

Non divergent modelへ

Furuoya, Izumi / 古尾谷, 泉

(出版者 / Publisher)

法政大学多摩研究報告編集委員会

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学多摩研究報告 / 法政大学多摩研究報告

(巻 / Volume)

14

(開始ページ / Start Page)

55

(終了ページ / End Page)

67

(発行年 / Year)

1999-03-30

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00003052>

Non divergent modelへ

古尾谷 泉*

An attempt toward a non-divergent model

Izumi FURUOYA

Abstract

発散の問題や van Hove の unitary equivalence の問題等について、矛盾のない理論が作り得る可能性のある一つの考えを提唱する。物理学における無限大とは何か？。その考察から得られた真空についての要請に基づいて、簡単な toy model を作り、我々の考えを具体的に示す。我々の model では電荷の値は、相互作用によって変わることのない恒常的不変量であると仮定される。電荷の真空による screening (Abelian gauge theory) および antiscreening (non Abelian gauge theory) について、我々の model で解釈する。renormalization group equation における基本的な変量、 $\ln \frac{Q^2}{\mu^2}$ は、我々の model では（擬）距離に対応することを示す。我々の model の grand unified theory への拡張について議論する。

本 論

量子電磁力学によれば、光子は電子と相互作用し、電子－陽電子対を生成する。摂動論を用いて、このゆらぎ、すなわち、仮想的な対生成の効果を取り入れて、電子の電荷を計算すると発散量があらわれる。観測される電子の電荷を e とすれば、裸の電子の電荷 e_0 は

$$e_0^2 = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{e^2}{1 + \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}} = 0. \quad (1)$$

となる。この結果は、裸の電子は電荷をもたないことを意味するが、それは理論の出発点と明らかに矛盾している¹⁾。

このことは、自由場の固有のベクトルの張る空間と相互作用場の固有ベクトルの張る空間と

* 法政大学経済学部

が互に直交している。いいかえると、固有値問題を解くのに用いる空間は Hamiltonian ごとに異なっていて、これらの空間を互に結びつける unitary 変換は存在しないと主張する van Hove の問題や、現在の場の理論は、本質的には自由場でしかないと主張する Haag の定理等と関連していると考えられている。Haag の定理は、相互作用が現実的な意味をもつためには、現在の場の理論における基本的な4つの条件 (see Appendix) のうちのどれかを破らなければならないことをいっている²⁾。

この論文では、これらの欠陥が解消できるかもしれない一つの考えを提唱しよう。

まず、我々は物理学における無限大とは何か、また、その意味するものは何か、という考察から始めよう。

ある光源から発した光は、真空中で、有限な速さで伝播し、その値は1秒間に、ほぼ30万 km である。一方、この光源に対して速さ $v(<c)$ で運行している観測者が、この光の速さを測ったとしても、やはり同一の速さ、1秒間に30万 km である。そして、このことは、マイケルソン・モーレーの実験事実からの帰結である。特殊相対性理論における速度の加法法則によれば、光の速さを c 、有限な速さを $v(<c)$ とすると、加法を $\oplus$ 、減法を $\ominus$ とかけば、

$$c \oplus v = c, \quad c \ominus v = c, \quad c \oplus c = c, \quad c \ominus c = \text{不定}$$

$$(\infty + \text{有限値} = \infty), \quad (\infty - \text{有限値} = \infty), \quad (\infty + \infty = \infty), \quad (\infty - \infty = \text{不定})$$

となる。(比較のため、実数における、無限大の演算を対応して下にかいた。) このことから、光の速さは、正に、その値は有限ではあるが、しかし、無限大の性質を兼ねそなえた量であることがわかる。すなわち、光の速さは、無限大と有限との2つの性質を同時にそなえた物理量なのである。それでは、一体、この性質はどこから由来するのであろうか。それは、前に述べたように、光の速さは、どの観測者からみても、一定の値であるという性質によるものであろう。すなわち、光の速さが無限大の性質をもつのは、慣性系によらない恒常的な不変量である、という性質によるものであろう。

