w(\bar{t}_{ij}-t^*_{ij})-s^*_{ij}m$$

となる。

$$y^{m}_{ij} = s^{*}_{ij}\, m$$

と表す。

$$2\, y^{c}_{ij}\, y_{ij} + y^{*}_{ij}\, z_{ij} = (y^{*}_{ij} + y^{e}_{ij} + y^{c}_{ij} - y^{m}_{ij})\, y^{*}_{ij} + s^{*}_{ij}\, w y^{*}_{ij}\, (\bar{t}_{ij} - t^{*}_{ij})$$

ここで

$$\bar{t}_{ij} = t^{*}_{ij}$$

と仮定する。

$$2\, y^{c}_{ij}\, y_{j} + y^{*}_{ij}\, z_{ij} = (y^{*}_{ij} + y^{e}_{ij} + y^{c}_{ij} - y^{m}_{ij})\, y^{*}_{ij}$$

すなわち，地点 ij 間の複数ルートの需給均衡式が単一ルートの需給均衡式の場合と同様に表現される。

いま3地点が A，B，C ある。地点 ij 間の交通量についての均衡式が上式のように得られるので，各地点間の需給均衡式から以下の式が導き出せる。

$$y^{*}_{AB}\, z_{AB} + 2\, y^{c}_{AB}\, y_{AB} = (y^{*}_{AB} + y^{e}_{AB} + y^{c}_{AB} - y^{m}_{AB})\, y^{*}_{AB} \tag{7}$$

$$y^{*}_{BC}\, z_{BC} + 2\, y^{c}_{BC}\, y_{BC} = (y^{*}_{BC} + y^{e}_{BC} + y^{c}_{BC} - y^{m}_{BC})\, y^{*}_{BC} \tag{8}$$

$$y^{*}_{CA}\, z_{CA} + 2\, y^{c}_{CA}\, y_{CA} = (y^{*}_{CA} + y^{e}_{CA} + y^{c}_{CA} - y^{m}_{CA})\, y^{*}_{CA} \tag{9}$$

3．限界費用

地点 ij 間を結ぶルートは複数ある。均衡状態において，各ルートの限界費用は等しい。従って

$$MC_{ij1} = \cdots = MC_{ijn}$$

〔 II 〕で述べたと同様な仮定の下では

$$MC_{ABh} = MC_{BCk} + MC_{CA\ell}$$

だけが成立する。

地点 ij 間のルート k の限界費用を一次近似し，さらに $t'_{ijk}(y_{ijk}) = t'_{ijk}(y^{*}_{ijk}) = b^{*}_{ijk}$，$M'_{ijk} = m$ の仮定を用いると

$$MC_{ijk} = t^{*}_{ijk} + b^{*}_{ijk}\,(2\, y_{ijk} - y^{*}_{ijk}) + m$$

MC_{ij} を MC_{ij1}，…，MC_{ijn} の道路幅 c^{*}_{ijk} による加重平均とする。それを変形すると

$$\begin{aligned} MC_{ij} &= \frac{\Sigma_k\, c^{*}_{ijk}\, MC_{ijk}}{\Sigma_k\, c^{*}_{ijk}} \\ &= \frac{\Sigma_k\,(c^{*}_{ijk}\, t^{*}_{ijk} + 2\, y_{ijk} - y^{*}_{ijk})}{\Sigma_k\, c^{*}_{ijk}} + m \\ &= \frac{\Sigma_k\, c^{*}_{ijk}\, t^{*}_{ijk}}{\Sigma_k\, c^{*}_{ijk}} + \frac{\Sigma_k\,(2\, y_{ijk} - y^{*}_{ijk})}{\Sigma_k\, c^{*}_{ijk}} + m \\ &= t^{*}_{ij} + b^{*}_{ij}\,(2\, y_{ij} - y^{*}_{ij}) + m \end{aligned}$$

