

3地点間の単一ルート交通量モデル

鈴木, 武

(出版者 / Publisher)

法政大学経営学会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

The Hosei journal of business / 経営志林

(巻 / Volume)

31

(号 / Number)

2

(開始ページ / Start Page)

35

(終了ページ / End Page)

46

(発行年 / Year)

1994-07-30

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00003407>

3 地点間の単一ルート of 交通量モデル

鈴木 武

[I] はじめに

1. 本稿の構成

本稿では、三地点間の交通量を考察する。そのさい、ここでは各地点間を結ぶルートは、それぞれ1つしかない場合を取り上げる。

ある二地点間の交通量は、その地点間の通行により得られる便益と、負担すべき費用とに依存して決まってくる。道路利用の費用として、実際には、価格がゼロであるケースが普通である。この場合にも、個々の利用者はガソリン代のほかに、通行のための時間を負担している。それゆえ、費用として所要時間も明示的に考慮したい。

価格ゼロの状態が資源配分の上から最適とは限らない。社会厚生を最大化するためには、利用者にどのような負担を課すべきかを検討する必要がある。そこで本稿では、価格ゼロのケースと、社会厚生を最大化するケースについて、各ルートの均衡交通量を求めることにしたい。

始めにモデルの前提を述べた後、[II] で価格ゼロの場合、[III] で社会厚生を最大化する場合を述べ、[IV] で両者のまとめをする。また、最後に記号の一覧を載せた。

2. モデルの前提

ある3地点 A, B, C があり、それぞれを結ぶルートは単一である。ここで「地点 ij 間を通行」という場合の言葉の区別をしよう。どのルートを通過するかはともかくとして、起点および終点が地点 ij であるような交通の場合、「地点 ij 間の通行を目的とする交通」という。それに対して、地点 ij 間を他のルートを経由することなく直接通過する交通を、「ルート ij を通過する交通」と

呼ぶことにする。

ある単位期間において、地点 ij 間の通行を目的とする交通量を z_{ij} とする。この大きさは、地点 ij 間を通行することにより得られる便益の高い順から利用者を並べ、ある便益 p_{ij} を指定したとき、その大きさ以上の便益が得られる交通量である。この逆関数を取り、通常的需求関数の形で表現すると、

$$p_{ij} = D_{ij}(z_{ij})$$

二地点間を通行するには、時間がかかる。得られる便益の大きさは、当然、その所要時間をカバーするものである。それを明示的に表現するために、その二地点間を通行するさいに最低限許容できる所要時間を $\bar{t}_{ij}$ とする。また、単位時間当たりの機会費用は w であるとする。それらは各利用者に共通であると仮定する。

最低限許容できる所要時間も考慮に入れた場合の便益を P_{ij} とする。従って、便益関数は

$$P_{ij} = w\bar{t}_{ij} + D_{ij}(z_{ij})$$

と表現される。

次に、ルート ij を通過する交通量を考えよう。これは地点 ij 間の通行を目的とする交通量と一致するとは限らない。従って、この交通量を y_{ij} とする。

ルート ij を通過するために必要な費用を考えよう。まず道路建設をしなければならない。その投資累計を K_{ij} とする。単位期間に利用者全体に課せられる負担は、そのレンタルコストになる。借入利率、減価償却率等を含めた資本の割引率を r とする。従って、単位期間当たりのレンタルコストは rK_{ij} となる。

道路維持のための費用 (M_{ij}) も必要である。それは交通量に依存する。すなわち

$$M_{ij} = M_{ij}(y_{ij})$$

さらに所要時間も費用として明示的に表現しよう。所要時間 (t_{ij}) は交通量の大きさと、道幅等の走行の容易さに依存する。走行の容易さは、道路建設投資に比例すると考える。ただし本稿では、道路建設投資はある水準に固定されているとする。従って

$$t_{ij} = t_{ij}(y_{ij})$$

所要時間は渋滞が発生していないときには、どの交通量の大きさでも変わらないと想定してよい。渋滞が発生しない最大限の交通量を y_{ij}^* とし、『無渋滞最大交通量』あるいは『無渋滞交通量』とよぶ。そのときの所要時間を t_{ij}^* とし、『無渋滞所要時間』とよぶ。渋滞が発生すると、所要時間は交通量の増加により逓増すると考えられる。従って

$$\begin{aligned} t_{ij} &= t_{ij}(y_{ij}) : y_{ij} > y_{ij}^* \\ &= t_{ij}^* : y_{ij} \leq y_{ij}^* \end{aligned}$$

ただし

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial y_{ij}} > 0$$

$$t_{ij}(y_{ij}^*) = t_{ij}^*$$

と表現される。

ルート ij の混雑度を

$$\delta_{ij} = \frac{y_{ij} - y_{ij}^*}{y_{ij}^*}$$

と定義する。すなわち、無渋滞交通量を基準にして、それを超える交通量の割合を『混雑度』とする。

ここでは、地点 ij 間を通行するさいに最低限許容できる所要時間として、ルート ij の無渋滞所要時間を想定してよいだろう。従って、便益関数は

$$P_{ij} = wt_{ij}^* + D_{ij}(z_{ij})$$

と表現される。

[II] 価格ゼロの場合の交通量

1. 需給均衡式

価格ゼロのケースでは、需要者の負担は所要時間だけである。従って、供給関数は所要時間だけで決まる。所要時間に影響する交通量は通過交通量も含めるから、ルート ij の供給関数は

$$P_{ij} = wt_{ij}(y_{ij})$$

従って、地点 ij 間における需給均衡式は

$$wt_{ij}^* + D_{ij}(z_{ij}) = wt_{ij}(y_{ij})$$

となる。

需給均衡式を y_{ij}^* のまわりで 1 次近似をする。

$$\begin{aligned} wt_{ij}^* + D_{ij}(y_{ij}^*) + (z_{ij} - y_{ij}^*) D'_{ij}(y_{ij}^*) \\ = w \left(t_{ij}(y_{ij}^*) + (y_{ij} - y_{ij}^*) t'_{ij}(y_{ij}^*) \right) \end{aligned}$$

変形して

$$\begin{aligned} p_{ij}^* + (z_{ij} - y_{ij}^*) D'_{ij}(y_{ij}^*) \\ = w (y_{ij} - y_{ij}^*) t'_{ij}(y_{ij}^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{ij}^* - \frac{1}{s_{ij}^*} (z_{ij} - y_{ij}^*) \\ = w (y_{ij} - y_{ij}^*) t'_{ij}(y_{ij}^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{ij}^* p_{ij}^* - (z_{ij} - y_{ij}^*) \\ = (y_{ij} - y_{ij}^*) s_{ij}^* wt'_{ij}(y_{ij}^*) \end{aligned}$$

$$y_{ij}^* - z_{ij} + y_{ij}^* = \left(\frac{y_{ij}}{y_{ij}^*} - 1 \right) y_{ij}^*$$

$$y_{ij}^* z_{ij} + y_{ij}^* y_{ij} = (y_{ij}^* + y_{ij}^* + y_{ij}^*) y_{ij}^*$$

ここで

$$p_{ij}^* = D_{ij}(y_{ij}^*)$$

$$s_{ij}^* = - \frac{1}{D'_{ij}(y_{ij}^*)}$$

$$y_{ij}^* = s_{ij}^* p_{ij}^*$$

$$y_{ij}^* = s_{ij}^* wy_{ij}^* t'_{ij}(y_{ij}^*)$$

である。

p_{ij}^* はルート ij において無渋滞交通量を実現させ

るための価格であり、『無渋滞価格』とよぶ。 s_{ij}^* は無渋滞交通量において料金が1単位課されたときに減少する交通量である。 y_{ij}^* はルート ij の限界機会交通量である。すなわち、ルート ij の無渋滞交通量において、限界機会費用だけ料金が課されるとした場合に減少する交通需要量である。ここで限界機会費用とは、無渋滞交通量において1台追加することにより増加する所要時間の全車合計分を貨幣換算した金額である。さらに、 y_{ij}^* はルート ij の最大超過交通量である。

いま3地点がA, B, Cある。各地点間の需給均衡式から以下の式が導き出せる。

$$y_{AB}^* z_{AB} + y_{AB}^c y_{AB} = (y_{AB}^* + y_{AB}^c + y_{AB}^e) y_{AB}^* \quad (1)$$

$$y_{BC}^* z_{BC} + y_{BC}^c y_{BC} = (y_{BC}^* + y_{BC}^c + y_{BC}^e) y_{BC}^* \quad (2)$$

$$y_{CA}^* z_{CA} + y_{CA}^c y_{CA} = (y_{CA}^* + y_{CA}^c + y_{CA}^e) y_{CA}^* \quad (3)$$