そして、光速不変という対称性の上に構築された理論が特殊相対性理論であることは、物理学を学んだ者ならだれでもが知るところである。特殊相対性理論では、光速不変の原理が、本来、ばらばらであるはずの2つの慣性系の時空構造を結びつけているのである。

ニュートン力学は、特殊相対性理論において、光の速さ c を、おおよそにおいて無限大にしたときの理論であると考えてよからう。ニュートン力学では、光の速さの測定値は有限な値をもつが、理論上では無限大量なのである。すなわち、ニュートン力学は、光の速さに関して、有限量と無限大量とが、混在した理論であるといえよう。

このような測定値は有限な値をもつが、理論上は無限大である量に電荷がある。現在の理論で電荷の値を計算すると無限大になってしまう。そして、このことは現在の理論の根幹に根ざ

した欠陥であると考えられている。電荷は coupling constant というように、本来は定数のはずであった。しかし、量子電磁力学によれば、電荷の値は transferred 4-momentum の値により、変わってしまう。そのようなわけで、coupling constant という呼び名は、今では歴史的な意味あいしかなくなってしまっている。しかし、現在の理論は完全な理論とはいえない。

我々は、光速と電荷とが無限大に関して共通の類似性のあることから、以下のように考える。現在の場の理論では、ニュートン力学における光速と同様な視点から、電荷をみているのではなかろうか。その結果、測定値は有限量であるのに、理論上は無限大になっているという2重の性質をそなえた理論になっているのではあるまいか。我々は、相対性理論的に光速をみるのと同様の視点から、電荷を眺める理論を構築すべきであろうという考えをいただくものである。そのようなわけで、この論文での目的は、ニュートン力学的ではなく、相対論的立場から電荷を眺めた理論を構築しようという試みである。すなわち、我々の新理論では、光速不変の原理に対応して、電荷は、どのような系から眺めても、その値を変えてはならない恒常的な不変量であるという要請、いいかえると、電荷は相互作用によってその値は変ってはならない不変量であるという要請をおくことにしよう。

光子は電子との相互作用を通して、仮想的に電子-陽電子対を生成する。したがって、電子が存在すると、物質性に豊んだ真空は電子の周りに偏極をおこす。その結果、真空による電子の電荷の screening がおき、真空の“誘電率”は1とは異なると考えられる。しかし、我々の model では、上述の要請により、真空の“誘電率”は常に1である。我々の物理的真空は無限の物質性に豊んでいる。このような真空では、我々の通常の常識は、通用しないであろう。互に速さ v ですれ違う2つの慣性系から、同一の光の速さを測ったとき、両方で同一の値をうるのは、宇宙が限りなく広いからであろう。そこでは、我々の日常的な常識は通用しない。我々の model では、電子の電荷は常に一定なのだから、無限に物質性に豊んだ真空が“歪”んで screening をうち消すように作用するものと考えるべきであろう。その結果、energy-momentum の scale が、系の energy の状態によって異なること許さなければならないであろう。したがって、真空での Lorentz 変換は、相互作用場では、わずかではあるがずれることが予想される。(このことは Appendix における、4条件のうち a) と d) とを破ることになる)。現在の場の理論における自由場は、単に理論を展開するための便利な基底にすぎない。これらは、物理的測定量のよい近似をあたえるが、それらとは直接には関係のないものである。もし、Farady の時代に、高度に精密な測定が可能であったとしたら、Maxwell は電磁波の方程式をどのような形に定式化したであろうか。Maxwell はさぞ困惑したのではあるまいか。

我々は上述の考えを具現化しなければならない。しかし、このことを遂行しようとする大変な困難につきあたってしまう。現在の理論は、不完全であるとはいっても、すばらしく成功

した面もあり（例えば、Lamb shift や電子の anomalous magnetic moment 等の計算値は驚くほどの精度で実験値を再現している¹⁾）。現在のエネルギー領域で、測定値との決定的な破れも見い出されていないようである。そのため、新しい理論を構築しようとしても足がかりとなる実験的な事実が見あたらないからである。そのようなわけで、我々の理論はいささか sophisticated な理論にならざるを得ないのである。ここでは、我々の考えを明確にするために、簡単な toy model を作って、具体的に説明しよう。そのようなわけで、ここでの議論は考え方の説明に主眼をおくもので、現実の物理に対応しない面もあることを了承されたい。

