Non divergent modelへの試み（続）

Furuoya, Izumi / 古尾谷, 泉

(出版者 / Publisher)
法政大学多摩研究報告編集委員会
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学多摩研究報告 / 法政大学多摩研究報告
(巻 / Volume)
15
(開始ページ / Start Page)
65
(終了ページ / End Page)
75
(発行年 / Year)
2000-03-30
(URL)
https://doi.org/10.15002/00003053

法政大学多摩研究報告　15：65～75, 2000

Non divergent modelへの試み（続）

古尾谷　泉

An attempt toward a non-divergent model (II)

Izumi FURUOYA

Abstract

前論文[注] では，発散積分における，発散項＋有限部分 を一つの空間の構造の中で実現することを試みたが，有限部分は，量子効果であり，dynamicsの部分である。このようなものまで，空間の構造の問題としてとらえるには無理があろう。本論文では発散項（くりこみ定数）のみを打ち消すような真空の存在を要請しよう。

なお，前論文と共通な個所は，文章に残してある。

本　論

量子電磁力学によれば，光は電子と相互作用し，電子陽電子対を生成する。摂動論を用いて，このゆらぎ，すなわち，仮想的な対生成の効果を取り入れて，電子の電荷を計算すると発散量があらわれる。観測される電子の電荷をeとすると，裸の電子の電荷 e_0 は

$$e_0^2=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{e^2}{1+\dfrac{e^2}{3\pi}ln\dfrac{\lambda^2}{m^2}}=0 \qquad (1)$$

となる。この結果は，裸の電子は電荷をもたないことを意味するが，それは，理論の出発点と明かに矛盾している。

このことは，自由場の国有ベクトルの張る空間と相互作用場の国有ベクトルの張る空間とは互いに直交している。いいかえると，固有値問題を解くのに用いる空間はHamiltonianごとに異なっていて，これらの空間を互いに結びつけるunitary変換は存在しないと主張するVan Hoveの問題や，現在の場の理論は，本質的には自由場でしかないと主張するHaagの定理等と関連して

注）多摩研究報告，第14巻，55－67

いると考えられている。Haagの定理は相互作用が現実的な意味を持つためには、現在の場の理論における4つの条件（see Appendix）のうちどれかを破らなければならないことをいっている。

この論文では、これらの欠陥が解消できるかも知れない一つの考えを提唱しよう。まず、我々は物理学における無限大とは何か。また、その意味するものは何か、という考察から始めよう。

ある光源から発した光は、真空中で有限な速さで伝播し、その値は1秒間に約30万 kmである。一方、この光源に対して速さ$v(<c)$で運行している観測者が、この光の速さを測っても、やはり同一の速さ、1秒間に約30万 kmである。そして、このことは、マイケルソン・モーレー達の実験事実[注] からの帰結である。特殊相対性理論における速度の加法法則によれば、光の速さをc、有限な速度を$v(<c)$とすると、加法を⊕、減法を⊖とかけば、aを実数として、

$$c \oplus v = c, \qquad c \ominus v = c, \qquad c \oplus c = c, \qquad c \ominus c = \text{不定}$$

$$(\infty + a = \infty\ , \qquad \infty - a = \infty\ , \qquad \infty + \infty = \infty\ , \qquad \infty - \infty = \text{不定})$$

となる。このことから、光の速さは、正に、その値は有限ではるが、しかし、無限大の性質を兼ねそなえた量であることがわかる。それでは、一体、この性質はどこから由来するのであろうか。それは、前に述べたように、光の速さは、どの観測者からみても、一定の値であるという性質によるものであろう。すなわち、光の速さが無限大の性質をもつのは、慣性系によらない恒常的な不変量であるという性質によるものであろう。

特殊相対性理論は、光速不変という対称性の上に構築された理論であり、光の速さが一定であるという時空構造の枠の中で、おこるdynamicsの理論なのである。そして、光速一定の原理が、本来、ばらばらであるはずの2つの慣性系の時空構造を結びつけているのである。