均衡状態においては

$$MC_{ij1} = \cdots = MC_{ijn} = MC_{ij}$$

が成立するので

$$MC_{AB} = MC_{BC} + MC_{CA}$$

となる。

一次近似して

$$\begin{aligned} & t_{AB}(y^{*}_{AB}) + (2\, y_{AB} - y^{*}_{AB})\, t'_{AB}(y^{*}_{AB}) + \frac{m}{w} \\ &= t_{BC}(y^{*}_{BC}) + (2\, y_{BC} - y^{*}_{BC})\, t'_{BC}(y^{*}_{BC}) + \frac{m}{w} \\ &\quad + t_{CA}(y^{*}_{CA}) + (2\, y_{CA} - y^{*}_{CA})\, t'_{CA}(y^{*}_{CA}) + \frac{m}{w} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & 2\, t'_{AB}(y^{*}_{AB})\, y_{AB} - t'_{BC}(y^{*}_{BC})\, y_{BC} - t'_{CA}(y^{*}_{CA})\, y_{CA} \\ &= (t^{c}_{AB} - t^{c}_{BC} - t^{c}_{CA}) - (t^{*}_{AB} - t^{*}_{BC} - t^{*}_{CA}) + \frac{m}{w} \end{aligned} \tag{10}$$

地点 BC 間の通行を目的とする交通に対しては，他の地点を経由して行く交通はないと仮定しているので

$$z_{AB} + z_{BC} = y_{AB} + y_{BC} \tag{11}$$

同様に，地点 CA 間の仮定から

$$z_{AB} + z_{CA} = y_{AB} + y_{CA} \tag{12}$$

4．方程式の解

〔Ⅱ〕と同様の仮定の場合，社会厚生を最大化する行動での均衡状態における交通量は(7)から(12)の方程式を解けば得られる。[2]

ここで社会厚生最大化の場合における地点 ij 間の混雑度を δ^{σ}_{ij} とする。

$$\delta^{\sigma}_{ij} = \frac{y^{\sigma}_{ij} - y^{*}_{ij}}{y^{*}_{ij}}$$

また，無経由通行状態で社会厚生を最大化する場合に生じる地点 ij 間の混雑度を $\varepsilon^{\sigma}_{ij}$ とする。それは

$$\varepsilon^{\sigma}_{ij} = \frac{y^{e}_{ij} - y^{y}_{ij} - y^{m}_{ij}}{y^{*}_{ij} + y^{c}_{ij} + y^{y}_{ij}}$$

と表現される。

さらに

$$\hat{t}^{e\sigma}_{ij} = \varepsilon^{\sigma}_{ij}\, t^{c}_{ij}$$

$$\hat{t}^{\sigma}_{ij} = t^{*}_{ij} + \hat{t}^{e\sigma}_{ij}$$

とする。$\hat{t}^{\sigma}_{ij}$ は，社会厚生最大化の場合の無経由通行状態における地点 ij 間の所要時間である。また，$\hat{t}^{e\sigma}_{ij}$ はそのときの無渋滞所要時間を超過する所要時間である。

ここで

$$y^{ecm}_{ij} = y^{e}_{ij} - y^{c}_{ij} - y^{m}_{ij}$$

と表す。

地点 AB 間の交通量は

$$y^{\sigma}_{AB} = (1 + \delta^{\sigma}_{AB})\, y^{*}_{AB}$$

$$\delta^{\sigma}_{AB} = (1 - \Delta^{\sigma}_{AB})\, \varepsilon^{\sigma}_{AB}$$

$$\varepsilon^{\sigma}_{AB} = \frac{y^{e}_{AB} - y^{c}_{AB} - y^{m}_{AB}}{y^{*}_{AB} + 2\, y^{c}_{AB}}$$

$$\Delta^{\sigma}_{AB} = \frac{MC^{\sigma}_{AB} - MC^{\sigma}_{BC} - MC^{\sigma}_{CA}}{2\left(\hat{t}^{e\sigma}_{AB} + \hat{t}^{e\sigma}_{BC}\frac{y^{ecm}_{AB}}{y^{ecm}_{BC}} + \hat{t}^{e\sigma}_{CA}\frac{y^{ecm}_{AB}}{y^{ecm}_{CA}}\right)}$$

