二地点交通量のルート間配分モデル

鈴木, 武

(出版者 / Publisher)
法政大学経営学会
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
経営志林 / The Hosei journal of business
(巻 / Volume)
30
(号 / Number)
1
(開始ページ / Start Page)
59
(終了ページ / End Page)
71
(発行年 / Year)
1993-04-30
(URL)
https://doi.org/10.15002/00003394

二地点交通量のルート間配分モデル

鈴 木 　　武

[I] はじめに

1. 本稿の構成

本稿では，二地点間を通行する交通量を考察する。そのさい，通行するか否かは，厚生の大きさに依存すると想定する。ここで厚生とは，便益マイナス費用である。厚生には，通過車個々の厚生と，通過車全体を合計した厚生を考える。後者を「社会厚生」と呼ぶ。それは個々の厚生の和と仮定する。

最適な交通量を求める場合，社会厚生を最大化するという基準と，個々の厚生をそれぞれ最大化するという基準の，2通りを検討する。前者から得られる状態を「社会的均衡」，後者から得られる状態を「主体的均衡」と呼ぶことにする。必ずしも，主体的均衡が社会的均衡に一致するとは限らない。個々の主体の行動は，それぞれ，他の主体への影響を考慮していないからである。

IIでは，社会厚生を最大化する交通量と，最適な道路建設投資について述べる。また，二地点間を結ぶ複数のルートがある場合の最適配分比率を求める。IIIでは，所要時間関数を線形と仮定し，より具体的な結論を得る。IVでは，個々の厚生を最大化する主体的均衡を求める。また，それが社会的均衡から，どの程度乖離しているかを述べる。この議論から「Wardropの原理」を導く。Vでは，道路建設投資が行なわれたとき，各均衡状態がどう変化するかを記述する。

2. モデルの前提

ある二地点があり，そこを単位期間に通過する自動車の交通量は，yである。各車が二地点を通過するさいに得られる便益の平均はpである。各車が負担する費用は，道路建設・維持のために課せられる通行料と，所要時間である。

道路建設のための投資累計はKであり，単位期間に利用車全体に課せられる負担は，そのレンタルコストになる。借入利子率，減価償却率等を含めた資本の割引率をδとする。レンタルコストは，δKになる。道路維持のための費用はMであり，これは交通量yに依存する。すなわち，

$$M = M(y)$$

二地点間の所要時間はtであり，これは交通量yと，道幅等による走行の容易さに依存する。走行の容易さは，道路建設投資Kに比例すると考える。従って，

$$t = t(y, K)$$

ここで，交通量の増加により，所要時間は逓増する。よって，

$$\frac{\partial t}{\partial y} > 0 \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} > 0$$

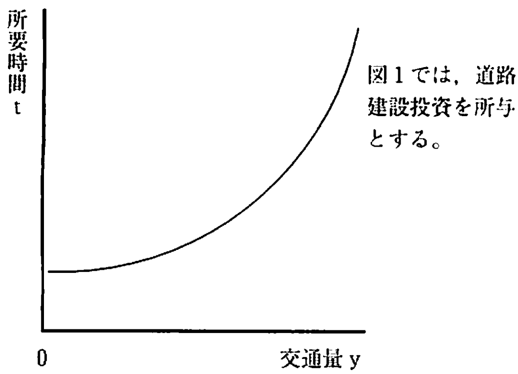
また，道路建設投資が増加すれば，所要時間は減少する。

$$\frac{\partial t}{\partial K} < 0$$

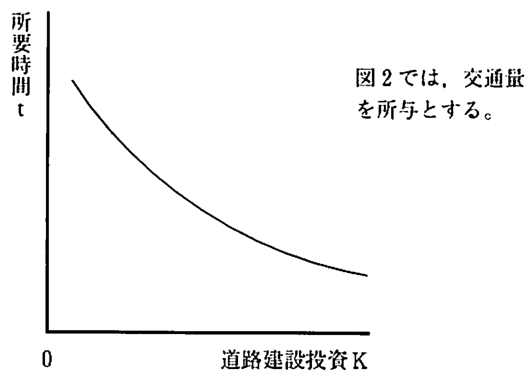
単位時間あたりのコストはwである。従って，各車の所要時間コストはwtになる。

社会全体の厚生π，すなわち便益マイナス費用は

$$\pi = py - (wty + M + \delta K)$$



(図1) 交通量と所要時間



(図2) 道路建設投資と所要時間

[Ⅱ] 社会厚生を最大にする交通量

1. 単一ルートにおける交通量と道路投資

いま，p，w，δ，Kは所与とする。社会厚生を最大にする交通量yは，次式で求めることができる。

$$\frac{d\pi}{dy} = p - w\left(\frac{dt}{dy}\cdot y + t\right) - \frac{dM}{dy} = 0$$

よって，

$$p = wt + \left(w\frac{dt}{dy}\right)\cdot y + \frac{dM}{dy} = 0$$

左辺は，交通量が一台増加したときに得られる，追加的な便益である。左辺第1項は，追加交通量の所要時間コスト。第2項は，追加交通量により引きおこされる，通過車全体の時間コストの増加分。第3項は，追加交通量による道路維持費用の増加分である。

次に，交通量yは変化しないものとする。p，w，M，δを所与として，社会厚生を最大にする道路建設投資Kを求めよう。

$$\frac{d\pi}{dK} = -wy\frac{dt}{dK} - \delta = 0$$

よって，

$$\delta = -wy\frac{dt}{dK}$$

左辺は，道路建設投資1単位を追加するときの費用。右辺は，そのときに利用車全体で減少する時間コストである。両者が等しいときに，社会厚生は最大になる。

2. 複数ルートにおける交通量配分比率

二地点間を結ぶ2つのルートがあるとする。各ルートにおける変数を表わすときには，右下に添字1，2をつける。ただし，p，w，δは各ルートに共通である。

社会厚生πは，次式で表わされる。

$$\pi = p(y_1+y_2) - (wt_1y_1+M_1+\delta K_1) - (wt_2y_2+M_2+\delta K_2)$$

ここで，

$$y_1 = \alpha_1 y,\quad y_2 = \alpha_2 y$$
$$\alpha_1 \geqq 0,\quad \alpha_2 \geqq 0,\quad \alpha_1+\alpha_2 = 1$$