2. 3地点間交通の所要時間

いま地点AB間の通行を目的とする交通量があるとする。それが直接ABを結ぶルートとCを経由していくルートとに分かれるとする。価格ゼロのケースでは、均衡状態において両ルートにおける所要時間は等しい。⁽¹⁾ 従って

$$t_{AB}(y_{AB}) = t_{BC}(y_{BC}) + t_{CA}(y_{CA})$$

が要求される。同様に地点BC間、地点CA間の交通に対しては

$$t_{BC}(y_{BC}) = t_{CA}(y_{CA}) + t_{AB}(y_{AB})$$

$$t_{CA}(y_{CA}) = t_{AB}(y_{AB}) + t_{BC}(y_{BC})$$

もし3つの方程式が同時に成り立つとしたら、各地点を結ぶ所要時間はゼロになる。従って、このようなことはあり得ない。

そこで、いま地点CA間の通行を目的とする交通は、Bを経由することなくルートCAを通行するものとする。このときには、上式の始めの2つの方程式が成り立つ。この場合にはルートCAの所要時間はゼロになり、AとCは同じ地点を示

す。このケースは2地点間交通量の問題であり、ここでは省略する。⁽²⁾

そこでさらに、地点CA間の他に地点BC間の通行を目的とする交通に対しても、他の地点を経由して行く交通はないと仮定する。そのさいには、始めの式だけが成り立つ。従って

$$t_{AB}(y_{AB}) = t_{BC}(y_{BC}) + t_{CA}(y_{CA})$$

一次近似して

$$\begin{aligned} & t_{AB}(y_{AB}^*) + (y_{AB} - y_{AB}^*) t'_{AB}(y_{AB}^*) \\ &= t_{BC}(y_{BC}^*) + (y_{BC} - y_{BC}^*) t'_{BC}(y_{BC}^*) \\ &+ t_{CA}(y_{CA}^*) + (y_{CA} - y_{CA}^*) t'_{CA}(y_{CA}^*) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & t'_{AB}(y_{AB}^*) y_{AB} - t'_{BC}(y_{BC}^*) y_{BC} - t'_{CA}(y_{CA}^*) y_{CA} \\ &= (t'_{AB} - t'_{BC} - t'_{CA}) - (t_{AB}^* - t_{BC}^* - t_{CA}^*) \quad (4) \end{aligned}$$

ここで

$$t_{ij}^* = y_{ij}^* t'_{ij}(y_{ij}^*)$$

t_{ij}^* はルート ij の限界所要時間合計であり、無渋滞交通量において1台追加することにより増加する所要時間の全車合計分である。

地点BC間の通行を目的とする交通に対しては、他の地点を経由して行く交通はないと仮定しているので

$$y_{BC} = (1 - \alpha_{AB}) z_{AB} + z_{BC}$$

ここで α_{AB} は、地点AB間を通行する目的の交通のうち、他のC地点を経由しないで直接ルートABを通行する交通量の割合である。 $y_{AB} = \alpha_{AB} z_{AB}$ であるから

$$z_{AB} + z_{BC} = y_{AB} + y_{BC} \quad (5)$$

同様に、地点CA間の仮定から

$$z_{AB} + z_{CA} = y_{AB} + y_{CA} \quad (6)$$

3. 方程式の解 (y_{AB}^*)

(1)から(6)の方程式を連立させて解く。ここでは、初めに y_{AB} を求める。(5)、(6)式をそれぞれ(2)、(3)式に代入して、

$$y_{BC}^* (y_{AB} + y_{BC} - z_{AB}) + y_{BC}^c y_{BC} \\ = (y_{BC}^* + y_{BC}^c + y_{BC}^e) y_{BC}^* \quad (7)$$

$$y_{CA}^* (y_{AB} + y_{CA} - z_{AB}) + y_{CA}^c y_{CA} \\ = (y_{CA}^* + y_{CA}^c + y_{CA}^e) y_{CA}^* \quad (8)$$

(7)式と(1)式から z_{AB} を消去して

$$y_{AB}^* y_{BC}^* (y_{AB} + y_{BC}) + y_{AB}^* y_{BC}^c y_{BC} \\ + y_{BC}^c y_{AB}^c y_{AB} \\ = (y_{AB}^* + y_{AB}^c + y_{AB}^e + y_{BC}^* + y_{BC}^c \\ + y_{BC}^e) y_{AB}^* y_{BC}^*$$

よって

$$y_{BC}^* (y_{AB}^* + y_{AB}^c) y_{AB} + y_{AB}^* (y_{BC}^* + y_{BC}^c) y_{BC} \\ = (y_{AB}^* + y_{AB}^c + y_{AB}^e + y_{BC}^* + y_{BC}^c \\ + y_{BC}^e) y_{AB}^* y_{BC}^* \quad (9)$$

同様に(8)式と(1)式から z_{AB} を消去して

$$y_{CA}^* (y_{AB}^* + y_{AB}^c) y_{AB} + y_{AB}^* (y_{CA}^* + y_{CA}^c) y_{CA} \\ = (y_{AB}^* + y_{AB}^c + y_{AB}^e + y_{CA}^* + y_{CA}^c \\ + y_{CA}^e) y_{AB}^* y_{CA}^* \quad (10)$$

(4), (9), (10)式から y_{BC} , y_{CA} を消去して

$$y_{AB}^* (y_{BC}^* + y_{BC}^c) (y_{CA}^* + y_{CA}^c) t_{AB}^* (y_{AB}^* y_{AB} \\ + y_{BC}^* (y_{AB}^* + y_{AB}^c) (y_{CA}^* + y_{CA}^c) t_{BC}^* (y_{BC}^* y_{AB} \\ + y_{CA}^* (y_{AB}^* + y_{AB}^c) (y_{BC}^* + y_{BC}^c) t_{CA}^* (y_{CA}^* y_{AB} \\ = y_{AB}^* (y_{BC}^* + y_{BC}^c) (y_{CA}^* + y_{CA}^c) \{ (t_{AB}^* - t_{BC}^* \\ - t_{CA}^*) - (t_{AB}^* - t_{BC}^* - t_{CA}^*) \} + (y_{AB}^* + y_{AB}^c \\ + y_{AB}^e + y_{BC}^* + y_{BC}^c + y_{BC}^e) y_{AB}^* t_{BC}^* (y_{CA}^* \\ + y_{CA}^c) + (y_{AB}^* + y_{AB}^c + y_{AB}^e + y_{CA}^* \\ + y_{CA}^c + y_{CA}^e) y_{AB}^* t_{CA}^* (y_{BC}^* + y_{BC}^c)$$

これを変形して

$$t_{AB}^* (y_{BC}^* + y_{BC}^c) (y_{CA}^* + y_{CA}^c) y_{AB} \\ + t_{BC}^* (y_{AB}^* + y_{AB}^c) (y_{CA}^* + y_{CA}^c) y_{AB} \\ + t_{CA}^* (y_{AB}^* + y_{AB}^c) (y_{BC}^* + y_{BC}^c) y_{AB} \\ = t_{AB}^* (y_{BC}^* + y_{BC}^c) (y_{CA}^* + y_{CA}^c) y_{AB}^* \\ + t_{BC}^* (y_{AB}^* + y_{AB}^c) (y_{CA}^* + y_{CA}^c) y_{AB}^* \\ + t_{CA}^* (y_{AB}^* + y_{AB}^c) (y_{BC}^* + y_{BC}^c) y_{AB}^* \\ + (y_{AB}^* + y_{BC}^* (y_{CA}^* + y_{CA}^c) t_{BC}^* y_{AB}^* \\ + (y_{AB}^* + y_{CA}^* (y_{BC}^* + y_{BC}^c) t_{CA}^* y_{AB}^* \\ - (y_{BC}^* + y_{BC}^c) (y_{CA}^* + y_{CA}^c) (t_{AB}^* - t_{BC}^* \\ - t_{CA}^*) y_{AB}^*$$