まずは、現代の理論の枠組みを記述し、それをいかに修正すべきかについて述べよう。話を簡単にするために、4次元 Minkowski space は次元を縮小して、2次元 Minkowski space とする。この空間内の一点は (x_0, x_1) であらわされる。ここで、 x_0 は時間成分、 x_1 は空間成分である²⁾。この空間の metric tensor は、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

とする。無限小距離は

$$-ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 \quad (3)$$

である。(4元)速度は

$$v_0 = \frac{dx_0}{ds}, \quad v_1 = \frac{dx_1}{ds}, \quad (4)$$

である。また、(4元) energy momentum は、 m を粒子の質量として

$$E = mv_0, \quad P = mv_1, \quad (5)$$

である。Eq.(3) から

$$m^2 = E^2 - p^2, \quad (6)$$

となる。これは energy momentum の保存法則をあらわす。荷電粒子と電磁場との相互作用は、 (ϕ, A) を (4元) 電磁ポテンシャルとして、 (E, p) に置き換え

$$E \rightarrow E - e\phi, \quad p \rightarrow p - eA, \quad (7)$$

を行えばよい。そして、これらは

$$m^2 = (E - e\phi)^2 - (p - eA)^2, \quad (8)$$

をみtas。proper Lorentz 変換により、 (E, p) および $(E - e\phi, p - eA)$ は、同一の変換

$$\begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix} \quad (9)$$

注) 自然単位、 $c=1$, $\hbar=1$ を採用。

および

$$\begin{pmatrix} E - e\phi \\ p - eA \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E - e\phi \\ p - eA \end{pmatrix} \quad (10)$$

をうける。ここで、行列要素 (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$ は

$$\begin{aligned} a_{00}^2 - a_{10}^2 &= 1, \quad a_{00}a_{01} - a_{10}a_{11} = 0, \\ a_{01}^2 - a_{11}^2 &= -1, \end{aligned} \quad (11)$$

をみたす。しかし、当然のこととして、 (E, p) から $(E - e\phi, p - eA)$ へは proper Lorentz 変換によって移行することは出来ない。この移行は Poincaré¹ 変換の並進に対応している。

そこで、我々は我々の要請、すなわち、電荷の値は相互作用によって、変わることはない恒常的な不変量である、という要請をみたすように従来（前述）の物理を修正しなければならない。そのために、proper Lorentz 変換を含むより広い一つの対称性をもつ空間を設置して、自由粒子に相互作用を incorporation する仕方、すなわち、 (E, p) から $(E - e\phi, p - eA)$ への移行をも、その空間内で実現することを考えよう。このような回転（正確には準回転、すなわち、proper Lorentz 変換）と並進（相互作用の incorporation）とを一つの変換として表現する数学の一例として、射影幾何学の枠組で組み立てられた非ユークリッド幾何学がある。我々はこの classical な数学を借用して、簡単な toy model を作って、我々の考えを具現化しよう。

従来の空間（前述の 2 次元 Minkowski space）に相互作用に対応する付加する extra な空間を 1 次元とし、これら 2 つの空間を同時に含む 3 次元空間を考えて、この空間内での物理を考えよう。

2 次元射影空間内の一点は同次座標で (x_0, x_1, x_2) とあらわされる^(注 3)。この空間内での射影変換は、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

とする。そして、この変換は Absolute

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad (13)$$

を不変にする変換であるとする。この条件から、行列要素、 $a_{\alpha\beta}$, $\alpha\beta = 0, 1, 2$ は

$$\begin{aligned} -a_{00}^2 + a_{10}^2 + a_{20}^2 &= -1, \quad -a_{00}a_{01} + a_{10}a_{11} + a_{20}a_{21} = 0, \\ -a_{01}^2 + a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \quad -a_{00}a_{02} + a_{10}a_{12} + a_{20}a_{22} = 0, \\ -a_{02}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1, \quad -a_{00}a_{02} + a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