とおく。

交通量y，各ルートへの交通量の配分比率α_1，α_2，および，道路建設投資K_1，K_2を変化させて，社会厚生を最大にする値を求めよう。

$$L = py - (wt_1\alpha_1 y + M_1 + \delta K_1) - (wt_2\alpha_2 y + M_2 + \delta K_2) + \lambda(\alpha_1+\alpha_2-1)$$

とする。ラグランジュ乗数法により，以下の5つの方程式が得られる。

$$\frac{\partial L}{\partial y}=p-\left(wt_1\alpha_1+w\alpha_1 y\frac{\partial t_1}{\partial y}+\frac{\partial M_1}{\partial y}\right)$$
$$-\left(wt_2\alpha_2+w\alpha_2 y\frac{\partial t_2}{\partial y}+\frac{\partial M_2}{\partial y}\right)$$
$$=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_1}=-wy\left(t_1+\alpha_1\frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1}\right)-\frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1}+\lambda$$
$$=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_2}=-wy\left(t_2+\alpha_2\frac{\partial t_2}{\partial \alpha_2}\right)-\frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2}+\lambda$$
$$=0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_1}=-wy\left(\alpha_1\frac{\partial t_1}{\partial K_1}+t_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial K_1}+t_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial K_1}\right)$$
$$-\delta=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_2}=-wy\left(\alpha_2\frac{\partial t_2}{\partial K_2}+t_1\frac{\partial \alpha_2}{\partial K_2}+t_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial K_2}\right)$$
$$-\delta=0 \qquad (5)$$

(1) より，社会厚生を最大にする交通量 y は，次式を満たすとき得られる。

$$p=w(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2)+\left\{\alpha_1\left(w\frac{\partial t_1}{\partial y_1}y_1\right)+\alpha_2\left(w\frac{\partial t_2}{\partial y_2}y_2\right)\right\}+\left(\alpha_1\frac{\partial M_1}{\partial y_1}+\alpha_2\frac{\partial M_2}{\partial y_2}\right)$$

左辺は，交通量が一台増加したときに得られる，追加的な便益である。右辺第1項は，追加交通量の所要時間コストである。ただし，ルート1，2を通過する交通量の割合は α_1，α_2であり，所要時間コストはその割合により加重されたものである。第2項は，追加交通量により引きおこされる，通過車全体の時間コストの増加分。第3項は，追加交通量による道路維持費用の増加分であり，それぞれ通過割合で加重されている。

2ルート間の交通量の最適配分は，(2)，(3) より

$$wt_1+w\frac{\partial t_1}{\partial y_1}y_1+\frac{\partial M_1}{\partial y_1}$$
$$=wt_2+w\frac{\partial t_2}{\partial y_2}y_2+\frac{\partial M_2}{\partial y_2}$$

すなわち，追加交通量により引き起こされる，各ルートの費用が等しいように配分される。費用の内訳は，追加交通量の所要時間コスト，追加交通量により引き起こされる通過車全体の時間コストの増加分，追加交通量による道路維持費用の増加分を加えたものである。

社会厚生を最大にするルート1の道路建設投資は，(4) から，次式を満たす。

$$\delta=-wy_1\frac{\partial t_1}{\partial K_1}+w\left(t_1\frac{\partial y_1}{\partial K_1}+t_2\frac{\partial y_2}{\partial K_1}\right)$$

左辺は，道路建設投資1単位を追加するときの費用である。右辺第1項は，ルート1における利用車全体で減少する時間コスト。右辺第2項は，各ルートにおける交通量の変化がもたらす時間コストの変化である。このケースでは，ルート2からルート1へシフトした交通量がこうむる時間コストの変化である。

ルート2に関しても，同様である。ある二地点を結ぶルートが3つ以上ある場合にも，上述したのと類似の結論が得られる。

[Ⅲ] 所要時間関数の特定化によるルート間配分比率

1. 線形な所要時間関数

これ以降，より具体的な結論を得るために，所要時間関数を特定化しよう。簡単な関数として，直線を仮定する。すなわち，

$$t=a+by$$

である。ここで，切片 a はルートの距離を表わしていると考えてよい。距離の長いルートの場合には，a の値は大きくなる。逆に，短い距離のルートでは，a は小さくなる。

傾き b は，速度の出しやすさと想定される。幅の広い道路では，多少交通量が増加したとしても，速度を出すことが可能であろう。その場合，所要時間は短くてすむ。従って，b の値は小さいと想定される。狭い道路では，その逆に b の値は大きくなる。

速度の出しやすさを直接表現するために，傾きbを

$$b=\frac{1}{s}$$

とおく。sが道幅を表わしていると考えてよい。

通常の場合，交通量がある程度以下であれば，速度は落ちないで，1台のみが走っているのと同じ所要時間になるであろう。しかし，交通量が増加してくると，混雑現象が生じてきて，所要時間は逓増していくと考えられる。従って，図1に描いたようになる。しかし，ここでは簡単化のために，直線の所要時間関数を想定している。すなわち，交通量の大きさによらず，交通量が1台増加すると，所要時間はbだけ逓増する。

道路建設投資をした場合，その道路のルート変更はないと想定されるので，切片aは変化しない。道幅が拡張されたり，快適に走れるようになることが考えられるので，以前よりsが大きくなり，傾きbは小さくなると想定してよい。