ニュートン力学は、特殊相対性理論において、光の速さcを無限大にしたときの理論であると考えてよかろう。ニュートン力学では、光の速さの測定値は有限な値であるが、理論上は無限大量なのである。すなわち、ニュートン力学は、光の速さに関して、有限量と無限大量が混在した理論であるといえよう。このような測定値は有限な値であるが、理論上は無限大である量に、粒子の電荷や、質量がある。現在の理論で、電荷や質量の値を計算すると無限大になってしまう。そして、このことは現在の理論の根幹に根ざした欠陥であると考えられている。

発散の問題は、直接には相互作用、すなわち、dynamicsの問題ではないであろう。その理由をあげよう。a) Diracは、density matrixを用いてelectronのcharge densityの計算を行っているが、彼は、その論文[1] で自由電子が占める無限に多くの負エネルギー準位（当時は空孔理論であった）についての和は光円錐上で発散するが、電子間の相互作用を取り入れると、発散の度合は、むしろ、弱められることを示している。b)現在の場の理論では、発散積分におけるprimitiveな発散

注）我々の理論には、我々の真空についての要請をうらづけるこのような実験事実は存在しない。そのような意味でsophisticatedなのである。

がおこる条件は

$N=$（分子に含まれている独立変数の数）－（分母にあらわれる独立変数の数）$\geqq 0$

であたえられる。ここでは、発散の条件は、発散積分の分子と分母とにあらわれる独立変数の数のみによって決まってしまい、これはdynamicsに直接関った問題ではない。c) 時空に anormalous な dimensionality d を導入して、発散量を cut off する modern な dimensional regularization の方法では、発散積分は、一般に、

$$\int_{\omega}^{\infty} d^d k \frac{(k^2)^{\nu}}{(k^2+M^2)^{\mu}} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} M^{2\nu-2\mu+d} \frac{\Gamma\left(\gamma-\nu-\frac{d}{2}\right), \Gamma\left(\nu+\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\mu)}, \tag{2}$$

なる形をとるが、発散はΓ関数の pole、例えば

$$\lim_{\in\to 0}\Gamma(-3+\in)=-\frac{1}{6}\lim_{\in\to 0}\frac{1}{\in}+K \tag{3}$$

として分離される。ここで、Kは有限な部分である。

これを見ても、発散は、propagatorの冪μ、と分子にあらわれる独立変数の冪ν、および anormalous な dimensionality dのみによって決まってしまう。このように考えてくると、発散の問題はdynamicsの問題というよりは、これらのdynamicsが演じられる舞台、すなわち、物理空間の構造の問題であることが予測される。

裸の電子は光との相互作用の結果、その周りに荷電した雲を作る。これがくりこみを行う理由であると考えられている。しかし、我々の真空は無限の物質性に富んでいる。このような真空では、我々の通常の常識は通用しないであろう。互に速さ$v(<c)$ですれ違う2つの慣性系から、同一の光の速さを測ったとき、両者で同一の値をうるのは宇宙が限りなく広いからであろう。そこでは我々の日常的な常識は通用しない。前述の Dirac の理論において、electron の charge density の計算の際に、無限に多くの負エネルギー準位についての和は、有限個の粒子についての和を単に拡張したものであるが、このような形式的な和が成立するものであろうか。

我々は光速と電荷とが無限大に関して、共通の類似性のあることから、以下のように考える。現在の場の理論では、ニュートン力学において光速を眺めているのと同様の視点から、電荷を眺めているのではあるまいか。その結果、測定値は有限であるのに、理論上は無限大になるという2重の性質をそなえた理論になっているのではあるまいか。相対性理論では、光の速さに関して、理論値と測定値とが、共にcで一致しているという事実から、我々は相対論的に光速を眺めるのと同様の視点から、電荷を眺める理論を構築すべきであろう、という考えをいだくものである。そのようなわけで、この論文での目的は、ニュートン力学的にではなく、相対論的立