価格ゼロにおけるルート AB の混雑度を δ_{AB}^f とする。

$$\delta_{AB}^f = \frac{y_{AB}^f - y_{AB}^*}{y_{AB}^*}$$

各地点間の交通量がすべて他地点を経由することなく、直接それぞれの地点を通行する場合を想定しよう。そのような状態を『無経由通行状態』と呼ぶ。価格ゼロにおいて、この場合に生じるルート ij の混雑度を ϵ_{ij}^f とする。それは

$$\epsilon_{ij}^f = \frac{y_{ij}^f}{y_{ij}^* + y_{ij}^f}$$

と表現される。⁽³⁾

混雑度 δ_{AB}^f の分母、分子は次のように変形される。

$$\begin{aligned} \text{分母} &= t_{AB}^c (y_{BC}^* + y_{BC}^c) (y_{CA}^* + y_{CA}^c) \\ &\quad + t_{BC}^c (y_{AB}^* + y_{AB}^c) (y_{CA}^* + y_{CA}^c) \\ &\quad + t_{CA}^c (y_{AB}^* + y_{AB}^c) (y_{BC}^* + y_{BC}^c) \\ &= t_{AB}^c \frac{y_{BC}^c y_{CA}^c}{\epsilon_{BC}^f \epsilon_{CA}^f} + t_{BC}^c \frac{y_{AB}^c y_{CA}^c}{\epsilon_{AB}^f \epsilon_{CA}^f} \\ &\quad + t_{CA}^c \frac{y_{AB}^c y_{BC}^c}{\epsilon_{AB}^f \epsilon_{BC}^f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{分子} &= (y_{AB}^c + y_{BC}^c) (y_{CA}^* + y_{CA}^c) t_{BC}^c \\ &\quad + (y_{AB}^c + y_{CA}^c) (y_{BC}^* + y_{BC}^c) t_{CA}^c \\ &\quad - (y_{BC}^* + y_{BC}^c) (y_{CA}^* + y_{CA}^c) (t_{AB}^* \\ &\quad - t_{BC}^* - t_{CA}^*) \\ &= (y_{AB}^c + y_{BC}^c) t_{BC}^c \frac{y_{CA}^c}{\epsilon_{CA}^f} \\ &\quad + (y_{AB}^c + y_{CA}^c) t_{CA}^c \frac{y_{BC}^c}{\epsilon_{BC}^f} \\ &\quad - \frac{y_{BC}^c y_{CA}^c}{\epsilon_{BC}^f \epsilon_{CA}^f} (t_{AB}^* - t_{BC}^* - t_{CA}^*) \end{aligned}$$

分母、分子にそれぞれ $\epsilon_{AB}^f \epsilon_{BC}^f \epsilon_{CA}^f$ を掛ける。

$$\begin{aligned} \text{分母} &= \epsilon_{AB}^f t_{AB}^c y_{BC}^c y_{CA}^c + \epsilon_{BC}^f t_{BC}^c y_{AB}^c y_{CA}^c \\ &\quad + \epsilon_{CA}^f t_{CA}^c y_{AB}^c y_{BC}^c \\ &= \hat{t}_{AB}^c y_{BC}^c y_{CA}^c + \hat{t}_{BC}^c y_{AB}^c y_{CA}^c \\ &\quad + \hat{t}_{CA}^c y_{AB}^c y_{BC}^c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{分子} &= \epsilon_{AB}^f \epsilon_{BC}^f t_{BC}^c y_{CA}^c (y_{AB}^c + y_{BC}^c) \\ &\quad + \epsilon_{AB}^f \epsilon_{CA}^f t_{CA}^c y_{BC}^c (y_{AB}^c + y_{CA}^c) \\ &\quad - \epsilon_{AB}^f y_{BC}^c y_{CA}^c (t_{AB}^* - t_{BC}^* - t_{CA}^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_{AB}^f \hat{t}_{BC}^f y_{CA}^c (y_{AB}^a + y_{BC}^c) \\
&\quad + \epsilon_{AB}^f \hat{t}_{CA}^f y_{BC}^c (y_{AB}^a + y_{CA}^c) \\
&\quad - \epsilon_{AB}^f y_{BC}^c y_{CA}^c (\hat{t}_{AB}^* - \hat{t}_{BC}^* - \hat{t}_{CA}^*) \\
&= \epsilon_{AB}^f (\hat{t}_{AB}^c y_{BC}^c y_{CA}^c + \hat{t}_{BC}^f y_{AB}^a y_{CA}^c \\
&\quad + \hat{t}_{CA}^f y_{AB}^a y_{BC}^c) - \epsilon_{AB}^f y_{BC}^c y_{CA}^c (\hat{t}_{AB}^* \\
&\quad - \hat{t}_{BC}^* - \hat{t}_{CA}^* + \hat{t}_{AB}^f - \hat{t}_{BC}^f - \hat{t}_{CA}^f) \\
&= \epsilon_{AB}^f (\hat{t}_{AB}^c y_{BC}^c y_{CA}^c + \hat{t}_{BC}^f y_{AB}^a y_{CA}^c \\
&\quad + \hat{t}_{CA}^f y_{AB}^a y_{BC}^c) - \epsilon_{AB}^f y_{BC}^c y_{CA}^c (\hat{t}_{AB}^f \\
&\quad - \hat{t}_{BC}^f - \hat{t}_{CA}^f)
\end{aligned}$$

ここで

$$\hat{t}_{ij}^c = \epsilon_{ij}^f t_{ij}^f$$

$$\hat{t}_{ij}^f = t_{ij}^* + \hat{t}_{ij}^f$$

である。 $\hat{t}_{ij}^f$ は、価格ゼロの無経由通行状態におけるルート ij の所要時間である。また、 $\hat{t}_{ij}^f$ はそのときの無渋滞所要時間を超過する所要時間である。

ルート AB について、価格ゼロにおける現在想定している状態の混雑度が無経由通行状態の混雑度からどれほど乖離しているかを示す割合を Δ_{AB}^f とする。

$$\begin{aligned}
\Delta_{AB}^f &= \frac{\epsilon_{AB}^f - \delta_{AB}^f}{\epsilon_{AB}^f} \\
&= \frac{(\hat{t}_{AB}^f - \hat{t}_{BC}^f - \hat{t}_{CA}^f) y_{BC}^c y_{CA}^c}{\hat{t}_{AB}^c y_{BC}^c y_{CA}^c + \hat{t}_{BC}^f y_{AB}^a y_{CA}^c + \hat{t}_{CA}^f y_{AB}^a y_{BC}^c} \\
&= \frac{\hat{t}_{AB}^f - \hat{t}_{BC}^f - \hat{t}_{CA}^f}{\hat{t}_{AB}^c + \hat{t}_{BC}^f \frac{y_{AB}^a}{y_{BC}^c} + \hat{t}_{CA}^f \frac{y_{AB}^a}{y_{CA}^c}}
\end{aligned}$$

Δ_{AB}^f 分子は、無経由通行状態におけるルート AB の所要時間から、ルート BC およびルート CA の所要時間の合計を引いた値である。分母は無経由通行状態における各ルートの超過所要時間の和である。ただし、各ルートの超過所要時間はルート AB にあわせて修正されたものである。

以上をまとめると、 y_{AB}^f は

$$y_{AB}^f = (1 + \delta_{AB}^f) y_{AB}^*$$

$$\delta_{AB}^f = (1 - \Delta_{AB}^f) \epsilon_{AB}^f$$

$$\epsilon_{AB}^f = \frac{y_{AB}^a}{y_{AB}^* + y_{AB}^c}$$

$$\Delta_{AB}^f = \frac{\hat{t}_{AB}^f - \hat{t}_{BC}^f - \hat{t}_{CA}^f}{\hat{t}_{AB}^c + \hat{t}_{BC}^f \frac{y_{AB}^a}{y_{BC}^c} + \hat{t}_{CA}^f \frac{y_{AB}^a}{y_{CA}^c}}$$

と表現される。

従って

$$\hat{t}_{AB}^f \leq \hat{t}_{BC}^f + \hat{t}_{CA}^f$$

のときには、地点 AB 間を通行する交通は、他の地点を経由していくことなしに、直接 AB 間を通行する。すなわち、無経由通行状態におけるルート BC およびルート CA の所要時間の合計がルート AB の所要時間よりも長ければ、地点 AB を通行する交通は他の地点を経由しない。

4. 方程式の解 (続き)

(9)式から、ルート BC の交通量は

$$\begin{aligned}
y_{BC}^f &= \frac{(y_{AB}^a + y_{AB}^c + y_{BC}^c + y_{CA}^c + y_{AB}^c) y_{AB}^c y_{BC}^c - y_{AB}^c (y_{AB}^a + y_{AB}^c) y_{BC}^c}{y_{AB}^* (y_{BC}^* + y_{BC}^c)} \\
&= \left(1 + \frac{y_{AB}^a + y_{BC}^c - \delta_{AB}^f (y_{AB}^* + y_{AB}^c)}{y_{BC}^* + y_{BC}^c} \right) y_{BC}^*
\end{aligned}$$