2. 2ルート間の最適配分

二地点間の交通量yが一定であるとする。この地点間を結ぶ2つのルートがある。社会厚生を最大にするために，それぞれのルートへ交通量をどう配分するか。これはⅡ－2で述べたように，追加交通量によりもたらされる各ルートにおける費用が，等しくなるように配分される。

ここで，所要時間関数を線形であるとする。ルート1，2の所要時間をt_1，t_2，通過割合をα_1，α_2とする。

$$t_1=a_1+b_1\alpha_1 y \qquad \alpha_1+\alpha_2=1 \qquad \alpha_1\geqq 0$$
$$t_2=a_2+b_2\alpha_2 y \qquad \alpha_2\geqq 0$$

傾きbを速度の出やすさsを用いて，b=1／sとおく。すなわち，

$$t_1=a_1+\frac{1}{s_1}\alpha_1 y$$

$$t_2=a_1+\frac{1}{s_2}\alpha_2 y$$

追加的な交通量によってもたらされる，道路維持費用の追加分が，両ルートで等しいとする。このとき，社会厚生を最大にする交通量の配分は

$$t_1+\alpha_1\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_1}=t_2+\alpha_2\frac{\partial t_2}{\partial\alpha_2}$$

従って，

$$a_1+2\frac{1}{s_1}\alpha_1 y=a_2+2\frac{1}{s_2}\alpha_2 y$$

である。これを解くと，

$$\alpha_1=\frac{s_1}{s_1+s_2}\left\{1+\frac{s_2(a_2-a_1)}{2y}\right\}$$

$$\alpha_2=\frac{s_2}{s_1+s_2}\left\{1+\frac{s_1(a_1-a_2)}{2y}\right\}$$

右辺第1項は，各ルートの道幅による影響であり，第2項は距離による影響とみなすことができる。道幅による交通量配分への影響は，道幅に正比例して行なわれる。また，距離による影響は，2つのルート間の距離の差に，道幅を掛けた面積に依存する。

交通量yがルート間配分比率に及ぼす影響は，距離に依存する。交通量が少ないときは，相対的に距離の影響が大きく，交通量が増加するにつれて，道幅の影響が大きくなる。交通量が無限大になれば，配分比率は完全に道幅に比例するようになる。

ここで，α_1，α_2は0から1までの値である。従って，yのとり得る範囲は

$$y\geqq\frac{s_2(a_1-a_2)}{2} \quad かつ \quad y\geqq\frac{s_1(a_2-a_1)}{2}$$

である。

もし，交通量が少なく，yの値が上の不等式を満たさない場合にはどうか，考えよう。ルート1の距離がルート2より長いとする。すなわち

$a_1>a_2$　ならば，

$$\alpha_1=\frac{s_1}{s_1+s_2}\left\{1-\frac{s_2(a_1-a_2)}{2y}\right\}$$
$$<\frac{s_1}{s_1+s_2}\left\{1-\frac{s_2(a_1-a_2)}{2}\cdot\frac{2}{s_2(a_1-a_2)}\right\}=0$$

$\alpha_1<0$であるから，すべての交通量がルート2にいく。逆に$a_2>a_1$ならば，ルート1にいく。

もし，まったく同じ道路が2つあるなら，$a_1=a_2$，$s_1=s_2$である。従って，$\alpha_1=\alpha_2=1/2$であり，それぞれ等しい交通量になる。

2つの道路の距離が等しいとしよう。すなわち，$a_1=a_2$である。このとき，

$$\alpha_1=\frac{s_1}{s_1+s_2}\quad かつ\quad \alpha_2=\frac{s_2}{s_1+s_2}$$

従って，交通量は各ルートの道幅に比例して配分される。

最適な交通量の配分ができたとき，所要時間は次式のようになる。

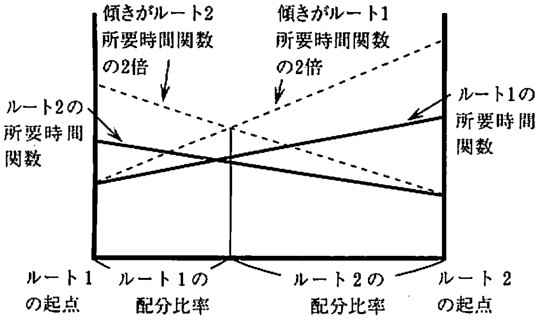
$$t_1=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{2}\frac{a_1s_1+a_2s_2+2y}{s_1+s_2}$$

$$t_2=\frac{a_2}{2}+\frac{1}{2}\frac{a_1s_1+a_2s_2+2y}{s_1+s_2}$$

このとき，ルート1と2の所要時間の差は

$$t_1-t_2=\frac{1}{2}(a_1-a_2)$$

であり，道幅には影響されず，距離のみに依存する。



（図3） 2ルートの場合の配分比率

3. 3ルート間の最適配分

二地点間を結ぶ交通量がyであり，3ルートあるとする。ルートiの所要時間をt_i，通過割合をα_iとする。所要時間関数は線形であるとする。

$$t_i=a_i+\frac{1}{s_i}\alpha_i y \qquad (i=1,2,3)$$

ただし，

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$$
$$\alpha_i\geqq 0 \qquad (i=1,2,3)$$

である。

追加的な交通量によってもたらされる，道路維持費用の追加分が，各ルートで等しいとする。このとき，社会厚生を最大にする交通量の配分は

$$t_1+\alpha_1\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_1}=t_2+\alpha_2\frac{\partial t_2}{\partial\alpha_2}=t_3+\alpha_3\frac{\partial t_3}{\partial\alpha_3}$$

従って，

$$a_1+2\frac{1}{s_1}\alpha_1 y=a_2+2\frac{1}{s_2}\alpha_2 y$$
$$=a_3+2\frac{1}{s_3}\alpha_3 y$$

