発散のないmodelの試作(6)

Furuoya, Izumi / 古尾谷, 泉

(出版者 / Publisher)
法政大学多摩研究報告編集委員会
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学多摩研究報告 / 法政大学多摩研究報告
(巻 / Volume)
19
(開始ページ / Start Page)
69
(終了ページ / End Page)
93
(発行年 / Year)
2004-03-30
(URL)
https://doi.org/10.15002/00003051

法政大学多摩研究報告　19：69～93, 2004

発散のないmodelの試作（Ⅵ）

古尾谷　泉

An attempt toward a non-divergent model (VI)

Izumi FURUOYA

1. はじめに

素粒子物理学における質点系の基礎理論には“発散の困難”といわれる欠陥がついて回る。この欠陥は“くりこみ”という処方でさけられる。現代物理学の基礎理論は、この処方によって、少くとも、定性的には実験値を再現でき、また、内部に矛盾のない理論であると考えられている。しかし、いろいろな観点から、これらが真の理論であるとは考えにくい。我々は一連の研究で、より正しい理論を見い出そうと努力してきた。しかし、真の理論が存在するのかどうかは保証されているわけではない。

発散の問題に関して、我々は相対論における光の速さの性質についての形式上の類推から、電荷を相対論的立場から眺めた理論を構築する試みを行っている。我々のmodelでは、電荷に関して、次の要請をおく。

A）古典的な意味で、電荷の値は相互作用によって、変ってはならない恒常的不変量である。

ここで、古典的とは、仮想粒子の放出、吸収等の量子効果、すなわち、これらの仮想粒子のゆらぎによるdynamicsは除くという意味である。

我々は“発散の問題”は物理空間の構造の問題であるという立場をとる。従来の理論は物理空間が正しく認識されていないために、この欠陥があらわれると考える。そこで、従来の物理空間を以下のように修正する。Van Hoveの“unitary equivalance”の問題およびHaagの定理（See Appendices）に関連して、従来の物理空間を、この空間を含むより広いunitary対称性をもつ空間に拡張する。そして、この拡張された空間内で、相互作用を作る。このようにして作られた相互作用は、上述の電荷の恒常性の要請（A）をみたす。

我々のmodelにおける系の状態はこの拡張された空間内の一点であらわされる。この際、点

から点へはこの空間内の変換で移れる。これが我々の model space における相互作用である。また、当然のこととして、このようにして作られた相互作用は従来の理論における相互作用を含むものでなければならない。

今、G_0 を homogeneous な Lorentz 変換とし、G は G_0 を部分空間として含むより広い unitary 変換とする。我々の model space における相互作用 G' は

$$G' \equiv G/G_0 \ , \tag{1-1}$$

で定義される。したがって、相互作用の効果は

$$G' : G_0 \rightarrow G'G_0 \ , \tag{1-2}$$

となる。この作用によって、電荷の値は不変である。事実、自由粒子の電荷を ρ とし、これが相互作用によって ρ' になったとすると

$$\rho' = e\int \Psi^{*}(G'x)\Psi(G'x)\,dx = e\int \Psi^{*}(x)\Psi(x)\,dx = \rho \ , \tag{1-3}$$

となり、ρ は相互作用によって変わらないのである。

ここで、注意することは、ρ も ρ' も実際に観測にかかる電荷ではないということである。ρ' には仮想的な粒子の対生成や対消滅による補正等は含まれていないからである。実際に測定にかかる電荷には、これらの量子効果は含まれていて、実際に測定かかる電荷からこの量子効果を分離することは不可能なのである。

このような考えに基づいた我々の model では、質量の発散はおきないであろうことは、簡単な例で示すことが出来る。無限に重い核子が、中間子を仮想的に放出後、呼吸する際の自己 energy の増加は、摂動計算の 2 次までで

$$\Delta E \sim g^2 \int \frac{dk}{k^2 + m^2} \ , \tag{1-4}$$

であたえられる。これは一次の発散量である。我々の model では、この発散積分に対応する propagator は

$$\sum_p \frac{1}{\lambda - \alpha\mu}, \quad \alpha : \text{定数} \tag{1-5}$$

の形をとる。ここで、a を我々の model space における曲率半径（定数）とすると、状態 λ は

$$\lambda = p\left(p + \frac{4}{a}\right) , \tag{1-6}$$

であたえられる。a の値は大きいので、Eq.(1-6)の右辺の第 2 項を無視すれば、

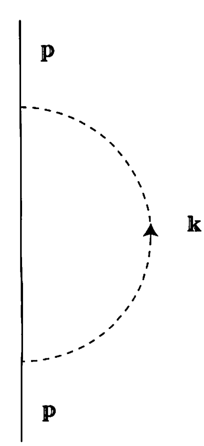


Fig. (1—1)