を満す。この空間内での無限小距離は

$$-ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 \quad (15)$$

注) 正確には、 ρ を定数として $(\rho x_0, \rho x_1, \rho x_2)$ と書くが、 $\rho = 1$ とおく。

である。Eq. (4) に対応して、この空間での速度は、

$$v_0 = \frac{dx_0}{ds}, v_1 = \frac{dx_1}{ds}, v_2 = \frac{dx_2}{ds}, \quad (16)$$

とおこう。対応する energy momentum は

$$E = mv_0, P_1 = mv_1, P_2 (= mv_2), \quad (17)$$

とする。ここで、(4元) potential(ϕ, A) の同時座標による表現を(ϕ, A_1, A_2) とする。そして、荷電粒子と電磁場との相互作用の incorporation を

$$E \rightarrow P_0 = E - e\phi, p_1 \rightarrow P_1 = p_1 - eA_1, p_2 \rightarrow P_2 = p_2 - eA_2, \quad (18)$$

とおこう。そして、これらは

$$-m^2 = -P_0^2 + P_1^2 + P_2^2, \quad (19)$$

をみたすものとする。また、この(P_0, P_1, P_2) は Eq.(14) の条件のもとで、Eq.(12) と同じ変換

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

をみたすものとしよう。Eq.(20) で

$$P_2' = P_2, \text{ および } a_{02} = a_{12} = 0 \quad (21)$$

とおけば、変換行列は

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{00} & a_{01} & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad (22)$$

となり、これは Eq.(9) および Eq.(10) の proper Lorentz 変換となる。また、

$$P_2' = P_2 = 1, \text{ および } a_{02} = -e\phi, a_{12} = -eA_1, a_{00} = a_{11} = 1, a_{01} = a_{10} = 0 \quad (23)$$

とおけば

$$P_0' = E - e\phi \text{ および } P_1' = p_1 - eA_1 \quad (24)$$

であり、これは Eq.(7) と同じ、従来の理論における相互作用である。つまり、我々の model では Eq.(20) の変換行列

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \quad (25)$$

において、左上の 2×2 行列は proper Lorentz 変換をあらわし、右上の 2×1 行列は相互作用に対応している。このようにして、我々の model では、相互作用の効果を行列要素(a_{20}, a_{21}, a_{22}) の値の変化でおきかえられるのである。このことは、更に、相互作用の効果は、第3軸(x_0 軸)の成分の値の変化であらわされることを意味している。そして、この変化により空間に“歪み”が生ず

るであろうと考えるのである。このようなより広い空間への相互作用の拡張の仕方には、上述の方法以外にも、いろいろな可能性が考えられよう。しかし、このことは本来、実験事実に基づいて決定されるべきであろう。将来、得られる超高エネルギーの物理に期待しよう。

ここで注意しておきたいのは、我々の model における空間の“歪み”は相互作用（例えば電子の存在による）の効果によるものであり、我々は宇宙論を議論しているわけではない。したがって、系全体の energy や momentum は厳密に保存されなければならない。そのためには、 x_0, x_1 および x_2 方向の並進運動は許容されなければならぬ。extra な成分 x_2 方向の並進はどのような保存量に対応するかは明らかではないが、これ以上の議論はここでは行わない。

我々の理論は本質的には自由場の理論である。したがって、van Hove の問題や、Haag の定理等には何んら矛盾を帰さないであろう。

我々の変換群は、proper Lorentz 変換を含んでいるので、non compact な変換群である。このような群は取り扱いが大変めんどろである。しかし、proper Lorentz 群にも irreducible な unitary representation は存在し、invariant な bilinear form^{3b)} が存在することも知られている⁴⁾。