である。

これを解くと，以下のようになる。

$$\alpha_1=\frac{s_1}{s_1+s_2+s_3}\left\{1+\frac{s_2(a_2-a_1)+s_3(a_3-a_1)}{2y}\right\}$$

$$\alpha_2=\frac{s_2}{s_1+s_2+s_3}\left\{1+\frac{s_1(a_1-a_2)+s_3(a_3-a_2)}{2y}\right\}$$

$$\alpha_3=\frac{s_3}{s_1+s_2+s_3}\left\{1+\frac{s_1(a_1-a_3)+s_2(a_2-a_3)}{2y}\right\}$$

各式の右辺第1項は道幅による影響であり，第2項は距離による影響とみなすことができる。

ここで，α_iは0から1までの値である。従って，yのとり得る範囲は

$$y \geqq \frac{s_2(a_1-a_2)+s_3(a_1-a_3)}{2}$$

かつ

$$y \geqq \frac{s_1(a_2-a_1)+s_3(a_2-a_3)}{2}$$

かつ

$$y \geqq \frac{s_1(a_3-a_1)+s_2(a_3-a_2)}{2}$$

交通量が上の3つの不等式をすべて満たすほどは大きくないとしよう。そのとき，例えば

$$a_1 > a_2 > a_3$$

である場合を考えよう。すなわち，二地点間を結ぶ距離は，ルート1が1番長く，ルート3が短い。ルート2は中間である。その場合，ルート1の交通量はゼロになり，ルート3の交通量はプラスになる。また，ルート2の交通量はゼロのケースとプラスのケースがあり得る。

まず，ルート1のケースである。

$$s_2(a_1-a_2)+s_3(a_1-a_3) > 2y$$

よって

$$s_2(a_2-a_1)+s_3(a_3-a_1) < -2y$$

である。従って，

$$\alpha_1=\frac{s_1}{s_1+s_2+s_3}\left\{1+\frac{s_2(a_2-a_1)+s_3(a_3-a_1)}{2y}\right\}$$
$$<\frac{s_1}{s_1+s_2+s_3}\left\{1+\frac{-2y}{2y}\right\}=0$$

つぎにルート3のケースである。

$$s_1(a_1-a_3)+s_2(a_2-a_3) > 0$$

より，$\alpha_3 > 0$である。

ルート2については以下のようになる。

$\alpha_2 \gtreqless 0$であるためには，

$$1+\frac{s_1(a_1-a_2)+s_3(a_3-a_2)}{2y} \gtreqless 0$$

従って

$$a_2 \gtreqless \frac{a_1s_1+a_3s_3+2y}{s_1+s_3}$$

ここで，$\alpha_2 < 0$となりうるのは，s_3がs_1より相対的に大きいケースである。すなわち，ルート2の交通量がゼロとなりうるのは，ルート3の道幅がルート1よりも相対的に広い場合になる。逆に，ルート3の道幅が狭いと，ルート2の交通量はプラスになりうる。さらに，二地点間の交通量が多い場合は，ルート2の交通量はプラスに，少ないときはゼロになりやすい。

結論として，二地点間の交通量yが多くなく，すべてのルートを利用する必要がない場合には，以下のようになる。いま，ルート1，2，3の順で二地点間を結ぶ距離が短くなるとする。すなわち，$a_1 > a_2 > a_3$である。そのとき，ルート1の交通量はゼロになり，ルート3の交通量はプラスになる。ルート2の交通量は，道幅と全体の交通量によって影響される。すなわち，ルート3の道幅がルート1に比較して広ければ，ルート2の交通量はゼロになり，狭ければプラスになる。また，全体の交通量が比較的大きければ，ルート2の交通量はプラスになり，小さければゼロになる。

もし，まったく同じ道路が3つあるなら，$a_1=a_2=a_3$，$s_1=s_2=s_3$である。従って，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1/3$であり，それぞれ等しい交通量になる。

3つの道路の距離が等しいとしよう。そのとき，各ルートへの交通量の配分は

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = s_1 : s_2 : s_3$$

である。

最適交通量の配分のときの所要時間は，次式のようになる。

$$t_1=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{2}\frac{a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+2y}{s_1+s_2+s_3}$$

$$t_2=\frac{a_2}{2}+\frac{1}{2}\frac{a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+2y}{s_1+s_2+s_3}$$

$$t_3=\frac{a_3}{2}+\frac{1}{2}\frac{a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+2y}{s_1+s_2+s_3}$$

各ルートの所要時間の差は，道幅には影響されず，距離のみに依存する。

4. nルート間の最適配分

二地点間を結ぶ交通量が y であり，n ルートあるとする。ルート i の所要時間を t_i，通過割合を α_iとする。所要時間関数は線形であるとする。

$$t_i = a_i + \frac{1}{s_i}\alpha_i y \qquad (i=1,\cdot\cdot\cdot,n)$$

ただし，

$$\alpha_1 + \cdot\cdot\cdot + \alpha_n = 1$$
$$\alpha_i \geqq 0 \qquad (i=1,\cdot\cdot\cdot,n)$$

である。

追加的な交通量によってもたらされる，道路維持費用の追加分が，各ルートで等しいとする。このとき，社会厚生を最大にする交通量の配分は

$$t_1 + \alpha_1\frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} = \cdot\cdot\cdot = t_n + \frac{\partial t_n}{\partial \alpha_n}$$

従って，

$$a_1 + 2\frac{1}{s_1}\alpha_1 y = \cdot\cdot\cdot = a_n + 2\frac{1}{s_n}\alpha_n y$$

である。

これを解くと

$$\alpha_i = \frac{s_i}{s_1 + \cdots + s_n} \cdot \left\{ 1 + \frac{s_1(a_1 - a_i) + \cdots + s_n(a_n - a_i)}{2y} \right\}$$