$$p \to \infty \text{ のとき Eq.(1-5)} \to \int \frac{dp}{p^2} \sim \frac{1}{p}, \tag{1-7}$$

となり、この積分は収束するのである。我々の model では、空間の対称性がよいので、状態が縮退していて、発散積分の次数が減少して一次元になり、発散はおきないのである。また、これとは別に、我々の model では、発散がおきないであろうと考えられる理由がある。このことは第 4 章で議論される。

しかし、我々が、これまでに展開した理論には重大な欠陥がある。我々の model では、基本計量に $e^{\pm\frac{2t}{a}}$ の形の因子が存在するので、時間の経過とともに、この因子は一方的に増大（または減少）してしまう。これでは、理論として受け入れられない。

この論文の目的の一つは、この欠陥を修正することである。我々は、物理空間の次元を拡大することで、この欠陥を修正しよう。具体的には、Lorentz 変換を部分空間として含む 5 次元定曲率空間を 6 次元（準）Euclid 空間内にうめこみ、この部分空間を我々の物理空間とする。このような拡大の仕方は一意ではない。これ以外にもいろいろな場合が考えられようが、ここでは最小の拡大を考えることにしよう。このことは本来、実験で決められるべきであろう。将来の高エネルギー物理に期待しよう。

このように、次元を拡大すると、時空座標の他に、空間の曲率（定数）と新に extra な parameter が導入される。しかし、このことは我々の model の価値を下げるものではないであろう。その理由は、いわゆる標準 model では、20 数個の自由な parameter が含まれているが、我々の model が電弱および QCD 理論を含む理論にまで発展し、しかも、我々の model が正しい方向に向かっているのであれば、これらの parameter のうちのいくつかは、我々の新しい parameter によって代行できるはずだからである。

この論文の他の目的は素粒子物理学における“階層構造”の謎を解明しようとする試みである。階層構造とは①大統一理論における weak scale と plank scale との大きなギャップ、②一対の lepton と一対の quark から成る組が量子数は同じだが、質量のみが異なるパターンがくり返されることをいう。②のなぜ、このような世代がくり返されるのかという問は、古くから $e-\mu$ puzzle といわれ、歴史は古いが今だに全く手がかりはつかめていない。我々はこの研究で、この謎の解明を試みる。この際、extra な parameter が重要な意味をもつ。この parameter が存在するので、我々の model space における energy-momentum tensor は、空間の曲率が虚数のときには、周期性をもつことになる。ここに、この謎の糸口を引き出すことが出来るのではないか、と考える。

第 2 章、我々の model における基本的な考え方について述べる。

第 3 章、Toy model を作って、従来の相互作用をいかに我々の model space に適合できるよう

に修正するかについて議論する。

第４章、我々の model space、すなわち、５次元定曲率空間上の物理について議論する。我々の新しい propagator が物理的であるためには、新しく導入した parameter は時空座標と独立ではありえないことを示す。また、我々の model では、何故、発散がおきないかについて、これまでの見解とは別の視点から議論する。

第５章、我々の model における保存量について議論する。extra な parameter が存在するので、我々の energy-momentum tensor は、空間の曲率が虚数とのときには、周期性を示すことを示す。