混雑度は

$$\begin{aligned}
\delta_{BC}^f &= \frac{y_{AB}^c + y_{BC}^c - \delta_{AB}^f (y_{AB}^* + y_{AB}^c)}{y_{BC}^* + y_{BC}^c} \\
&= \epsilon_{BC}^f + (\epsilon_{AB}^f - \delta_{AB}^f) \frac{y_{AB}^* + y_{AB}^c}{y_{BC}^* + y_{BC}^c} \\
&= \epsilon_{BC}^f + (\epsilon_{AB}^f - \delta_{AB}^f) \frac{\epsilon_{BC}^f y_{AB}^c}{\epsilon_{AB}^f y_{BC}^c}
\end{aligned}$$

混雑度の乖離割合は

$$\begin{aligned}
\Delta_{BC}^f &= \frac{\epsilon_{BC}^f - \delta_{BC}^f}{\epsilon_{BC}^f} \\
&= - \frac{\epsilon_{AB}^f - \delta_{AB}^f}{\epsilon_{AB}^f} \frac{y_{AB}^c}{y_{BC}^c} \\
&= - \Delta_{AB}^f \frac{y_{AB}^c}{y_{BC}^c}
\end{aligned}$$

以上をまとめると、ルート BC の交通量 y_{BC}^f は

$$y_{BC}^f = (1 + \delta_{BC}^f) y_{BC}^*$$

$$\delta_{BC}^f = (1 - \Delta_{BC}^f) \epsilon_{BC}^f$$

$$\epsilon_{BC}^f = \frac{y_{BC}^o}{y_{BC}^* + y_{BC}^o}$$

$$\Delta_{BC}^f = -\Delta_{AB}^f \frac{y_{AB}^o}{y_{BC}^o}$$

と表現される。

同様に、ルート CA の交通量 y_{CA}^f は

$$y_{CA}^f = (1 + \delta_{CA}^f) y_{CA}^*$$

$$\delta_{CA}^f = (1 - \Delta_{CA}^f) \epsilon_{CA}^f$$

$$\epsilon_{CA}^f = \frac{y_{CA}^o}{y_{CA}^* + y_{CA}^o}$$

$$\Delta_{CA}^f = -\Delta_{AB}^f \frac{y_{AB}^o}{y_{CA}^o}$$

地点 AB 間の通行を目的とする交通量 z_{AB}^f は, (1) 式から

$$\begin{aligned} z_{AB}^f &= \frac{(y_{AB}^* + y_{AB}^o + y_{AB}^f) y_{AB}^* - y_{AB}^o (1 + \delta_{AB}^f) y_{AB}^*}{y_{AB}^*} \\ &= y_{AB}^* + y_{AB}^o - \delta_{AB}^f y_{AB}^o \\ &= (1 + \epsilon_{AB}^f) y_{AB}^* + (\epsilon_{AB}^f - \delta_{AB}^f) y_{AB}^o \\ &= (1 + \delta_{AB}^f) y_{AB}^* + (\epsilon_{AB}^f - \delta_{AB}^f) (y_{AB}^* + y_{AB}^o) \\ &= y_{AB}^* + \frac{\epsilon_{AB}^f - \delta_{AB}^f}{\epsilon_{AB}^f} \epsilon_{AB}^f (y_{AB}^* + y_{AB}^o) \\ &= y_{AB}^* + \Delta_{AB}^f y_{AB}^o \end{aligned}$$

従って、地点 AB 間を目的とする交通量のうち、他地点を経由しないで直接ルート AB を通行する場合は

$$\begin{aligned} \alpha_{AB}^f &= \frac{y_{AB}^f}{z_{AB}^f} \\ &= \frac{y_{AB}^f}{y_{AB}^* + \Delta_{AB}^f y_{AB}^o} \end{aligned}$$

地点 BC 間の通行を目的とする交通量 z_{BC}^f は, (5) 式から

$$\begin{aligned} z_{BC}^f &= y_{AB}^f + y_{BC}^f - z_{AB}^f \\ &= y_{BC}^f - (\epsilon_{AB}^f - \delta_{AB}^f) (y_{AB}^* + y_{AB}^o) \\ &= y_{BC}^f - \Delta_{AB}^f y_{AB}^o \\ &= y_{BC}^f + \Delta_{BC}^f y_{BC}^o \end{aligned}$$

同様に、地点 CA 間の通行を目的とする交通量 z_{CA}^f は, (6)式から

$$\begin{aligned} z_{CA}^f &= y_{CA}^f - (\epsilon_{AB}^f - \delta_{AB}^f) (y_{AB}^* + y_{AB}^o) \\ &= y_{CA}^f - \Delta_{AB}^f y_{AB}^o \\ &= y_{CA}^f + \Delta_{CA}^f y_{CA}^o \end{aligned}$$

[III] 社会厚生最大化の場合の交通量

1. 需給均衡式

社会厚生を最大化する場合の供給関数は、以下の式で表される限界費用関数になる。従って、ルート ij における供給関数は

$$P_{ij} = wt_{ij}(y_{ij}) + wy_{ij} t'_{ij}(y_{ij}) + M'_{ij}$$

である。よって、地点 ij 間における需給均衡式は

$$\begin{aligned} wt_{ij}^* + D_{ij}(z_{ij}) &= wt_{ij}(y_{ij}) \\ &\quad + wy_{ij} t'_{ij}(y_{ij}) + M'_{ij} \end{aligned}$$

ここで、 $M'_{ij} = m_{ij}$ (一定) とする。

需給均衡式を y_{ij}^* のまわりで 1 次近似をする。

$$\begin{aligned} wt_{ij}^* + D_{ij}(y_{ij}^*) + (z_{ij} - y_{ij}^*) D'_{ij}(y_{ij}^*) \\ = w \left(t_{ij}(y_{ij}^*) + (y_{ij} - y_{ij}^*) t'_{ij}(y_{ij}^*) \right) \\ + wy_{ij} t'_{ij}(y_{ij}) + m_{ij} \end{aligned}$$

これを变形すると

$$\begin{aligned} y_{ij}^* z_{ij} + (y_{ij}^o + y_{ij}^f) y_{ij} \\ = (y_{ij}^* + y_{ij}^o + y_{ij}^f - y_{ij}^m) y_{ij}^* \end{aligned}$$

ここで、

$$y_{ij}^f = s_{ij}^* wy_{ij}^* t'_{ij}(y_{ij})$$

$$y_{ij}^m = s_{ij}^* m_{ij}$$

いま 3 地点 A, B, C がある。従って、各地点間の需給均衡式から以下の式が導き出せる。

$$\begin{aligned} y_{AB}^* z_{AB} + (y_{AB}^o + y_{AB}^f) y_{AB} \\ = (y_{AB}^* + y_{AB}^o + y_{AB}^f - y_{AB}^m) y_{AB}^* \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} y_{BC}^* z_{BC} + (y_{BC}^o + y_{BC}^f) y_{BC} \\ = (y_{BC}^* + y_{BC}^o + y_{BC}^f - y_{BC}^m) y_{BC}^* \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} y_{CA}^* z_{CA} + (y_{CA}^o + y_{CA}^f) y_{CA} \\ = (y_{CA}^* + y_{CA}^o + y_{CA}^f - y_{CA}^m) y_{CA}^* \end{aligned} \quad (13)$$

2. 3地点間交通の限界費用

いま地点 AB 間の通行を目的とする交通量があるとする。それが直接 AB を結ぶルートと C を経由していくルートとに分かれるとする。社会厚生最大化のケースでは、均衡状態において両ルートにおける時間に換算した限界費用が等しい。⁽⁴⁾ 従って

$$\begin{aligned} & t_{AB}(y_{AB}) + y_{AB} t'_{AB}(y_{AB}) + \frac{1}{W} m_{AB} \\ &= t_{BC}(y_{BC}) + y_{BC} t'_{BC}(y_{BC}) + \frac{1}{W} m_{BC} \\ &+ t_{CA}(y_{CA}) + y_{CA} t'_{CA}(y_{CA}) + \frac{1}{W} m_{CA} \end{aligned}$$

が要求される。同様に、地点 BC 間の交通に対しては

$$\begin{aligned} & t_{BC}(y_{BC}) + y_{BC} t'_{BC}(y_{BC}) + \frac{1}{W} m_{BC} \\ &= t_{CA}(y_{CA}) + y_{CA} t'_{CA}(y_{CA}) + \frac{1}{W} m_{CA} \\ &+ t_{AB}(y_{AB}) + y_{AB} t'_{AB}(y_{AB}) + \frac{1}{W} m_{AB} \end{aligned}$$