右辺第1項は道幅による影響であり，第2項は距離による影響とみなすことができる。

ここで，α_iは0から1までの値である。従って，y のとり得る範囲は

$$y \geqq \frac{s_1(a_1 - a_i) + \cdots + s_n(a_n - a_i)}{2} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

交通量が少なく，y の値が上の不等式をすべては満たさない場合を考えよう。例えば，

$$a_1 > a_2 > \cdot\cdot\cdot > a_n$$

であるとしよう。すなわち，二地点間を結ぶ距離は，ルート1が一番長く，ルート n が一番短い。その他のルートは，中間の距離である。このとき，$\alpha_1 < 0$ かつ $\alpha_n > 0$ になる。

$\alpha_i \gtreqless 0$ であるためには，

$$a_i \gtreqless \frac{a_1 s_1 + \cdot\cdot\cdot + a_n s_n + 2y}{s_1 + \cdot\cdot\cdot + s_n}$$

ここで，ルート1およびn以外のルートの交通量がゼロとなるのは，距離の長いルートの道幅が狭く（s が小さく），距離の短いルートの道幅が広い（s が大きい）ケースである。また，全体の交通量が小さいケースである。

結論として，交通量yが大きくなく，すべてのルートを利用する必要がない場合には，以下のようになる。いま，ルート1，2，・・・，n の順で二地点間を結ぶ距離が短くなるとする。すなわち，$a_1 > a_2 > \cdot\cdot\cdot > a_n$である。そのとき，ルート1の交通量はゼロになり，ルート n の交通量はプラスになる。その中間的な距離にある他のルートの交通量は，距離の短いルートの道幅が広ければゼロになり，逆に，狭ければプラスになる可能性が強い。さらに，全体の交通量が少なければゼロになり，多ければプラスになる可能性が強い。

もし，すべてのルートがまったく同じであるなら，それぞれ等しい交通量になる。また，各ルートの距離が等しいとき，交通量の配分は各ルートの道幅に比例する。

最適交通量配分のときの所要時間は次式のようになる。

$$t_i = \frac{a_i}{2} + \frac{1}{2}\frac{a_1 s_1 + \cdot\cdot\cdot + a_n s_n + 2y}{s_1 + \cdot\cdot\cdot + s_n}$$

各ルートの所要時間の差は，道幅には影響されず，距離のみに依存する。

[Ⅳ] 各主体における最適化行動

上述した議論は，社会全体から見て，望ましい行動であった。しかし実際には，各主体がそれぞれにとって望ましい行動をとる。いま，ある主体が二地点間を通行する場合を考えよう。複数のルートがあるとき，この主体がどのルートを通行するかは，この主体が予想している交通量によって，影響される。

この主体の期待する交通量を y_p^e とする。y_p^e は各主体によって異なりうる。その分布の平均を y^e とする。いま想定しているのが平均的な主体であるならば，その期待交通量は y^e と考えてよい。

1. 単一ルートにおける交通量

まず，二地点間のルートが１つしかない場合を考えよう。もし，道路維持費用および道路建設投資のレンタルコストが，通過車全体に均等に負担されるとするならば，平均的な主体の期待厚生は次式になる。

$$\pi_p^e = p - \left\{ wt + \frac{M + \delta K}{y^e} \right\}$$

ここで，$t = t(y^e, K)$ である。

この主体の期待する社会厚生は，$\pi^e = \pi_p^e y_p^e$ である。すなわち，

$$\pi^e = py^e - (wty^e + M + \delta K)$$

これは，Ⅱ－1で述べた議論の y を y^e に置き換えたものである。もし，この主体が社会厚生を最大にするように行動するならば，最適化行動は次式を基準にする。

$$p - \left\{ wt + \left(w\frac{dt}{dy^e} \right) \cdot y^e + \frac{dM}{dy^e} \right\} \gtreqless 0$$

第１項の p は，この主体が二地点間を通行するときに得られる限界便益である。カッコの中は限界費用であり，それぞれ所要時間コスト，この主体が通行することによる通過車全体の追加的な時間コスト，道路維持費用の増加分である。限界便益マイナス限界費用がプラスであれば，この主体は二地点間を通行する。もしマイナスであれば，通行しない。

問題は，個々の主体がそれぞれ期待する社会厚生を，最大化しようとして行動するか，という点である。各主体にとっては，個々の便益マイナス費用がプラスであれば，通行するであろう。従って，行動基準は次式になる。

$$p - \left\{ wt + \frac{M + \delta K}{y^e} \right\} \gtreqless 0$$

本稿では，社会厚生を最大化する場合に得られる状態を「社会的均衡」と呼び，個々の主体が自己のことだけを考えて行動するとき得られる状態を「主体的均衡」と呼ぼう。どちらの基準で行動するにしても，平均的な主体の期待交通量 y^e は，二地点間の通行を繰り返し行なうならば，それぞれの均衡状態の交通量 y に一致するようになるであろう。というのは，上述の２つの不等式において，等号が成り立つところまで通行するので，そのときの交通量は y になり，それが y^e に一致しているからである。

社会的均衡状態の交通量と，主体的均衡状態の交通量との関係は次のようになる。

$$\left(w\frac{dt}{dy} \right) \cdot y + \frac{dM}{dy} \gtreqless \frac{M + \delta K}{y}$$