場で電荷を眺めた理論を構築しようという試みである。すなわち、我々の新理論では、光速不変の原理に対応して、電荷はどのような系から眺めても、その値を変えてはならない恒常的な不変量であるという要請、いいかえると、電荷は相互作用によってその値を変えてはならない不変量であるという要請をおくことにしよう。

我々は、簡単な toy model を作って、我々の考えを具体的に示そう。最初は、現在の物理について述べ、次に、それをいかに修正すべきかについて述べよう。話を簡単にするために、最も簡単な場合として、boson と電磁波との相互作用系を考える。また、4次元 Minkowski 空間は次元を縮小して、2次元 Minkowski 空間とする。この空間内の一点は、(x_0, x_1)、x_0 時間座標、x_1 空間座標とし、この空間の metric は

$$\eta_{\lambda\mu}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{4}$$

とする。無限小距離は

$$-ds^2=-dx_0^2+dx_1^2, \tag{5}$$

であり、また、4元 momentum は、$u_0=\dfrac{dx_0}{ds}$, および $u_1=\dfrac{dx_1}{ds}$ として

$$E=mu_0,\ p=mu_1, \tag{6}$$

である。Eq.(5) から

$$m^2=E^2-p^2 \tag{7}$$

となる。これは energy-momentum の保存をあらわす。荷電粒子と電磁場との相互作用は (ϕ, A) を4元 potential として、(E, p) におきかえ

$$E\to E-e\phi,\ p\to p-eA, \tag{8}$$

を行えばよい。そして、これらは

$$m^2=(E-e\phi)^2-(p-eA)^2, \tag{9}$$

をみたす。proper Lorentz 変換により、(E, p) および $(E-e\phi, p-eA)$ は同一の変換

$$\begin{pmatrix}E\\ p\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}a_{00} & a_{01}\\ a_{10} & a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ p\end{pmatrix} \tag{10}$$

および、

$$\begin{pmatrix}E-e\phi\\ p-eA\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}a_{00} & a_{01}\\ a_{10} & a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E-e\phi\\ p-eA\end{pmatrix}, \tag{11}$$

をうける。しかし、当然のこととして、(E, p) から $(E-e\phi, p-eA)$ へは proper Lorentz 変換によって移行することは出来ない。これは Poincaŕe 変換の並進に対応している。

次に、我々は我々の要請、すなわち、電荷の値は相互作用によって変わることのない恒常的な不変量であるという要請を満たすように、従来（前述）の物理を修正しなければならない。そ

のために、proper Lorentz変換を含むより広い一つの対称性をもつ空間を設置して、自由粒子に相互作用をincorpolationすること、すなわち、(E, p)から$(E-e\phi, p-eA)$への移行をも、この一つの対称性をもつ空間内で実現することを考えよう。このようにして、回転（準回転、すなわち、proper Lorentz変換）と並進（相互作用）とを一つの変換として表現する数学の一例として、射影幾何学の枠組みで構成された非ユークッド幾何学がある。我々は、このclassicalな数学を借用して簡単なtoy modelを作って、我々の考えを具体的に示そう。

前述の2次元Minkowski空間を射影空間とみなせば、この空間内の一点は、同次座標で(z_0, z_1, z_2)とかける[2]。そして、この同次座標と通常の座標との関係は、$x_0=\dfrac{z_1}{z_2}$および$x_1=\dfrac{z_1}{z_2}$であたえられる。このことは、同次座標を基準にして考えれば、通常の空間は速度空間に対応していることがわかる。この空間内での、同次座標における射影変換は

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^{注)} \tag{12}$$

である。そして、この変換はabsolute

$$-z_0^2+z_1^2+z_2^2=0, \tag{13}$$

を不変にする変換であるとしよう。

このことから、行列要素、$a_{\alpha\beta}$, α, $\beta=0, 1, 2$ は

$$\begin{aligned} &-a_{00}^2+a_{10}^2+a_{20}^2=-1, \ -a_{00}a_{01}+a_{10}a_{11}+a_{20}a_{21}=0, \\ &-a_{01}^2+a_{11}^2+a_{21}^2=1, \ -a_{00}a_{02}+a_{10}a_{12}+a_{20}a_{22}=0, \\ &-a_{02}^2+a_{12}^2+a_{22}^2=1, \ -a_{01}a_{02}+a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0, \end{aligned} \tag{14}$$