地点 CA 間の交通に対しては

$$\begin{aligned} & t_{CA}(y_{CA}) + y_{CA} t'_{CA}(y_{CA}) + \frac{1}{W} m_{CA} \\ &= t_{AB}(y_{AB}) + y_{AB} t'_{AB}(y_{AB}) + \frac{1}{W} m_{AB} \\ &+ t_{BC}(y_{BC}) + y_{BC} t'_{BC}(y_{BC}) + \frac{1}{W} m_{BC} \end{aligned}$$

もし3つの方程式が同時に成り立つとしたら、各地点を結ぶ限界費用はゼロになる。従って、このようなことはあり得ない。そこで、いま地点 C A 間の通行を目的とする交通は、B を経由することなく直接ルート CA を通行するものとする。このときには、上式の始めの2つの方程式が成り立つ。この場合にはルート CA の限界費用はゼロになり、A と C は同じ地点を示す。このケースは2地点間交通量の問題であり、省略する。⁽⁵⁾

そこでさらに、地点 CA 間の他の地点 BC 間の通行を目的とする交通に対しても、他の地点を経

由して行く交通はないと仮定する。そのさいには、始めの式だけが成り立つ。従って

$$\begin{aligned} & t_{AB}(y_{AB}) + y_{AB} t'_{AB}(y_{AB}) + \frac{1}{W} m_{AB} \\ &= t_{BC}(y_{BC}) + y_{BC} t'_{BC}(y_{BC}) + \frac{1}{W} m_{BC} \\ &+ t_{CA}(y_{CA}) + y_{CA} t'_{CA}(y_{CA}) + \frac{1}{W} m_{CA} \end{aligned}$$

一次近似して

$$\begin{aligned} & t_{AB}(y_{AB}^*) + (y_{AB} - y_{AB}^*) t'_{AB}(y_{AB}^*) \\ &+ y_{AB} t'_{AB}(y_{AB}) + \frac{1}{W} m_{AB} \\ &= t_{BC}(y_{BC}^*) + (y_{BC} - y_{BC}^*) t'_{BC}(y_{BC}^*) \\ &+ y_{BC} t'_{BC}(y_{BC}) + \frac{1}{W} m_{BC} + t_{CA}(y_{CA}^*) \\ &+ (y_{CA} - y_{CA}^*) t'_{CA}(y_{CA}^*) \\ &+ y_{CA} t'_{CA}(y_{CA}) + \frac{1}{W} m_{CA} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & \{ t'_{AB}(y_{AB}^*) + t'_{AB}(y_{AB}) \} y_{AB} \\ & - \{ t'_{BC}(y_{BC}^*) + t'_{BC}(y_{BC}) \} y_{BC} \\ & - \{ t'_{CA}(y_{CA}^*) + t'_{CA}(y_{CA}) \} y_{CA} \\ &= (t_{AB}^* - t_{BC}^* - t_{CA}^*) - (t_{AB}^* - t_{BC}^* - t_{CA}^*) \\ & - \frac{1}{W} (m_{AB} - m_{BC} - m_{CA}) \end{aligned} \quad (14)$$

地点 BC 間の通行を目的とする交通に対しては、他の地点を経由して行く交通はないと仮定しているので

$$z_{AB} + z_{BC} = y_{AB} + y_{BC} \quad (15)$$

同様に、地点 CA 間の仮定から

$$z_{AB} + z_{CA} = y_{AB} + y_{CA} \quad (16)$$

3. 方程式の解 (y_{AB}^*)

(11)から(16)の方程式を連立させて解く。記号を簡単にするために、以下のようにおく。

$$y_{ij}^* = y_{ij}^e + y_{ij}^x$$

$$y_{ij}^{*cm} = y_{ij}^* + y_{ij}^e + y_{ij}^e - y_{ij}^m$$

$$y_{ij}^{*cy} = y_{ij}^* + y_{ij}^c + y_{ij}^y$$

$$y_{ij}^{*cm} = y_{ij}^c - y_{ij}^y - y_{ij}^m$$

$$y_{ij}^{*ecm} = y_{ij}^{*cy} + y_{ij}^{eym}$$

$$t_{ij}^{*y} = t_{ij}^y (y_{ij}^*) + t_{ij}^y (y_{ij})$$

$$t_{ij}^{cy} = t_{ij}^{*y} y_{ij}^*$$

$$t_{ABC}^c = t_{AB}^c - t_{BC}^c - t_{CA}^c$$

$$t_{ABC}^* = t_{AB}^* - t_{BC}^* - t_{CA}^*$$

$$m_{ABC} = m_{AB} - m_{BC} - m_{CA}$$

(15), (16)式をそれぞれ(12), (13)式に代入して,

$$y_{BC}^* (y_{AB} + y_{BC} - z_{AB}) + y_{BC}^{cy} y_{BC} = y_{BC}^{*ecm} y_{BC}^* \quad (17)$$

$$y_{CA}^* (y_{AB} + y_{CA} - z_{AB}) + y_{CA}^{cy} y_{CA} = y_{CA}^{*ecm} y_{CA}^* \quad (18)$$

(17)式と(11)式から z_{AB} を消去して

$$y_{BC}^* y_{AB}^{*cy} y_{AB} + y_{AB}^* y_{BC}^{cy} y_{BC} = (y_{AB}^{*ecm} + y_{BC}^{*ecm}) y_{AB}^* y_{BC}^* \quad (19)$$

同様に(8)式と(1)式から z_{AB} を消去して

$$y_{CA}^* y_{AB}^{*cy} y_{AB} + y_{AB}^* y_{CA}^{cy} y_{CA} = (y_{AB}^{*ecm} + y_{CA}^{*ecm}) y_{AB}^* y_{CA}^* \quad (20)$$

(14), (19), (20)式から y_{BC} , y_{CA} を消去して

$$\begin{aligned} & y_{AB}^* y_{BC}^{*cy} y_{CA}^{*cy} t_{AB}^{*y} y_{AB} + y_{BC}^* y_{AB}^{*cy} y_{CA}^{*cy} t_{BC}^{*y} y_{AB} \\ & + y_{CA}^* y_{AB}^{*cy} y_{BC}^{*cy} t_{CA}^{*y} y_{AB} \\ & = y_{AB}^* y_{BC}^{*cy} y_{CA}^{*cy} \left(t_{ABC}^c - t_{ABC}^* - \frac{1}{W} m_{ABC} \right) \\ & + (y_{AB}^{*ecm} + y_{BC}^{*ecm}) y_{AB}^* y_{BC}^* y_{CA}^{*cy} t_{BC}^{*y} \\ & + (y_{AB}^{*ecm} + y_{CA}^{*ecm}) y_{AB}^* y_{CA}^* y_{BC}^{*cy} t_{CA}^{*y} \end{aligned}$$

これを變形して

$$\begin{aligned} & t_{AB}^{cy} y_{BC}^{*cy} y_{CA}^{*cy} y_{AB} + t_{BC}^{cy} y_{AB}^{*cy} y_{CA}^{*cy} y_{AB} \\ & + t_{CA}^{cy} y_{AB}^{*cy} y_{BC}^{*cy} y_{AB} \\ & = t_{BC}^{cy} y_{CA}^{*cy} (y_{AB}^{*ecm} + y_{BC}^{*ecm}) y_{AB}^* \\ & + t_{CA}^{cy} y_{BC}^{*cy} (y_{AB}^{*ecm} + y_{CA}^{*ecm}) y_{AB}^* \\ & + \left(t_{ABC}^c - t_{ABC}^* - \frac{1}{W} m_{ABC} \right) y_{BC}^{*cy} y_{CA}^{*cy} y_{AB}^* \end{aligned}$$

ここで社会厚生最大化の場合におけるルート A B の混雑度を δ_{AB}^* とする。

$$\delta_{AB}^* = \frac{y_{AB}^c - y_{AB}^*}{y_{AB}^*}$$

さらに, 無経由通行状態で社会厚生を最大化する場合に生じるルート ij の混雑度を ϵ_{ij}^* とする。それは

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{y_{ij}^c - y_{ij}^y - y_{ij}^m}{y_{ij}^* + y_{ij}^c + y_{ij}^y}$$