のとき，

（社会的均衡状態の交通量）
$\gtreqless$（主体的均衡状態の交通量）

である。

もし道路建設および維持費用が利用車に課されないとするならば，主体的均衡における交通量は，社会厚生を最大化する交通量よりも多くなる。逆に言えば，個々の主体が各自の厚生しか考慮しないで行動する場合，社会厚生を最大化するような交通量にするためには，料金 r を

$$r = \left(w\frac{dt}{dy} \right) \cdot y + \frac{dM}{dy}$$

と決めればよい。

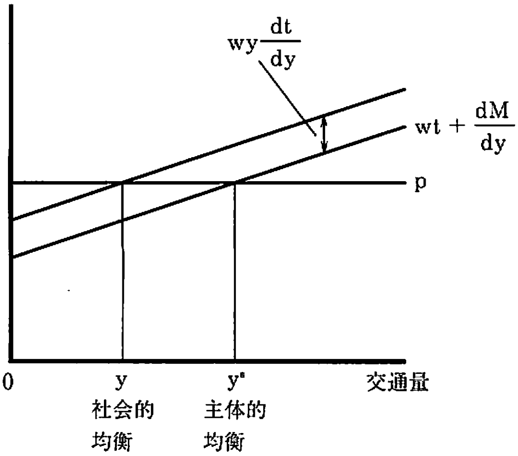
そのとき，このルートにおける収支 E は

$$E = \left(w\frac{dt}{dy} \right) \cdot y^2 + \frac{dM}{dy} y - (M + \delta K)$$

である。もし，道路維持費用が交通量に比例するならば（$M = my$），収支ゼロになるのは

$$\left(w\frac{dt}{dy}\right)\cdot y = \frac{\delta K}{y}$$

である。すなわち，追加交通量による通過車全体の追加的な時間コストが，道路建設投資のレンタルコストを各通過車に分担させた金額に等しくなるときである。



（図４） 社会的均衡と主体的均衡の交通量

2. 複数ルートにおける交通量と配分比率

二地点間に２つのルートがある場合を考えよう。平均的な主体の期待交通量を y^e とする。その主体がルート１とルート２を選択する割合を α_1，α_2 とする。この主体の期待厚生は

$$\pi_p^e = p - \alpha_1\left(wt_1 + \frac{M_1 + \delta K_1}{y^e}\right) - \alpha_2\left(wt_2 + \frac{M_2 + \delta K_2}{y^e}\right)$$

ただし，

$$y_1^e = \alpha_1 y^e, \quad y_2^e = \alpha_2 y^e$$

である。

前節で述べたと同様に，この主体が期待する社会厚生を最大化する場合と，この主体自身の厚生を最大化する場合とを比較し，行動基準の違いを検討しよう。

この主体の期待する社会厚生は，$\pi^e = \pi_p^e y^e$ である。すなわち，

$$\pi_p^e = py^e - (wty^e + M + \delta K)$$

ただし，

$$t = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2,\ M = M_1 + M_2,\ K = K_1 + K_2$$

である。

これは，II－２で述べた議論の y を y^e に置き換えたものである。もし，この主体が社会厚生を最大にするように行動するならば，最適化行動は次式を基準にする。

$$p - \left\{wt + \left(w\frac{dt}{dy^e}\right)\cdot y^e + \frac{dM}{dy^e}\right\} \gtreqless 0$$

ただし，

$$\frac{dt}{dy^e} = \alpha_1\frac{dt_1}{dy^e} + \alpha_2\frac{dt_2}{dy^e}$$

$$\frac{dM}{dy^e} = \frac{dM_1}{dy^e} + \frac{dM_2}{dy^e}$$

である。

第１項の p は，この主体が二地点間を通行するときに得られる限界便益であり，カッコの中は限界費用である。限界便益マイナス限界費用がプラスであれば，この主体は二地点間を通行する。もしマイナスであれば，通行しない。

実際には，各主体は社会厚生を最大化しようと意図して，行動することはない。この主体自身の厚生を最大化しようとして行動するであろう。その場合，各主体にとっての便益マイナス費用がプラスであれば，通行するであろう。従って，行動基準は次式になる。

$$p - \left\{wt + \frac{M + \delta K}{y^e}\right\} \gtreqless 0$$

ここで，t，M，K は上記のただし書きのようである。これ以降は，前節の議論と同じになる。

次に，y^e が所与であるとし，そのときのルート間配分比率を求めよう。いま，この主体が自己の期待厚生を最大にするとしよう。y^e が所与だから，$\pi^e = \pi_p^e y^e$ を最大化するのと同じである。

従って，この主体自身の厚生を最大化することと，この主体が期待する社会厚生を最大化することとは，同じになる。

$$\pi^e = py^e - (wt_1y_1^e + M_1 + \delta K_1) - (wt_2y_2^e + M_2 + \delta K_2)$$

これは，II－2で述べた議論のyをy^eに置き換えたものである。すなわち，この主体のルート間配分比率は，次式を満たす。

$$wt_1 + w\frac{\partial t_1}{\partial y_1^e}y_1^e + \frac{\partial M_1}{\partial y_1^e} = wt_2 + w\frac{\partial t_2}{\partial y_2^e}y_2^e + \frac{\partial M_2}{\partial y_2^e}$$

問題は，個々の主体が自己の期待厚生を最大化しようとするさい，他者の行動を考慮しなければならない点にある。限界費用を構成する3つの成分のうち，通過車全体の追加的な時間コストを，各主体は考慮するであろうか？　お互いに各主体が全体に及ぼす影響を考えなければならない。それでないと，最終的に各主体が不利益を被る。しかし，個々の主体は全体に及ぼす影響を実感できない。結局，その部分は無視せざるを得ないだろう。

両辺の第2項は，この主体が通行することによる通過車全体の追加的な時間コストである。個々の主体は，全体に及ぼす影響を実感することができないので，第2項を落とした状態でルート間の選択を行なう。すなわち，主体的均衡は

$$wt_1 + \frac{\partial M_1}{\partial y_1^e} = wt_2 + \frac{\partial M_2}{\partial y_2^e}$$