今、自由粒子の状態を Ψ_0 、変換群 Eq.(20) の unitary representation を T とすれば、相互作用をしている粒子の状態 Ψ は、 $\Psi = T\Psi_0$ 、 $T^*T = TT^* = 1$ 、であり、相互作用している粒子の電荷を ρ 、自由粒子の電荷を ρ_0 とすれば

$$\rho = e \langle \Psi | \Psi \rangle = e \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = \rho_0 \quad (26)$$

となり、我々の model では相互作用によって電荷の値は変わることはないのである。もし、 $\rho = \rho_0 + d\rho$ とかけば、Eq.(26) は

$$\rho_0 + \delta\rho = \rho_0$$

であり、 ρ_0 は、光の速さの加法法則に対応して、無限大の性質をもてることになる。

次に、我々はこの歪んだ空間に(擬)距離を導入しよう³⁾。Absolute (Eq.(13)) 内の 2 点を $A(x_0, x_1, x_2)$ および $B(y_0, y_1, y_2)$ とすれば、直線 AB が Absolute と交る 2 点は、 λ_1 および λ_2 をこれらの 2 点に対応する parameter とすれば、 $P(x_0 + \lambda_1 y_0, x_1 + \lambda_1 y_1, x_2 + \lambda_1 y_2)$ および $Q(x_0 + \lambda_2 y_0, x_1 + \lambda_2 y_1, x_2 + \lambda_2 y_2)$ とあらわすことが出来る。そして、この幾何空間内の(擬)距離 X は、これら 4 点の複比 $(ABPQ)$ の対数で定義される。さらに、この X は、 $\lambda_{i,i=1,2}$ であらわすことが出来る。

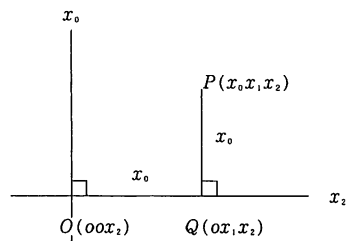


Fig.1

注) $(Tgf, Tgh) = (f, h)$.

$$X = \frac{K}{2} \ln(ABPQ) = \frac{K}{2} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad (27)$$

ここで、 K は定数で、この空間の曲率半径である。また、 $\frac{1}{2}$ は便宜上のものである。このようにして距離を導入すると、直交座標を設置することが出来る。Fig.(1)のように、座標系をとれば、空間内の一点 $P(x_0, x_1, x_2)$ は距離 X_0, X_1 であらわすことが出来る。これらは条件

$$(xx) \equiv -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad (28)$$

のもとで

$$\begin{cases} x_0 = sh\left(\frac{X_0}{k}\right), \\ x_1 = ch\left(\frac{X_0}{k}\right)s\left(\frac{X_1}{k}\right), \\ x_2 = ch\left(\frac{X_0}{k}\right)c\left(\frac{X_1}{k}\right), \end{cases} \quad (29)$$

とあらわされる。更に、Grenzkreiskoordinaten ($\xi\eta$)を導入すれば、これらは、直交座標(x_0, x_1)と

$$\begin{aligned} e^{\frac{\xi}{k}} &= e^{-\frac{x_1}{k}} ch\left(\frac{X_0}{K}\right) \\ \frac{i\eta}{K} &= e^{\frac{x_1}{k}} th\left(\frac{X_0}{K}\right), \end{aligned}$$

で関係づけられる。したがって、無限小距離は

$$\begin{aligned} -K^2 ds^2 &= K^2 (-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2) \\ &= -dX_0^2 + ch^2\left(\frac{X_0}{K}\right) dX_1^2 \\ &= -d\xi^2 + e^{-\frac{\xi}{K}} d\eta^2, \end{aligned} \quad (31)$$

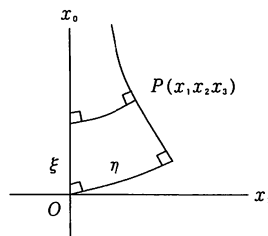


Fig.2

となる。

次に、真空による電荷の screening は、我々の model ではどのように解釈されるであろうか、そのことについて考えよう。

量子電磁力学 (Abelian gauge theory) では、running coupling constant $\alpha(\Lambda^2) \left(\equiv \frac{e^2}{4\pi} \right)$ は、 $\Lambda^2 \gg m^2$ では

$$\begin{aligned} \alpha(\Lambda^2) &= Z_3 \alpha \\ Z_3 &= 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