と表現される。

混雑度 δ_{AB}^* の分母, 分子は

$$\begin{aligned} \text{分母} &= t_{AB}^{cy} y_{BC}^{*cy} y_{CA}^{*cy} + t_{BC}^{cy} y_{AB}^{*cy} y_{CA}^{*cy} \\ &+ t_{CA}^{cy} y_{AB}^{*cy} y_{BC}^{*cy} \\ &= t_{AB}^{cy} \frac{y_{BC}^{eym} y_{CA}^{eym}}{\epsilon_{BC}^* \epsilon_{CA}^*} + t_{BC}^{cy} \frac{y_{CA}^{eym} y_{AB}^{eym}}{\epsilon_{CA}^* \epsilon_{AB}^*} \\ &+ t_{CA}^{cy} \frac{y_{AB}^{eym} y_{BC}^{eym}}{\epsilon_{AB}^* \epsilon_{BC}^*} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{分子} &= t_{BC}^{cy} y_{CA}^{*cy} (y_{AB}^{*ecm} + y_{BC}^{*ecm}) \\ &+ t_{CA}^{cy} y_{BC}^{*cy} (y_{AB}^{*ecm} + y_{CA}^{*ecm}) \\ &+ \left(t_{ABC}^c - t_{ABC}^* - \frac{1}{W} m_{ABC} \right) y_{BC}^{*cy} y_{CA}^{*cy} \\ &- (t_{AB}^{cy} y_{BC}^{*cy} y_{CA}^{*cy} + t_{BC}^{cy} y_{AB}^{*cy} y_{CA}^{*cy} \\ &+ t_{CA}^{cy} y_{AB}^{*cy} y_{BC}^{*cy}) \\ &= t_{BC}^{cy} y_{CA}^{*cy} (y_{AB}^{eym} + y_{BC}^{*ecm}) \\ &+ t_{CA}^{cy} y_{BC}^{*cy} (y_{AB}^{eym} + y_{CA}^{*ecm}) + \left(t_{ABC}^c \right. \\ &- t_{ABC}^* - \frac{1}{W} m_{ABC} - t_{AB}^{cy} \left. \right) y_{BC}^{*cy} y_{CA}^{*cy} \\ &= t_{BC}^{cy} \frac{y_{CA}^{eym}}{\epsilon_{CA}^*} (y_{AB}^{eym} + y_{BC}^{*ecm}) \\ &+ t_{CA}^{cy} \frac{y_{BC}^{eym}}{\epsilon_{BC}^*} (y_{AB}^{eym} + y_{CA}^{*ecm}) + \left(t_{ABC}^c \right. \\ &- t_{ABC}^* - \frac{1}{W} m_{ABC} - t_{AB}^{cy} \left. \right) \frac{y_{BC}^{eym} y_{CA}^{eym}}{\epsilon_{BC}^* \epsilon_{CA}^*} \end{aligned}$$

分母, 分子にそれぞれ $\epsilon_{AB}^* \epsilon_{BC}^* \epsilon_{CA}^*$ を掛ける。

$$\begin{aligned} \text{分母} &= \epsilon_{AB}^* t_{AB}^{cy} y_{BC}^{eym} y_{CA}^{eym} + \epsilon_{BC}^* t_{BC}^{cy} y_{AB}^{eym} y_{CA}^{eym} \\ &+ \epsilon_{CA}^* t_{CA}^{cy} y_{AB}^{eym} y_{BC}^{eym} \\ &= \hat{t}_{AB}^{cy} y_{BC}^{eym} y_{CA}^{eym} + \hat{t}_{BC}^{cy} y_{AB}^{eym} y_{CA}^{eym} \\ &+ \hat{t}_{CA}^{cy} y_{AB}^{eym} y_{BC}^{eym} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{分子} &= \varepsilon_{AB}^{\sigma} \varepsilon_{BC}^{\sigma} t_{BC}^{cy} y_{CA}^{sym} (y_{AB}^{sym} + y_{BC}^{*sym}) \\
&\quad + \varepsilon_{AB}^{\sigma} \varepsilon_{CA}^{\sigma} t_{CA}^{cy} y_{BC}^{sym} (y_{AB}^{sym} + y_{CA}^{*sym}) \\
&\quad + \left(t_{ABC}^c - t_{ABC}^* - \frac{1}{W} m_{ABC} - t_{AB}^{cy} \right) \varepsilon_{AB}^{\sigma} y_{BC}^{sym} y_{CA}^{sym} \\
&= \varepsilon_{AB}^{\sigma} \hat{t}_{BC}^{\sigma\sigma} y_{CA}^{sym} (y_{AB}^{sym} + y_{BC}^{*sym}) \\
&\quad + \varepsilon_{AB}^{\sigma} \hat{t}_{CA}^{\sigma\sigma} y_{BC}^{sym} (y_{AB}^{sym} + y_{CA}^{*sym}) \\
&\quad + \left(t_{ABC}^c - t_{ABC}^* - \frac{1}{W} m_{ABC} - t_{AB}^{cy} \right) \varepsilon_{AB}^{\sigma} y_{BC}^{sym} y_{CA}^{sym} \\
&= \varepsilon_{AB}^{\sigma} (\hat{t}_{AB}^{\sigma\sigma} y_{BC}^{sym} y_{CA}^{sym} + \hat{t}_{BC}^{\sigma\sigma} y_{AB}^{sym} y_{CA}^{sym} \\
&\quad + \hat{t}_{CA}^{\sigma\sigma} y_{AB}^{sym} y_{BC}^{sym}) + \varepsilon_{AB}^{\sigma} \left(t_{ABC}^c - t_{ABC}^* \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{W} m_{ABC} - t_{AB}^{cy} - \hat{t}_{AB}^{\sigma\sigma} + \hat{t}_{BC}^{\sigma\sigma} \right. \\
&\quad \left. + \hat{t}_{CA}^{\sigma\sigma} \right) y_{BC}^{sym} y_{CA}^{sym} + \hat{t}_{BC}^{\sigma\sigma} y_{CA}^{sym} y_{BC}^{cy} \\
&\quad + \hat{t}_{CA}^{\sigma\sigma} y_{BC}^{sym} y_{CA}^{cy} \\
&= \varepsilon_{AB}^{\sigma} (\hat{t}_{AB}^{\sigma\sigma} y_{BC}^{sym} y_{CA}^{sym} + \hat{t}_{BC}^{\sigma\sigma} y_{AB}^{sym} y_{CA}^{sym} \\
&\quad + \hat{t}_{CA}^{\sigma\sigma} y_{AB}^{sym} y_{BC}^{sym}) + \varepsilon_{AB}^{\sigma} \left(t_{ABC}^c - t_{ABC}^* \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{W} m_{ABC} - t_{AB}^{cy} - \hat{t}_{AB}^{\sigma\sigma} + \hat{t}_{BC}^{\sigma\sigma} \right. \\
&\quad \left. + \hat{t}_{CA}^{\sigma\sigma} \right) y_{BC}^{sym} y_{CA}^{sym} + (t_{BC}^{cy} + t_{CA}^{cy}) y_{BC}^{sym} y_{CA}^{sym}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\hat{t}_{ij}^{\sigma\sigma} &= \varepsilon_{ij}^{\sigma} t_{ij}^{cy} \\
&= \varepsilon_{ij}^{\sigma} y_{ij}^* \left(t_{ij}'(y_{ij}) + t_{ij}(y_{ij}) \right) \\
&\simeq 2 \hat{t}_{ij}^{\sigma\sigma}
\end{aligned}$$

$$\hat{t}_{ij} = t_{ij}^* + \hat{t}_{ij}^{\sigma\sigma}$$

である。 $\hat{t}_{ij}^{\sigma\sigma}$ は、社会厚生最大化の場合の無経由通行状態におけるルート ij の所要時間である。また、 $\hat{t}_{ij}^{\sigma\sigma}$ はそのときの無渋滞所要時間を超過する所要時間である。

ルート AB について、社会厚生最大化の場合における現在想定している状態の混雑度が無経由通行状態の混雑度からどれほど乖離しているかを示す場合を Δ_{AB}^{σ} とする。

$$\Delta_{AB}^{\sigma} = \frac{\varepsilon_{AB}^{\sigma} - \delta_{AB}^{\sigma}}{\varepsilon_{AB}^{\sigma}}$$