である。

ここで，両ルートの道路維持費用増加分が等しいとしよう。その場合，主体的均衡は

$$t_1 = t_2$$

である。すなわち，個々の主体は各ルートにおける所要時間が等しくなるように，ルート選択をする。

ルートが3つ以上ある場合にも，上述したのと類似の結論が得られる。これらの議論から，主体的均衡状態を想定し，各ルートの道路維持限界費用が等しいとすると，交通工学で言われている「Wardropの原理」が得られる。[1] すなわち，

（第1原理）起終点間に存在する可能な経路のうち，利用される経路については所要時間が皆等しく，利用されないどの経路のそれよりも小さい。

（第2原理）道路網中の総走行時間は最少である。

第1原理については，上述した通りである。第2原理については，厚生を最大化するさい，便益が一定であるので，費用を最小化することになる。単位あたり所要時間コストが一定であるから，総走行時間が最小になる。

3. 線形な所要時間関数を想定したケース

III－2で述べた線形な所要時間関数を想定しよう。二地点間のルートが2つの場合を述べる。主体的均衡状態では，ルート間配分比率は，次式を解けばよい。

$$a_1 + \frac{1}{s_1}\alpha_1 y = a_2 + \frac{1}{s_2}\alpha_2 y$$

主体的均衡の配分比率をα_1^s，α_2^sとする。

$$\alpha_1^s = \frac{s_1}{s_1+s_2}\left\{1 + \frac{s_2(a_2-a_1)}{y}\right\}$$

$$\alpha_2^s = \frac{s_2}{s_1+s_2}\left\{1 + \frac{s_1(a_1-a_2)}{y}\right\}$$

ここで，α_1^s，α_2^sは0から1までの値である。従って，yのとり得る範囲は

$$y \geqq s_2(a_1-a_2) \quad かつ \quad y \geqq s_1(a_2-a_1)$$

である。もし交通量が少なく，yの値が上の不等式を満たさないときには，交通量がゼロになるルートが存在する。

所要時間をt^sとする。これは，どのルートにも共通であり，

$$t^s = \frac{a_1s_1 + a_2s_2 + y}{s_1+s_2}$$

となる。

社会的均衡状態における配分比率を α_1, α_2とし，所要時間を t_1, t_2 とする。式はⅢ－2で述べたとおりである。主体的均衡状態と社会的均衡状態の差は，以下のようになる。

$$\alpha_1^s-\alpha_1=\frac{s_1s_2}{s_1+s_2}\frac{a_2-a_1}{2y}$$

$$\alpha_2^s-\alpha_2=\frac{s_1s_2}{s_1+s_2}\frac{a_1-a_2}{2y}$$

$$t^s-t_1=\frac{s_1s_2}{s_1+s_2}\frac{a_2-a_1}{2}$$

$$t^s-t_2=\frac{s_1s_2}{s_1+s_2}\frac{a_1-a_2}{2}$$

両ルートの距離が等しいケース ($a_1=a_2$) では，

$$\alpha_1^s=\alpha_1,\quad \alpha_2^s=\alpha_2,\quad t^s=t_1=t_2$$

となる。この場合，主体的均衡は社会的均衡に一致する。

ルート1の距離がルート2より短いケース ($a_1<a_2$) では，

$$\alpha_1^s>\alpha_1,\quad \alpha_2^s<\alpha_2,\quad t_1<t^s<t_2$$

となる。この場合，主体的均衡では社会的均衡に比較し，短いルートへより多くの交通量がシフトする。

社会的均衡における厚生を π，主体的均衡における厚生を π^sとする。

$$\pi-\pi^s=w\frac{s_1s_2}{s_1+s_2}\cdot\frac{(a_1-a_2)^2}{4y}$$

従って，主体的均衡における厚生の損失の大きさは，両ルートにおける距離の差の2乗に比例し，全体の交通量に反比例する。また，両ルートの道幅が近いほど，損失は大きくなる。

3ルート以上ある場合にも，同様の議論ができる。

[Ⅴ] 道路建設投資による交通量の変化

社会厚生を最大化する道路建設投資の大きさについては，Ⅱで述べた。ここでは，道路建設投資が行なわれた場合，各ルートを通行する交通量が，どう変化するかを考えよう。

いま，二地点間を結ぶルートが2つあるとする。道路建設投資により，投資累計がルート1，2で，それぞれ K_1, K_2 から K_1', K_2' に変化したとしよう。道路建設投資が変化しても，ルートの距離は変わらず，道幅等が変わり，走行しやすくなると想定しよう。その場合，線形で表現される所要時間関数における a は変わらず，s が変化する。すなわち，所要時間関数は

$$t_1'=a_1+\frac{1}{s_1'}\alpha_1'y$$

$$t_2'=a_2+\frac{1}{s_2'}\alpha_2'y$$

ただし

$$\alpha_1'\geqq 0,\quad \alpha_2'\geqq 0,\quad \alpha_1'+\alpha_2'=1$$
$$s_1'\geqq s_1,\quad s_2'\geqq s_2$$

である。

1. 社会厚生最大化の場合の変化

まず，社会厚生を最大化する基準で考えよう。道路建設投資を行なった場合の交通量の配分比率は，次のようになる。

$$\alpha_1'=\frac{s_1'}{s_1'+s_2'}\left\{1+\frac{s_2'(a_2-a_1)}{2y}\right\}$$

$$\alpha_2'=\frac{s_2'}{s_1'+s_2'}\left\{1+\frac{s_1'(a_1-a_2)}{2y}\right\}$$

配分比率の変化は

$$\alpha_1'-\alpha_1=\frac{s_1's_2-s_1s_2'}{(s_1'+s_2')(s_1+s_2)}+\frac{a_2-a_1}{2y}\cdot\frac{s_1's_1(s_2'-s_2)+s_2's_2(s_1'-s_1)}{(s_1'+s_2')(s_1+s_2)}$$

$$\alpha_2'-\alpha_2=-(\alpha_1'-\alpha_1)$$

である。右辺第1項は道幅による配分比率の変化であり，第2項は距離による影響である。

道路建設投資を行なった後，ルート1の配分比率が上昇するケースを求めよう。すなわち，$\alpha_1' \geqq \alpha_1$ である条件は

$$\frac{s_1'}{s_1} \geqq \frac{s_2'}{s_2} + \frac{a_1 - a_2}{2y}\left\{\frac{s_2'}{s_1}(s_1' - s_1) + \frac{s_1'}{s_2}(s_2' - s_2)\right\}$$