2. 我々の model の基本的な考え方

発散の問題は電荷と質量の問題と考えよう。他に Vertex の補正もあるが、ここでは考えない。

今、電子を電場で引っぱる場合を想定しよう。電子の電荷を e_0、質量を m_0、この電子の加速度を α、また、かけられた外場の強さを E とすると、運動方程式は

$$m_0\alpha = e_0 E \ , \tag{2-1}$$

であたえられる。ここで、e_0 も m_0 も E によらない定数である。電子と電磁場との相互作用を入れて、摂動論で輻射補正を計算すると、e_0 と m_0 は、それぞれ、$e_0+\delta e$ と $m_0+\delta m$ とシフトするが、δe も δm も無限大になってしまう。このような量を計算する際に使われた摂動計算の展開式を眺めてみると、外場は輻射場とからみあった複雑な式であり、外場と輻射場を分離することはとうてい不可能であろう。また、外場自身も輻射補正によって変化してしまうであろう。このように考えてくると、電荷の値も、質量の値も外場の強さに依存して変化すると考えてよいであろう。ここでは、このことを仮定しよう。そこで、外場自身の変化は無視することにして、電荷と質量を外場 E の関数として、$\alpha(E)$、および、$m(E)$ とかくことにしよう。このとき、Eq.(2-1)は複雑な式となるであろうが、ここでは議論を簡単でわかりやすくするために、修正された式を象徴的に

$$m(E)\circ\alpha = e(E)\circ E \ , \tag{2-2}$$

とかくことにしょう。

次に、Eq.(2-2)を用いて、この物理系の単位を決定する問題を考えよう。$E\cong 0$ 附近では、Eq.(2-2)で $\alpha = e(0) = E = 1$ とおけば $m(0) = 1$ となり、これを質量の単位、すなわち、energy の単位にとることが出来よう。次に、$E >> 0$ の場合には、実際に観測にかかる方程式は、もはや、$E\cong 0$ のときに用いた $m(0)\cdot e = e(0)\cdot E$ ではない。このときには、方程式自身も変わって

しまうであろう。したがって、この式を用いて、この系の単位を決定することは出来ないであろう。この場合には、$E >> 0$ で修正された式、$m(E) \circ \alpha = e(E) \circ E$ を用いなければなるまい。このように考えてくると、$E \cong 0$ で決定された単位と、$E >> 0$ で決定された単位とは、全く別ものであり、これらの間には、何ら関係のない互に独立な単位系になってしまうであろう。このようなことがいえるとすれば、我々は E の異るところでは、別々の単位系を採用しなければならないことになる。いいかえると、E の異る空間は、互に無関係な独立した空間になってしまうのであろう。このことは、Van Hove のいう“固有値問題を解くに用いる空間は Hamiltonian ごとに、すなわち、相互作用の強さの違いによって異っていて、それらを結びつける unitary 変換は存在しない”という主張の物理的解釈と考えられはしまいか (See Appendices)。それでは、一体、これらの互にばらばらで独立な単位系をもつ空間が統合できるためには、どのようなことが考えられるであろうか。このことが、可能であるためには、これらのばらばらな空間が共有する不変量、—これは、無限大量であろう—の存在が必要なのではないか。我々の model では、そのような量が存在して、それが電荷なのである。すなわち、我々の model では、電荷の値は有限ではあるが、同時に、無限大の性質をも兼ねそなえた恒常的不変量なのである。

しかし、これまでなされてきた議論には不備な点がある。本来、輻射場の効果は dynamics の問題であり、このような効果は、その背後にある基礎理論から計算されるべきものであろう。そして、物理の単位を決定するのは、この基礎理論に基づいて、基礎理論のレベルでなされなければなるまい。しかし、上述の議論中で、系の単位を決定する際には、すでに、輻射場の効果は含まれてしまっていて、測定にかかる量から、これらの量を分離することは出来ないであろうからである。たとえ、電荷の値が外場によって影響をうけたとしても、外場の電荷の値への効果のみを拾い出すことは不可能であろう。このように考えてくると、真の基礎理論は、それが存在するとしても、輻射補正の背後にかくされてしまっていると考えられよう。このように上の議論は、測定不能な領域に、観測の理論をもちこむことが矛盾しているのである。しかし、それにも拘らず、このあいまいさの範囲内で、我々の model では輻射場の背後にかくされた基礎理論において、第一章で掲げた

(A) 電荷の値は外場の強さによって変わってはならない恒常的不変量である

という要請をおこう。そして、これを我々の model における公理として採用しよう。

自由場（裡の粒子）は直接測定に関わる場ではない。自由場は、常に、輻射補正の影にかくれてしまっていて、直接、見ることは出来ないからである。数学的には、自由場は測定に関わる場を展開するための道具、すなわち（完全直交）基底 vector にすぎない。したがって、張る空間が同じであれば、どの基底 vector で展開しても結果に違いはおこらない。例えば、散乱問