であたえられる⁵⁾。この式は、 $\alpha(\Lambda^2)$ の実効的な大きさは、 (Λ^2) が大きい程、すなわち、短距離ほど、増大することを示している。真空は、誘電体と同じように作用し、virtual な electron-positron pair creation による screening が生じ、coupling constant の実測値は電荷に近づくほど、大きくなると考えられる。電媒質中の2つの電荷 e の間の potential は誘電率を ϵ とすれば、(静電単位で)

$$V = \frac{e^2}{r\epsilon} \quad (33)$$

である。我々の model では、 e は不変量であり、空間の歪みがこれを補うと考えているのであるから、実効的な距離を r' とすると

注) $sh(x) = \sinh(x)$, $ch(x) = \cosh(x)$, $s(x) = \sin(x)$, $c(x) = \cos(x)$ および $th(x) = \tanh(x)$

$$r^i = \epsilon r \quad (34)$$

となるべきであろう。Eq.(31) より、相互作用による平坦な空間からのずれは、 $e^{-\frac{\xi}{K}}$ であらわされるから、ほぼ、

$$e^{-\frac{\xi}{K}} \simeq \epsilon \simeq Z_3^{-1}, \quad (35)$$

が成り立つと考えてよいであろう。これより、 $e^{-\frac{\xi}{K}} \simeq 1 + \frac{\xi}{K}$ と近似すれば、

$$1 + \frac{\xi}{K} \simeq 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \quad (36)$$

であり、したがって、

$$\xi \simeq K' \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}, \quad (37)$$

但し、 $K' = \frac{\alpha}{3\pi} K$, となる。 $K \gg \xi$ のとき、 $X_0 \sim \xi$ であることを考慮し、 $\lambda_1 \sim \frac{1}{\Lambda^2}$, $\lambda_2 \sim \frac{1}{m^2}$ とおいて、Eq.(37) を長さの次元をもつ量でおきかえると

$$X_0 \simeq K' \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad (38)$$

とかける。これは、我々の model における (擬) 距離の式、Eq.(27) と同じ形である。

non Abelian gauge theory に対しては、

$$\alpha(\Lambda^2) = \alpha(\mu^2) \left(1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{12\pi} (N - 2f) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right), \quad (39)$$

であたえられる⁵⁾。ここで、 $\alpha(\mu^2)$ は $\alpha(\Lambda^2)$ の“基準点”である。数値 N は、gluon loop からの寄与で理論に含まれている特定な群による。 $SU(3)$ gauge group ならば $N=33$, $SU(2)$ gauge group ならば、 $N=22$ である。 f は quark flavour の数であり、 $-2f$ は quark loop からの寄与である。 $N - 2f > 0$ ならば、 Λ^2 が大きくなると、 $\alpha(\Lambda^2)$ は減少する (漸近自由性)。このことを我々の model で考えると、まず、 $\ln \frac{\Lambda^2}{m^2}$ の前の符号が Abelian gauge theory の場合と異なるから、曲率の符号が異なると考えられよう。更に、gauge group の違いによって、 $N - 2f$ の値が異なるから、空間の“歪み”も gauge group によって異なると考えられよう。

grand unified theory への拡張は大変興味があり、また、最も重要な問題であろう。というのは、electro weak theory における $SU(2) \times U(1)$ gauge の coupling constant と color gauge theory における $SU(3)$ gauge の coupling constant の3つの coupling constant の値が、unified scale ($\sim 10^{16} \text{ GeV}$) において等しくなり、単一の unified gauge group の coupling constant に統合されると考えられているからである⁶⁾。

この拡張を行うためにまずは、基礎的な方程式に使われる基本的な演算子を定義しよう。この空間での d' Alembertian、すなわち、Eq.(12) の変換群に対する Casimir Operator は、同次座標であらわせば、Eq.(28) の条件、すなわち、

$$(x \cdot x) \equiv -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad (28)$$