を満たす。ここで、absoluteが

$$-z_0^2+z_1^0=0, \ z_2^2=0 \tag{15}$$

とdegenerateした場合には、$a_{\alpha\beta}$,α, $\beta=0, 1, 2$はproper lorentz変換（Eq.(10) or Eq.(11)）の他に

$$a_{20}=a_{21}=0, \ a_{22}=1 \tag{16}$$

となる。これより変換 Eq.(12) は

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{02} \\ a_{12} \end{pmatrix} \tag{17}$$

となる。この変換はPoincaŕe変換、すなわちproper Lorentz変換と並進とから成っている。この空間内での無限小距離は

注）正確には $\rho \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\rho \neq 0$とかくが、$\rho=1$としてある。

$$-ds^2=-dz_0^2+dz_1^2+dz_2^2 \tag{18}$$

である。Eq.(6) に対応して、この空間内での速度は

$$v_0=\frac{dz_0}{ds} \quad v_1=\frac{dz_1}{ds},\ \text{および}\ v_2=\frac{dz_2}{ds} \tag{19}$$

とおこう。応用する energy momentum は

$$E=mv_0,\ P_1=mv_1,\ \text{および}\ P_2(=mv_2), \tag{20}$$

とする。ここで、(4元)*potential*(ϕ, A) の同次座標による表現を形式的に (ϕ, A_1, A_2) として、荷電粒子と電磁場との相互作用を

$$E\to p_0=(E-e\phi),\ p_1\to P_1=p_1-eA,\ p_2\to P_2(=p_2-eA_2) \tag{21}$$

とおこう。そして、これらは absolute

$$-P_0^2+P_1^2+P_2^2=0 \tag{22}$$

を不変にするものとする。このことにより、(P_0, P_1, P_2) は Eq.(12) と同じ変換を満たす。すなわち Eq.(14) の条件のもとで

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

となる。Eq.(23) で

$$P_2'=P_2,\ \text{および}\ a_{02}=a_{12}=0 \tag{24}$$

とおけば、これは Eq.(10) および Eq.(11) の proper Lorentz 変換となる。また、

$$P_2^1=P_2、\text{および}\ a_{02}=-e\phi,\ a_{12}=-eA_1,\ a_{00}=a_{11}=1,\ a_{01}=a_{10}=0 \tag{25}$$

とおけば、

$$P_a^1=E-e\phi,\ \text{および}\ P_1^1=P_1-eA \tag{26}$$

であり、これは Eq.(8) であり、従来の理論における相互作用となる。つまり、我々の model では、変換行列 Eq.(23)、すなわち

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{00} & a_{01} & a_{12} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{array}\right) \quad , \tag{23}$$

において、左上の2×2行列は preper Lorentz 変換をあらわし、右上の2×1行列は相互作用に対応している。

このようにして、我々の model では、相互作用の効果は、行列要素 (a_{20}, a_{21}, a_{22}) に変化をきたし、これにより z_2 成分に変化が生ずる。この結果、我々の model では空間に歪みが生ずることになる。しかし、この歪みは、極めて小さいであろう。少なくとも、現在のエネルギー領域で、この変化を示す決定的な実験事実はないように思う。

また、このような相互作用のより広い空間への拡張の仕方には、これ以外にも、いろいろな可能性が考えられよう。しかし、このことは、本来、実験事実に基づいてなされるべきものである。将来、得られる超高エネルギーに期待しよう。