Δ_{AB}^{σ} の分母、分子は

$$\begin{aligned}
\text{分母} &= \hat{t}_{AB}^{\sigma\sigma} y_{BC}^{sym} y_{CA}^{sym} + \hat{t}_{BC}^{\sigma\sigma} y_{AB}^{sym} y_{CA}^{sym} + \hat{t}_{CA}^{\sigma\sigma} y_{AB}^{sym} y_{BC}^{sym} \\
&\simeq 2 (\hat{t}_{AB}^{\sigma\sigma} y_{BC}^{sym} y_{CA}^{sym} + \hat{t}_{BC}^{\sigma\sigma} y_{AB}^{sym} y_{CA}^{sym} \\
&\quad + \hat{t}_{CA}^{\sigma\sigma} y_{AB}^{sym} y_{BC}^{sym})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\text{分子}}{y_{BC}^{sym} y_{CA}^{sym}} &= -t_{ABC}^c + t_{ABC}^* + \frac{1}{W} m_{ABC} + t_{AB}^{cy} \\
&\quad + \hat{t}_{AB}^{\sigma\sigma} - \hat{t}_{BC}^{\sigma\sigma} - \hat{t}_{CA}^{\sigma\sigma} - t_{BC}^{cy} - t_{CA}^{cy} \\
&= (t_{ABC}^* + \hat{t}_{AB}^{\sigma\sigma} - \hat{t}_{BC}^{\sigma\sigma} - \hat{t}_{CA}^{\sigma\sigma}) \\
&\quad + \left((1 + \varepsilon_{AB}^{\sigma}) t_{AB}' + (1 + \varepsilon_{BC}^{\sigma}) t_{BC}' \right. \\
&\quad \left. + (1 + \varepsilon_{CA}^{\sigma}) t_{CA}' \right) + \frac{1}{W} m_{ABC} \\
&= \left(t_{AB}^* + \hat{t}_{AB}^{\sigma\sigma} + (1 + \varepsilon_{AB}^{\sigma}) y_{AB}^* t_{AB}'(y_{AB}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{W} m_{AB} \right) - \left(t_{BC}^* + \hat{t}_{BC}^{\sigma\sigma} + (1 + \varepsilon_{BC}^{\sigma}) y_{BC}^* t_{BC}'(y_{BC}) + \frac{1}{W} m_{BC} \right) \\
&\quad - \left(t_{CA}^* + \hat{t}_{CA}^{\sigma\sigma} + (1 + \varepsilon_{CA}^{\sigma}) y_{CA}^* t_{CA}'(y_{CA}) + \frac{1}{W} m_{CA} \right) \\
&= \left(t_{AB}(y_{AB}) + y_{AB} t_{AB}'(y_{AB}) + \frac{1}{W} m_{AB} \right) \\
&\quad - \left(t_{BC}(y_{BC}) + y_{BC} t_{BC}'(y_{BC}) + \frac{1}{W} m_{BC} \right) \\
&\quad - \left(t_{CA}(y_{CA}) + y_{CA} t_{CA}'(y_{CA}) + \frac{1}{W} m_{CA} \right) \\
&= MC_{AB}^{\sigma} - MC_{BC}^{\sigma} - MC_{CA}^{\sigma}
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
\Delta_{AB}^{\sigma} &= \frac{(MC_{AB}^{\sigma} - MC_{BC}^{\sigma} - MC_{CA}^{\sigma}) y_{BC}^{sym} y_{CA}^{sym}}{2 (\hat{t}_{AB}^{\sigma\sigma} y_{BC}^{sym} y_{CA}^{sym} + \hat{t}_{BC}^{\sigma\sigma} y_{AB}^{sym} y_{CA}^{sym} + \hat{t}_{CA}^{\sigma\sigma} y_{AB}^{sym} y_{BC}^{sym})} \\
&= \frac{MC_{AB}^{\sigma} - MC_{BC}^{\sigma} - MC_{CA}^{\sigma}}{2 \left(\hat{t}_{AB}^{\sigma\sigma} + \hat{t}_{BC}^{\sigma\sigma} \frac{y_{AB}^{sym}}{y_{BC}^{sym}} + \hat{t}_{CA}^{\sigma\sigma} \frac{y_{AB}^{sym}}{y_{CA}^{sym}} \right)}
\end{aligned}$$

Δ_{AB}^{σ} の分子は、無経由通行状態におけるルート AB の時間換算した限界費用から、ルート BC およびルート CA の時間換算した限界費用の合計を引いた値である。分母は無経由通行状態における各ルートの超過所要時間の和の2倍である。ただし、各ルートの超過所要時間はルート AB にあわせて修正されたものである。

以上をまとめると、 y_{AB}^{σ} は

$$y_{AB}^* = (1 + \delta_{AB}^*) y_{AB}^*$$

$$\delta_{AB}^* = (1 - \Delta_{AB}^*) \epsilon_{AB}^*$$

$$\epsilon_{AB}^* = \frac{y_{AB}^* - y_{AB}^{ym} - y_{AB}^{m}}{y_{AB}^* + y_{AB}^{cy} + y_{AB}^{ym}}$$

$$\Delta_{AB}^* = \frac{MC_{AB}^* - MC_{BC}^* - MC_{CA}^*}{2 \left(\hat{t}_{AB}^{\epsilon\sigma} + \hat{t}_{BC}^{\epsilon\sigma} \frac{y_{AB}^{ym}}{y_{BC}^{ym}} + \hat{t}_{CA}^{\epsilon\sigma} \frac{y_{AB}^{ym}}{y_{CA}^{ym}} \right)}$$

と表現される。

従って

$$MC_{AB}^* \leq MC_{BC}^* + MC_{CA}^*$$

のときには、地点 AB 間を通行する交通は、他の地点を経由していくことなしに、直接ルート AB を通行する。すなわち、無経由通行状態におけるルート BC およびルート CA の時間換算した限界費用の合計がルート AB の時間換算した限界費用よりも長ければ、地点 AB を通行する交通は他の地点を経由しない。

4. 方程式の解（続き）

(19)式から、ルート BC の交通量は

$$\begin{aligned} y_{BC}^* &= \frac{(y_{AB}^{*cm} + y_{BC}^{*cm}) y_{AB}^* y_{BC}^* - y_{BC}^* y_{AB}^{*cy} (1 + \delta_{AB}^*) y_{AB}^*}{y_{AB}^* y_{BC}^{*cy}} \\ &= \left(1 + \frac{y_{AB}^{ym} + y_{BC}^{ym} - \delta_{AB}^* y_{AB}^{*cy}}{y_{BC}^{*cy}} \right) y_{BC}^* \end{aligned}$$

混雑度は

$$\begin{aligned} \delta_{BC}^* &= \frac{y_{AB}^{ym} + y_{BC}^{ym} - \delta_{AB}^* y_{AB}^{*cy}}{y_{BC}^{*cy}} \\ &= \epsilon_{BC}^* + (\epsilon_{AB}^* - \delta_{AB}^*) \frac{y_{AB}^{*cy}}{y_{BC}^{*cy}} \\ &= \epsilon_{BC}^* + (\epsilon_{AB}^* - \delta_{AB}^*) \frac{\epsilon_{BC}^* y_{AB}^{ym}}{\epsilon_{AB}^* y_{BC}^{ym}} \end{aligned}$$

混雑度の乖離割合は

$$\begin{aligned} \Delta_{BC}^* &= \frac{\epsilon_{BC}^* - \delta_{BC}^*}{\epsilon_{BC}^*} \\ &= - \frac{\epsilon_{AB}^* - \delta_{AB}^*}{\epsilon_{AB}^*} \frac{y_{AB}^{ym}}{y_{BC}^{ym}} \end{aligned}$$

$$= - \Delta_{AB}^* \frac{y_{AB}^{ym}}{y_{BC}^{ym}}$$

以上をまとめると、ルート BC の交通量 y_{BC}^* は

$$y_{BC}^* = (1 + \delta_{BC}^*) y_{BC}^*$$

$$\delta_{BC}^* = (1 - \Delta_{BC}^*) \epsilon_{BC}^*$$

$$\epsilon_{BC}^* = \frac{y_{BC}^{ym}}{y_{BC}^{*cy}}$$

$$\Delta_{BC}^* = - \Delta_{AB}^* \frac{y_{AB}^{ym}}{y_{BC}^{ym}}$$

と表現される。

同様に、ルート CA の交通量 y_{CA}^* は

$$y_{CA}^* = (1 + \delta_{CA}^*) y_{CA}^*$$

$$\delta_{CA}^* = (1 - \Delta_{CA}^*) \epsilon_{CA}^*$$

$$\epsilon_{CA}^* = \frac{y_{CA}^{ym}}{y_{CA}^{*cy}}$$

$$\Delta_{CA}^* = - \Delta_{AB}^* \frac{y_{AB}^{ym}}{y_{CA}^{ym}}$$

地点 AB 間の通行を目的とする交通量 z_{AB}^* は、(11)式から、

$$\begin{aligned} z_{AB}^* &= \frac{y_{AB}^{*cm} y_{AB}^* - (y_{AB}^{*cm} + y_{BC}^{*cm}) (1 + \delta_{AB}^*) y_{AB}^*}{y_{AB}^*} \\ &= y_{AB}^* + y_{AB}^{ym} - \delta_{AB}^* (y_{AB}^* + y_{AB}^{ym}) \\ &= y_{AB}^* - (1 + \delta_{AB}^*) y_{AB}^* + y_{AB}^* + y_{AB}^{ym} \\ &\quad - \delta_{AB}^* (y_{AB}^* + y_{AB}^{ym}) \\ &= y_{AB}^* + y_{AB}^{ym} - \delta_{AB}^* y_{AB}^{*cy} \\ &= y_{AB}^* + \Delta_{AB}^* y_{AB}^{ym} \end{aligned}$$