である。もし両ルートの距離が等しければ（$a_1 = a_2$），

$$\frac{s_1'}{s_1} \geqq \frac{s_2'}{s_2}$$

となる。すなわち，ルート1の道幅の拡張割合がルート2より大きければ，ルート1の交通量配分比率は高まる。

両ルートの距離が等しくないケース（$a_1 \neq a_2$）を検討しよう。いま，ルート1だけに投資をし，ルート2はそのままであったとしよう。すなわち，$s_1' \geqq s_1$，$s_2' = s_2$ である。$\alpha_1' \geqq \alpha_1$ であるための条件として，上の不等式から

$$\frac{s_1'}{s_1} \geqq 1 + \frac{a_1 - a_2}{2y} \cdot \frac{s_2'}{s_1}(s_1' - s_1)$$

これを変形し，$s_1' \geqq s_1$ を用いると

$$y \geqq \frac{s_2(a_1 - a_2)}{2}$$

になる。Ⅲ－2で述べたように，ルート1の交通量がゼロでない限り，この不等式は常に成り立つ。従って，あるルートだけ投資し，道幅を拡張するならば，そのルートの交通量配分比率は，必ず大きくなる。

次に，所要時間の変化を見よう。

$$t_1' - t_1 = \frac{(s_1 + s_2) - (s_1' + s_2')}{(s_1' + s_2')(s_1 + s_2)} \cdot y + \frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \frac{s_1' s_2 - s_1 s_2'}{(s_1' + s_2')(s_1 + s_2)}$$

$$t_2' - t_2 = t_1' - t_1$$

である。

$t_1' \leqq t_1$ であるための条件は

$$s_1' + s_2' \geqq s_1 + s_2 + \frac{a_1 - a_2}{2y}(s_1' s_2 - s_1 s_2')$$

である。

両ルートの距離が等しいケース（$a_1 = a_2$）では，$s_1' \geqq s_1$ かつ $s_2' \geqq s_2$ であるので，常に $t_1' \leqq t_1$ かつ $t_2' \leqq t_2$ である。すなわち，道路建設投資をすれば，どのルートにおける所要時間も等しく短縮する。

両ルートの距離が等しくないケース（$a_1 \neq a_2$）を検討しよう。いま，ルート1だけに投資をし，ルート2はそのままであるケース（$s_1' \geqq s_1$，$s_2' = s_2$）を見よう。上の不等式を変形し，$s_1' \geqq s_1$ を用いると

$$y \geqq \frac{s_2(a_1 - a_2)}{2}$$

になる。ルート1の交通量がゼロでない限り，この不等式は常に成り立つ。従って，あるルートだけ投資し，道幅を拡張するならば，すべてのルートの所要時間は等しく短縮される。

2. 主体的均衡を想定した場合の変化

個々の主体が自己のことだけを考慮して行動する場合に得られる，主体的均衡状態を考えよう。道路建設投資を行なった場合の交通量の配分比率は，次のようになる。

$$\alpha_1^{s\prime} = \frac{s_1'}{s_1' + s_2'}\left\{1 + \frac{s_2'(a_2 - a_1)}{y}\right\}$$

$$\alpha_2^{s\prime} = \frac{s_2'}{s_1' + s_2'}\left\{1 + \frac{s_1'(a_1 - a_2)}{y}\right\}$$

配分比率の変化は

$$\alpha_1^{s\prime} - \alpha_1^{s} = \frac{s_1' s_2 - s_1 s_2'}{(s_1' + s_2')(s_1 + s_2)} + \frac{a_2 - a_1}{y} \cdot \frac{s_1' s_1(s_2' - s_2) + s_2' s_2(s_1' - s_1)}{(s_1' + s_2')(s_1 + s_2)}$$

$$\alpha_2^{s\prime} - \alpha_2^{s} = -(\alpha_1^{s\prime} - \alpha_1^{s})$$

である。

主体的均衡の場合の変化は，社会的均衡の場合

の変化における2yを，yに置き換えたものになる。従って，道路建設投資を行なった後の配分比率の変化，および所要時間の変化に関して，社会的均衡の場合とほとんど類似の結論が得られる。すなわち，あるルートだけ投資し，道幅を拡張するならば，そのルートの交通量配分比率は，必ず大きくなる。所要時間に関しては，そのルートだけ時間が短縮されるのではなく，すべてのルートにおいて，等しく短縮される。

ここで，「Downs-Thomsonのパラドックス」(2)といわれるものがある。すなわち，新たな道路の開通は混雑する道路状況を改善するどころか悪くし，自動車によるトリップ時間は低下するどころか上昇する，というものである。

二地点間の交通量が一定であるならば，あるルートに関する一時的な状況はともかく，均衡状態において，このようなパラドックスは起こらない。もし，パラドックスのような状態が起きるとすれば，新たな道路開通により，他の地点間のトリップで，いままでこの二地点間を通過していなかったものが，ここを通過するようになるからであろう。

［注］

(1) 竹内参照。

(2) 竹内参照。

［参考文献］

竹内健蔵「代替交通機関の存在下における都市道路交通の投資・価格政策について」
1992年日本交通学会研究報告