ここで、注意すべきは、我々は歪んだ空間を考えてはいるが、我々は宇宙論を議論しているわけではない。したがって、系全体の energy や momentum は厳密に保存されなければならない。そのためには、z_0, z_1, およびz_2軸方向への並進運動は許容されなければならない。z_2軸方向への並進には、どのような保存量が対応するのかは明かではないが、このことに関しては、これ以上議論しない。

我々の変換群は non compact な変換群であり、このような群は取り扱いがめんどうである。しかし、このような群にも、irreducible な unitary 表現は存在し、また、invariant な bilinear form の存在も知られている。

今、自由粒子の状態をψ_0、変換群、Eq.(23) の unitary 表現をTとすると相互作用している粒子の状態は、$\psi=T\psi_0$, $T^+T=TT^+=1$、である。相互作用している粒子の電荷をρ, 自由粒子の電荷をρ_0とすると

$$\rho=e<\psi|\psi>=e_0<\psi_0|\psi_0>=\rho_0 \tag{27}$$

となり、我々の model では相互作用によって、電荷の値は変わることはないのである。このことは、相互作用による電荷の増加量を$\delta\rho$とかけば、Eq.(27) は

$$\rho_0+\delta\rho=\rho_0 \tag{28}$$

となる。このことから、ρ_0は光と同様、無限大の性質をそなえていることになる。

次に、我々は、この歪んだ空間に擬距離を導入しよう。Absolute Eq.(13) 内の2点を$A(y_0, y_1, y_2)$および$B(z_0, z_1, z_2)$とすれば、直線ABが Absolute と交る2点は、

$$-(y_0+\lambda z_0)^2+(y_1+\lambda z_1)^2+(y_2+\lambda z_2)=0 \tag{29}$$

の2つの解λ_1およびλ_2を用いて、

$P(y_2+\lambda_1 z_0, y_1+\lambda_1 z_1, y_2+\lambda_1 z_2)$および$Q(y_0+\lambda_2 z_0, y_1+\lambda_2 z_1, y_2+\lambda_2 z_2)$とあらわされる。そして、この空間内の（擬）距離$X$は、これら4点の複比$(ABPQ)$の対数で定義される、さらに、$X$は$\lambda_1$と$\lambda_2$とであらわすことが出来る。

$$X=\frac{K}{2}ln(ABPQ)=\frac{K}{2}ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{30}$$

ここで、Kは定数で、この空間の曲率半径である。また、$\frac{1}{2}$は便宜上のものである。このようにして、距離を導入すると、直交座標を設置することが出来る。Fig.1 のように座標系をとれば、空間内の一点$P(z_0, z_1, z_2)$は距離X_0とX_1とであらわすことが出来る。

$$(zz)=-z_0^2+z_1^2+z_2^2=1 \tag{31}$$

と規格化すると

$$z_0 = sh\left(\frac{X_0}{K}\right) \quad ,$$
$$z_1 = ch\left(\frac{X_0}{K}\right) s\left(\frac{X_1}{K}\right) \quad , \qquad (32)$$
$$z_2 = ch\left(\frac{X_0}{K}\right) c\left(\frac{X_1}{K}\right) \quad ,$$

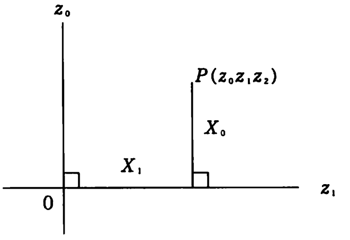

Fig.1

とあらわされる。更に、Grenz kreis koordinaten (ξ, η) は (X_0, X_1) と

$$exp\left(-\frac{\xi}{K}\right) = exp\left(-i\frac{X_1}{K}\right) ch\left(\frac{X_0}{K}\right) \qquad (32)$$
$$\frac{i\eta}{K} = exp\left(i\frac{X_1}{K}\right) th\left(\frac{X_0}{K}\right)$$

と関係づけられる。

無限小距離は

$$-K^2 ds^2 = K^2(-dz_0^2 + dz_1^2 + dz_2^2)$$
$$= -dX_0^2 + ch^2\left(\frac{X_0}{K}\right) dX_1^2$$
$$= -d\xi^2 + e^{-\frac{2\xi}{K}} d\eta^2, \qquad (33)$$