$$z^{\phi}_{AB} = y^{\sigma}_{AB} + \Delta^{\sigma}_{AB}\, y^{ecm}_{AB}$$

地点 AB 間のルート k の交通量は

$2\, b^{*}_{ABk}\, y_{AB} \geq t^{0}_{ABk} - t^{0}_{AB}$ のとき

$$y_{ABk} = \frac{c^{*}_{ABk}}{\sum_{k} c^{*}_{ABk}}\, y_{AB} + \frac{c^{*}_{ABk}(t^{0}_{AB} - t^{0}_{ABk})}{2}$$

$2\, b^{*}_{ABk}\, y_{AB} < t^{0}_{ABk} - t^{0}_{AB}$ のとき

$$y_{ABk} = 0$$

地点 BC 間の交通量は

$$y^{\sigma}_{BC} = (1 + \delta^{\sigma}_{BC})\, y^{*}_{BC}$$

$$\delta^{\sigma}_{BC} = (1 - \Delta^{\sigma}_{BC})\, \varepsilon^{\sigma}_{BC}$$

$$\varepsilon^{\sigma}_{BC} = \frac{y^{e}_{BC} - y^{c}_{BC} - y^{m}_{BC}}{y^{*}_{BC} + 2\, y^{c}_{BC}}$$

$$\Delta^{\sigma}_{BC} = -\Delta^{\sigma}_{AB}\frac{y^{ecm}_{AB}}{y^{ecm}_{BC}}$$

$$z^{\phi}_{BC} = y^{\sigma}_{BC} + \Delta^{\sigma}_{BC}\, y^{ecm}_{BC}$$

地点 BC 間のルート k の交通量は

$2\, b^{*}_{BCk}\, y_{BC} \geq t^{0}_{BCk} - t^{0}_{BC}$ のとき

$$y_{BCk} = \frac{c^{*}_{BCk}}{\sum_{k} c^{*}_{BCk}}\, y_{BC} + \frac{c^{*}_{BCk}(t^{0}_{BC} - t^{0}_{BCk})}{2}$$

$2\, b^{*}_{BCk}\, y_{BC} < t^{0}_{BCk} - t^{0}_{BC}$ のとき

$$y_{BCk} = 0$$

地点 CA 間の交通量は

$$y^{\sigma}_{CA} = (1 + \delta^{\sigma}_{CA})\, y^{*}_{CA}$$

$$\delta^{\sigma}_{CA} = (1 - \Delta^{\sigma}_{CA})\, \varepsilon^{\sigma}_{CA}$$

$$\varepsilon^{\sigma}_{CA} = \frac{y^{e}_{CA} - y^{c}_{CA} - y^{m}_{CA}}{y^{*}_{CA} + 2\, y^{c}_{CA}}$$

$$\Delta^{\sigma}_{CA} = -\Delta^{\sigma}_{AB}\frac{y^{ecm}_{AB}}{y^{ecm}_{CA}}$$

$$z^{\phi}_{CA} = y^{\sigma}_{CA} + \Delta^{\sigma}_{CA}\, y^{ecm}_{CA}$$

地点 CA 間のルート k の交通量は

$2\, b^{*}_{CAk}\, y_{CA} \geq t^{0}_{CAk} - t^{0}_{CA}$ のとき

$$y_{CAk} = \frac{c^{*}_{CAk}}{\sum_{k} c^{*}_{CAk}}\, y_{CA} + \frac{c^{*}_{CAk}(t^{0}_{CA} - t^{0}_{CAk})}{2}$$