の条件のもとで、 $\partial_\lambda \equiv \frac{\partial}{\partial x_\lambda}$, $\lambda = 0, 1, 2$, とし

$$\square^2 \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu, \quad (40)$$

但し

$$\eta^{\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

とおくのが自然であろう。これを（擬）距離であらわせば

$$\square^2 = k^2 \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{1}{k} \frac{s(x_0)}{c(x_0)}, \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{1}{c^2(x_0)}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right), \quad (42)$$

となる。

fermion に対する Dirac operator は Eq.(40) を線型に分解して、Eq.(28) の条件のもとで

$$D \equiv r^{\lambda} \partial_{\lambda}, \quad (43)$$

但し、ここで $r^{\lambda}, \lambda=0,1,2$ は、例えば具体的には

$$r^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, r^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

とおけばよいであろう。

gauge 変換は同次座標上で考えよう。

i) $U(1)$ gauge に対しては、covariant derivative を、 $A_{\lambda}, \lambda=0,1,2$ を gauge 場として、

$$D_{\lambda} \phi(x) = (\partial_{\lambda} + ie A_{\lambda}(x)) \phi(x), \quad (45)$$

とおこう。gauge 変換

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha(x)} \phi(x), \quad (46)$$

のもとで、 $A_{\lambda}(x)$ は

$$A_{\lambda}'(x) = A_{\lambda}(x) - \frac{1}{e} \partial_{\lambda} \alpha(x) \quad (47)$$

と変換する。Eq.(19) は、 $D_{\lambda} \phi(x)$ であらわせば

$$\eta^{\mu} (D_{\lambda} \phi(x))^* (D_{\mu} \phi(x)) = m^2, \quad (48)$$

とかける。

ii) $SU(2)$ gauge に対しては、covariant derivative は、

$$D_{\lambda} \Phi(x) = (\partial_{\lambda} + ig' B_{\lambda}(x)) \Phi(x), \quad (49)$$

とおく。gauge の変換は

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{pmatrix}' = U \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{pmatrix} \quad (50)$$

とおく。ここで、 U は 2×2 行列で

$$U = e^{i\alpha(x)}, \quad (51)$$

但し、
$$T \cdot \alpha(x) = \tau^1 \alpha^1(x) + \tau^2 \alpha^2(x) + \tau^3 \alpha^3(x), \quad (52)$$

であり、具体的には

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (53)$$

とおけばよい。この変換のもとで、gauge 場 $B_\lambda(x)$, $\lambda=0,1,2$ は、

$$B'_\lambda(x) = U B_\lambda(x) U^{-1} + \frac{1}{g'} (\partial_\lambda U) U^{-1}, \quad (54)$$

と変換する。Eq.(19) に対応して、 $D_\lambda \phi(x)$ は

$$\eta^{\mu\nu} (D_\lambda \phi(x))^* (D_\mu \phi(x)) = m^2 \quad (55)$$

をみたすものとする。

iii) grand unified gauge theory への拡張は straight forward である。前述の $SU(2)$ group の場合において、 $SU(2)$ gauge を含む、より大きな grand unified gauge group、例えば、 $SU(5)$ や $SU(10)$ group で置きかえればよい⁹⁾。Lagrangian は、E.(27)、すなわち、 $(xx)=1$ 、の条件のもとで、

$$L = \bar{\Psi}(x) i \gamma^\lambda D_\lambda(x) \Psi(x), \quad (56)$$

であたえられるとしよう。covariant derivative は

$$D_\lambda = \partial_\lambda + i g G_\lambda, \quad (57)$$

である。 G_λ は gauge field であり、unified gauge group の表現を T_a とすれば、

$$G_\lambda = G_\lambda^a T_a, \quad (58)$$

である。ここで、 T_a は f_{abc} を unified gauge group の structure constant とすれば

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c, \quad (59)$$

をみたす。gauge の変換は、 $\alpha^a(x)$ を phase として

$$U = e^{i \alpha^a(x) T_a}, \quad (60)$$

とおく。gauge 変換後の gauge 場 $G'_\lambda(x)$ は

$$G'_\lambda = U G_\lambda U^{-1} + \frac{1}{g} (\partial_\lambda U) U^{-1}, \quad (61)$$