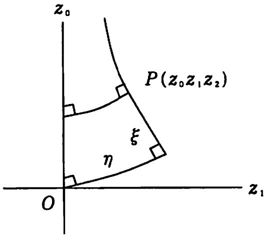

Fig.2

となる。

我々の model space では（擬）距離と角とは双対概念であり、角は距離とみなすことが出来るし、また、逆に距離は角とみなすこともできる。この性質を使って、momentum space に距離を導入しよう。

まず、その前に、momentum space における同次座標 (p_0, p_1, p_2) は線同次座標と同一視できることを示そう。次の量

$$-p_0 x_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0 \qquad (34)$$

は射影変換 Eq.(12) と Eq.(23) のもとで不変量である。Eq.(34) は同次座標であらわされた直線の方程式であり、このことから (p_0, p_1, p_2) は射影空間における線同次座標と同一視できる。したがって、momentum space に角、すなわち距離を導入することが出来る。

R と Q は点 M を通る absolute Eq.(22) への接線とする。また、$C(p_0, p_1, p_2)$ と $D(q_0, q_1, q_2)$ とは M を通る2直線とすると、M を通る直線束は μ をパラメータとして $(p_0+\mu q_0, p_1+\mu q_1, p_2+\mu q_2)$ とかける。接線 R と Q をあたえる μ の値は

$$-(p_0+\mu q_0)^2 + (p_1+\mu q_1)^2 + (p_2+\mu q_2)^2 = 0 \quad , \qquad (35)$$

の解μ_1とμ_2であたえられる。momentum spaceにおける距離を

$$Y=\frac{K}{2}ln(CDRS)=\frac{K}{2}ln\frac{\mu_2}{\mu_1} \qquad (36)$$

と定義する。

このようにして、距離が導入されたので、点座標系のときと同様にして、momentum spaceにも、直交座標系を導入することが出来る。

$$p_0=sh\left(\frac{Y_0}{K}\right) \quad ,$$
$$p_1=ch\left(\frac{Y_0}{K}\right)s\left(\frac{Y_1}{K}\right) \quad , \qquad (37)$$
$$p_2=ch\left(\frac{Y_0}{K}\right)c\left(\frac{Y_1}{K}\right) \quad ,$$

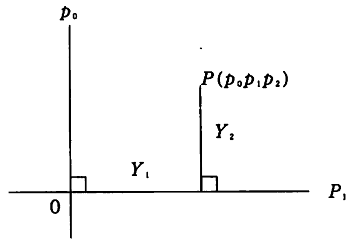

Fig.3

更にGrenz kreis coordinate(E, P)は(Y_0, Y_1)と

$$exp\left(-\frac{E}{K}\right)=exp\left(-i\frac{Y_1}{K}\right)ch\left(\frac{Y_0}{K}\right) \qquad (38)$$
$$i\frac{P}{K}=exp\left(i\frac{p_1}{K}\right)th\left(\frac{Y_0}{K}\right)$$

と関係づけられる。

このことから、momentum spaceにおける無限小距離は

$$-K^2dp^2=K^2(-dp_0^2+dp_1^2+dp_2^2)$$
$$=-dY_0^2+ch^2\left(\frac{Y_0}{K}\right)dY_1^2 \qquad (39)$$
$$=-dE^2+e^{-\frac{2E}{K}}dP^2 \quad ,$$