従って、地点 AB 間を目的とする交通量のうち、他地点を経由しないで直接ルート AB を通行する割合は

$$\begin{aligned} \alpha_{AB}^* &= \frac{y_{AB}^*}{z_{AB}^*} \\ &= \frac{y_{AB}^*}{y_{AB}^* + \Delta_{AB}^* y_{AB}^{ym}} \end{aligned}$$

地点 BC 間の通行を目的とする交通量 z_{BC}^* は、(15)式から

$$\begin{aligned}
z_{BC}^e &= y_{AB}^e + y_{BC}^e - z_{AB}^e \\
&= y_{BC}^e - (\varepsilon_{AB}^e - \delta_{AB}^e) y_{AB}^{*ey} \\
&= y_{BC}^e - \Delta_{AB}^e y_{AB}^{sym} \\
&= y_{BC}^e + \Delta_{BC}^e y_{BC}^{sym}
\end{aligned}$$

同様に、地点 BC 間の通行を目的とする交通量 z_{CA}^e は、(16)式から

$$\begin{aligned}
z_{CA}^e &= y_{CA}^e - (\varepsilon_{AB}^e - \delta_{AB}^e) y_{AB}^{*ey} \\
&= y_{CA}^e - \Delta_{AB}^e y_{AB}^{sym} \\
&= y_{CA}^e + \Delta_{CA}^e y_{CA}^{sym}
\end{aligned}$$

[IV] まとめ

ある 3 地点 A, B, C があり、それぞれ結ぶルートが単一であるケースを想定する。各地点間の通行を目的とする交通は、地点 AB 間、地点 BC 間および地点 CA 間の 3 通りある。そのうち、他地点を経由する交通はたかだか 1 通りしかない。いま、地点 AB 間を目的とする交通は地点 C を経由するものがあるが、地点 BC 間および地点 CA 間の交通は他地点を経由しないものとする。

本稿では、道路利用者に対し通行料金が課されない価格ゼロの場合と、社会厚生を最大化するように利用者に負担が課される場合との 2 通りのケースについて、均衡交通量の状態を求めた。

ルート AB の交通量は、価格ゼロの場合

$$\begin{aligned}
y_{AB}^e &= (1 + \delta_{AB}^e) y_{AB}^* \\
\delta_{AB}^e &= (1 - \Delta_{AB}^e) \varepsilon_{AB}^e \\
\varepsilon_{AB}^e &= \frac{y_{AB}^e}{y_{AB}^* + y_{AB}^e} \\
\Delta_{AB}^e &= \frac{\hat{t}_{AB}^e - \hat{t}_{BC}^e - \hat{t}_{CA}^e}{\hat{t}_{AB}^e + \hat{t}_{BC}^e \frac{y_{AB}^e}{y_{BC}^e} + \hat{t}_{CA}^e \frac{y_{AB}^e}{y_{CA}^e}}
\end{aligned}$$

社会厚生最大化の場合

$$\begin{aligned}
y_{AB}^s &= (1 + \delta_{AB}^s) y_{AB}^* \\
\delta_{AB}^s &= (1 - \Delta_{AB}^s) \varepsilon_{AB}^s \\
\varepsilon_{AB}^s &= \frac{y_{AB}^s - y_{AB}^e - y_{AB}^{sym}}{y_{AB}^* + y_{AB}^e + y_{AB}^{sym}}
\end{aligned}$$

$$\Delta_{AB}^s = \frac{MC_{AB}^s - MC_{BC}^s - MC_{CA}^s}{2 \left(\hat{t}_{AB}^s + \hat{t}_{BC}^s \frac{y_{AB}^{sym}}{y_{BC}^{sym}} + \hat{t}_{CA}^s \frac{y_{AB}^{sym}}{y_{CA}^{sym}} \right)}$$

と表現される。

両ケースにおいて、混雑度乖離割合 Δ_{AB} の分子は、無経由通行状態におけるルート AB の時間換算した限界費用から、ルート BC およびルート CA の時間換算した限界費用の合計を引いた値として表現される。それに対し、分母は無経由通行状態における各ルートの超過所要時間の和として表される。ただし、各ルートの超過所要時間はルート AB にあわせて修正されたものである。

ルート AB 以外の交通量に関しては、価格ゼロの場合

$$\begin{aligned}
y_{ij}^e &= (1 + \delta_{ij}^e) y_{ij}^* \\
\delta_{ij}^e &= (1 - \Delta_{ij}^e) \varepsilon_{ij}^e \\
\varepsilon_{ij}^e &= \frac{y_{ij}^e}{y_{ij}^* + y_{ij}^e} \\
\Delta_{ij}^e &= -\Delta_{AB}^e \frac{y_{AB}^e}{y_{ij}^e}
\end{aligned}$$

社会厚生最大化の場合

$$\begin{aligned}
y_{ij}^s &= (1 + \delta_{ij}^s) y_{ij}^* \\
\delta_{ij}^s &= (1 - \Delta_{ij}^s) \varepsilon_{ij}^s \\
\varepsilon_{ij}^s &= \frac{y_{ij}^{sym}}{y_{ij}^{*ey}} \\
\Delta_{ij}^s &= -\Delta_{AB}^s \frac{y_{AB}^{sym}}{y_{ij}^{sym}}
\end{aligned}$$

と表現される。

各地点間の通行を目標とする交通量は、価格ゼロの場合

$$z_{ij}^e = y_{ij}^e + \Delta_{ij}^e y_{ij}^e$$

社会厚生最大化の場合

$$z_{ij}^s = y_{ij}^s + \Delta_{ij}^s y_{ij}^{sym}$$

となる。

〔記号の定義〕

- z_{ij} : 地点 ij 間の通行を目的とする交通量。
 y_{ij} : ルート ij の交通量。
 t_{ij} : ルート ij の所要時間。
 p_{ij} : ルート ij の価格。
 δ_{ij} : ルート ij の混雑度。
 ϵ_{ij} : 無経由通行状態におけるルート ij の混雑度。
 y_{ij}^* : ルート ij の無渋滞最大交通量あるいは無渋滞交通量。
 t_{ij}^* : ルート ij の無渋滞所要時間。
 p_{ij}^* : ルート ij の無渋滞価格。ここで $p_{ij}^* = D_{ij}(y_{ij}^*)$ 。
 $s_{ij}^* = -\frac{1}{D'_{ij}(y_{ij}^*)}$: ルート ij の無渋滞交通量において料金が 1 単位課されるときに減少する交通量。
 $t_{ij} = y_{ij}^* t'_{ij}(y_{ij}^*)$: ルート ij の限界所要時間合計。無渋滞交通量において、1 台追加することにより増加する所要時間の全車合計分。
 $y_{ij}^* = s_{ij}^* w t_{ij}$: ルート ij の限界機会交通量。無渋滞交通量において、限界機会費用だけ料金が課されたとした場合に減少する交通需要量。
 $y_{ij}^* = s_{ij}^* w y_{ij}^* t'_{ij}(y_{ij}^*)$: ルート ij の交通量 y_{ij} における限界機会交通量。交通量 y_{ij} における限界機会費用を課されたときに減少する交通量。
 $y_{ij}^* = s_{ij}^* m_{ij}$: ルート ij の道路維持費用機会交通量。無渋滞交通量において、道路維持費用が料金加算されたときに減少する交通量。
 $y_{ij}^* = s_{ij}^* p_{ij}^*$: ルート ij の最大超過交通量。
 $\bar{t}_{ij}$: 無経由通行状態におけるルート ij の所要時間。
 $\bar{t}_{ij}$: 無経由通行状態におけるルート ij の無渋滞所要時間を超える超過時間。
 上肩付き ϕ : 価格ゼロのケース。
 上肩付き σ : 社会厚生最大化のケース。

〔註〕

- (1) 文献 (3) を参照。
 (2) 文献 (3) を参照。
 (3) 文献 (3) を参照。
 (4) 文献 (3) を参照。
 (5) 文献 (3) を参照。

〔参考文献〕

- (1) 鈴木武「二地点交通量のルート間配分モデル」経営志林 第30巻第1号, 1993年4月
 (2) 鈴木武「交通渋滞における混雑度モデル」経営志林 第30巻第3号, 1993年10月
 (3) 鈴木武「二地点間の交通量モデル」経営志林 第31巻1号, 1994年4月