$2\,b^{*}_{CAk}\,y_{CA} < t^{0}_{CAk} - t^{0}_{CA}$ のとき

$y_{CAk} = 0$

〔記号の定義〕

z_{ij}：地点 ij 間の通行を目的とする交通量。

y_{ijk}：地点 ij 間ルート k の通過交通量。

y_{ij}：地点 ij 間の通過交通量。これは $\Sigma_k y_{ijk}$。

y^{*}_{ijk}：地点 ij 間ルート k の無渋滞最大交通量あるいは無渋滞交通量。

y^{*}_{ij}：地点 ij 間の無渋滞交通量。これは $\Sigma_k y^{*}_{ijk}$。

t_{ijk}：地点 ij 間ルート k の所要時間。

t_{ij}：地点 ij 間の所要時間。これは $t_{ij1}, \cdots, t_{ijn}$ の道路幅 c^{*}_{ijk} による加重平均。

t^{*}_{ijk}：地点 ij 間ルート k の無渋滞所要時間。

t^{*}_{ij}：地点 ij 間の無渋滞所要時間。これは $t^{*}_{ij1}, \cdots, t^{*}_{ijn}$ の道路幅 c^{*}_{ijk} による加重平均。

$t^{0}_{ijk} = t^{*}_{ijk} - b^{*}_{ijk}\,y^{*}_{ijk}$：地点 ij 間ルート k の固定時間費用。

t^{0}_{ij}：地点 ij 間の固定時間費用。これは $t^{0}_{ij1}, \cdots, t^{0}_{ijn}$ の道路幅 c^{*}_{ijk} による加重平均。

p_{ij}：地点 ij 間を通行するさいの価格。

p^{*}_{ij}：地点 ij 間の無渋滞価格。ここで $p^{*}_{ij} = D_{ij}(y^{*}_{ij})$。

$b^{*}_{ijk} = t'_{ijk}(y^{*}_{ijk})$：地点 ij 間ルート k の無渋滞交通量における限界所要時間。

$c^{*}_{ijk} = \dfrac{1}{b^{*}_{ijk}}$：地点 ij 間ルート k の道路幅を表現する。

b^{*}_{ij}：$b^{*}_{ij1}, \cdots, b^{*}_{ijn}$ の調和平均の $\dfrac{1}{n}$ 倍。

$s^{*}_{ij} = \dfrac{1}{D'_{ij}(y^{*}_{ij})}$：地点 ij 間の無渋滞交通量において料金が1単位課されたときに減少する交通量。

$t^{c}_{ij} = y^{*}_{ij}\,t'_{ij}(y^{*}_{ij})$：地点 ij 間の限界所要時間合計。無渋滞交通量において，1台追加することにより増加する所要時間の全車合計分。

$y^{c}_{ij} = s^{*}_{ij}\,wt^{c}_{ij}$：地点 ij 間の限界機会交通量。無渋滞交通量において，限界機会費用だけ料金が課されるとした場合に減少する交通需要量。

$y^{m}_{ij} = s^{*}_{ij}\,m_{ij}$：地点 ij 間の道路維持費用機会交通量。無渋滞交通量において，道路維持費用が料金加算されたときに減少する交通量。

$y^{e}_{ij} = s^{*}_{ij}\,p^{*}_{ij}$：地点 ij 間の最大超過交通量。

δ_{ijk}：地点 ij 間ルート k の混雑度。

δ_{ij}：地点 ij 間の混雑度。これは $\Sigma_k \delta_{ijk} \dfrac{y^{*}_{ijk}}{y^{*}_{ij}}$。

ε_{ij}：無経由通行状態における地点 ij 間の混雑度。

$\hat{t}_{ij}$：無経由通行状態における地点 ij 間の所要時間。

$\hat{t}^{e}_{ij}$：無経由通行状態における地点 ij 間の無渋滞所要時間を超える超過時間。

上肩付き ϕ：価格ゼロのケース。

上肩付き σ：社会厚生最大化のケース。

〔参考文献〕

（1） 鈴木武「3地点間単一ルートの交通量モデル」経営志林　第31巻第2号，1994年7月

〔註〕

（1） 参考文献（1）参照。

（2） 参考文献（1）参照。