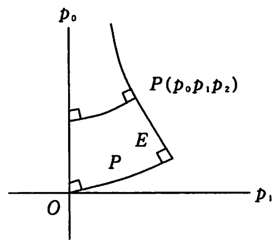

Fig.4

したがって、momentum spaceにおける体積要素は

$$dV=e^{-\frac{E}{K}}dEdP \quad , \qquad (40)$$

であたえられる。もし、Eをenergyとみなせば、Appendixにおける要情2）からEはnon-negitive

$$E\geqq 0 \quad , \qquad (41)$$

である。

我々は、dynamicalなeventの行われる舞台、すなわち、物理空間の準備ができた。しかし、我々のmodelにおけるfermionやbosonのpropagatorの具体的な形や、Feyman図における計算式の立て方、等を知らないのでdivergenceが、消去されているということが完全に証明されたわけではない。しかし、もし、発散積分のintegrandが何かある有理関数よりも、増加する割合がおそければ、momentumのvolume elementにおけるfactor $e^{-\frac{E}{K}}$の働きによって、完全に発散はおさえられる。しかし、以後の研究を待たねば正確なことはいえない。

発散積分から発散を取り除いた残りの有限な部分は、量子効果、すなわち、dynamicsの部分である。これらのよく知られた例は、Lamb shiftや電子のanormalous magnetic momentなどである。また、電磁量子力学（Abelian gauge theory）におけるchargeのscreeningや色量子力学（non-Abelian gauge theory）におけるcoupling constantのanti-screeningなどはその例である。我々のmodelでは、これらはどのようにreproduceされるかは明らかではない。しかし、ここで、強調しておきたいのは、我々のmodelは現在の理論を含んでいるということであり、$K\to\infty$のとき、我々のmodelは現在の理論に移行するということである。したがって、我々のmodelにおいても当然、これらの現象は再現できるはずである。

我々は、これまで、赤外発散については、何も議論してこなかった。我々のmodelは、超高エネルギー領域でなければ、通常の理論と異なることはないと考えてよいであろう。したがって、このような低エネルギーの現象では、赤外発散を消去するこれまでの手法が、十分適用できると考えてよいであろう。

次に、粒子の質量について考えよう。電子のように、直接観測にかかる粒子では、その質量は、propagatorのpoleによって定義される。しかし、quarkはhadron内にconfineされており、physical particleとして、直接には観測にかからない。したがって、pole massの意味もあいまいであり、perturbationの成立する枠内でのみ意味を持つ。quark massの定義には、いろいろあるが、その値は、quark massの定義によって異なり、また、計算に使われたrenormalization schemeによっても異なる。素粒子の質量については、neutrinoを除いた、他のlepton、up guarkおよびdown quarkの質量を、それぞれ、世代についてplotすると、ほぼ、直線上にのることはよく知られている。第1、第2および第3世代の質量を、それぞれ、M_1, M_2およびM_3とかけば、Eq.(36) より、$\mu_1=M_1^2$, $\mu_2=M_2^2$とおき、更に、第2、第3世代についても同様のことをくり返せば、素粒子の質量は、

$E=\dfrac{K}{2}dn$ とおいて

$$M_n=M_1e^{dn},\ n=0,\ 1,\ 2$$

とかける、ここで、αとM_1の値は各種によって異なるが、このようにして、我々のmodelでは素粒子の質量は簡単な式によって、現象論的に説明できる。

我々のmodelでは、momentum spaceにおけるexponential factor　$e^{-\frac{E}{K}}$, $E\geqq 0$, が存在するので、積分の発散がおさえられるであろうと予測される。しかし、我々のmodelにおけるFeyman図や、対応する計算の手法が確立されていないので、発散が生じないことが厳密に証明されているわけではない。しかし、少なくとも、被積分関数が、なんらかの有理関数よりも、増加の割合が小さければ、厳密に発散は生じないといってよい。

Appendix

Haagの定理。どんな場の理論であっても、次の4つの性質をもてば、その理論は自由場の理論と等しい。

1) Poincaré変換の変換性

2) unique, normalizable, invariantな真空が存在し、negative energy state　は存在しない。

3) 同時刻におけるcanonical commutation relationが存在する。

4) ある時刻において、自由場と結びつくunitary変換が存在する。

References

1) P.A.M. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soci, 30(1934), 150.

2) 皆川多喜造著. 射影幾可（近代数学新書), 至文堂