となる。そして、Eq.(19) に対応して、 $D_\lambda \Psi(x)$ は

$$\eta^{\mu\nu} (D_\lambda \Psi(x))^* (D_\mu \Psi(x)) = M^2, \quad (62)$$

をみたすものとする。

K の値については、これまでの議論からは決まらない。将来、可能となる超高エネルギー領域で、現代の物理からのずれが見出されたときに可能となろう。別の可能性としては、くりこみ処法後の測定値を再現する際に、決定出来る可能性もあろう。

この論文では、物理空間を2次元に縮小して議論してきた。現実の物理を作るには、4次元に拡張しなければならない。最も簡単な拡張は、5次元ユークリッド空間に、4次元（準）球面をうめ

こむことであろう。そして、そこでの unitary 変換（相互作用空間）を作ることであろう。しかし、このような拡張の仕方には、その他、いろいろな場合が考えられよう。そのうちのどれを選ぶかは、実験事実に基づいてなされなければならない。その時、その空間に拡張された Eq.(62) の式が、現実的な意味をもつであろう。

Appendix

どんな場の理論にせよ。次の4条件をみたすものなら、それは“自由場”と同等である。

- a) 非斉次 Lorentz 変換に対する共変性。
- b) “真空”が存在して、それが縮退をもたず、ノルムが有限、かつ、Lorentz 不変である。スペクトル条件が満足されている。
- c) 同時刻の場の演算子の間に正準交換関係が成り立つ。そして、 $\varphi(x, t)$ に共役な $\pi(x, t)$ は非斉次 Euclid 変換 (α, R) のもとで、

$$U(\alpha R)\pi(xt)U^{-1}(\alpha R)=\pi(Rx+\alpha, t), \quad (A-1)$$

のように変換する。ある一時刻の $\varphi(x, t)$, $\pi(x, t)$ は既約な演算子の集合をなす。

- d) この場の正準共役変換 $\varphi(x, t)$, $\pi(x, t)$ は自由場の $\varphi(xt)$, $\pi_0(xt)$ と unitary 変換 V で結ばれている。

$$\varphi(xt)=V^*\varphi_0(xt)V, \pi(xt)=V^*\pi_0(xt)V, \quad (A-2)$$

References

- 1) 湯川秀樹, 片山泰夫 監修 岩波講座「素粒子論」岩波書店, (1978)
- 2) 監修 菊池政士他, 「素粒子論の話題」共立出版株式会社 (1963)
L.van Hooft, Les difficultes des divergences pour um modèle particulier de champ quantifié, Physica 18, (1952), 145~159
R. Haag, On Quantum Field Theory, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk, 29, nr12, (1955).
D. Hall, A.S.Wightman, A Theorem on Invariant Analytic Functions with Applications to Relativistic Field Theory, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk 31(1957)No.5.
O.W.Greenberg, Haag's Theorem and Clothed Operators, Phys. Rev. 115(1959)706~710.
- 3) I. Furuoya, Prog. Theor. Phys. 58, (1977), Prog. Theor. Phys. 60, (1981).
- 4) I.M.Gelfand, R.A.Minlos and Z.Ya.Shapiro, Representation of the rotation and Lorentz groups and their applications(Translated by G. Cummins and T. Boddington)RERGAMON PRESS, (1963).
- 5) 文献は多数あるが1つだけあげておく。

C.Quigg Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions, BENJAMIN CUMMINGS, (1983).

6) 文献は多数あるが、例えば、

G.G.Ross, Grand Unified Theories, Benjamin/Cummings Publishing Company.

H. Georgi and Glashow, Phys. Rev. Lett. 32(1974), 32.

H. Fritzch and P. Minkowski, Ann. Phys. 93.(1975), 193.