題において、平面波で展開しても球面波で展開しても、本質的な違いはなく物理的結果は同じでなければならない。従来の理論では、Minkowski space を vector space として、この空間を張る vector を基底 vector としているが、我々の立場から推測すると、発散の問題は、理論を展開する際に、正しい基底 vector が採用されていないことによるひびの入った表現なのである。我々の model では、基底 vector とその張る空間とが従来の理論のそれらとは本質的に異っている。このことが、我々の理論と従来の理論との本質的な違いなのである。

物理学の仮説は、実験事実に基づいてたてられる。例えば、量子論における量子仮説は Plank の黒体放射の半経験的公式を説明するために導入された。また、相対論における仮説は Michelson-Moley の実験に基づいている。しかし、直接には測定に関わらない仮説もある。電弱理論における hidden symmetry の発見はその一例であろう。我々の仮説（A）も直接には見ることは出来ない。その姿は輻射場の影にかくれてしまっているからである。

3. 相互作用の修正

我々の model では、前述の要請（A）「電荷の値は相互作用によって変ってはならない恒常的不変量である」を満たさなければならない。そこで、この要請をみたすように、空間を拡張して、その空間内で相互作用を作らなければならない。その試みを具体的に示そう。

話を簡単にするために、4 次元 Minkowski space は次元を縮小して、2 次元 Minkowski space とする。この空間内の一点は、$(x_0,\ x_1)$ であらわされる。ここで、x_0 は時間成分、x_1 は空間成分をあらわす。この空間の metric は

$$(\eta_{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3-1}$$

とする。この空間内の最も一般的な座標変換は

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \tag{3-2}$$

である。Eq.(3-2)の第一項は homogeneous Lorentz 変換（準回転）であり、第 2 項は並進をあらわす。$a_{ij},\ i,\ j=0,\ 1$ は

$$\begin{aligned} &a_{00}^2 - a_{10}^2 = 1,\ \ a_{00}a_{01} - a_{10}a_{11} = 0, \\ &a_{21}^2 - a_{11}^2 = -1, \end{aligned} \tag{3-3}$$

をみたす。無限小距離は

$$-ds^2=-dx_0^2+dx_1^2 \ , \tag{3-4}$$

である。（4元）速度は

$$v_0=\frac{dx^0}{ds},\ v_1=\frac{dx^1}{ds} \ , \tag{3-5}$$

であり、（4元）momentumを $(E,\ P)$ とすると

$$E=mv_0,\ P=mv_1 , \tag{3-6}$$

である。荷電粒子と電磁場との相互作用は（4元）potentialを $(\phi,\ A)$ とすると $(E,\ P)$ におきかえ

$$E\to E\to e\phi,\ P\to P-eA \ , \tag{3-7}$$

を行うことで得られる。$(E,\ P)$ および $(E-e\phi,\ P-eA)$ はhomogeneous Lorentz変換によって、同一の変換

$$\begin{pmatrix}E\\P\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}a_{00} & a_{01}\\a_{10} & a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\P\end{pmatrix} , \tag{3-8}$$

および

$$\begin{pmatrix}E-e\phi\\P-eA\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}a_{00} & a_{01}\\a_{10} & a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E-e\phi\\P-eA\end{pmatrix} , \tag{3-9}$$

をうける。しかし、当然のことだが、このhomogeneous Lorentz変換によって、$(E,\ P)$ から $(E-e\phi,\ P-eA)$ への移行は出来ない。この移行はImhomogeneous Lorentz変換における並進に対応している。

ここで、我々は、従来の相互作用を含む形で、前述の電荷の不変性の要請をみたすように相互作用を拡張しよう。そのために、homogeneous Loretz変換を含んだより広い一つの対称性をもった空間を設置し、自由粒子に相互作用を入れる操作、すなわち、Eq.(3-7)の移行を、この広い空間内に拡張することを試みよう。このような、回転（正確には準回転、すなわちhomogeneous Lorentz変換のこと）と並進（translation, すなわち、相互作用を入れる操作に対応する）とを一つの変換内で表現する数学に、射影幾何学の枠組みで組み立てられた非ユークリッド幾何学がある。我々は、この古典的な数学を借用して、簡単なtoy modelを作って我々の考えを示そう。

まず、2次元空間内の一点 $(x_0,\ x_1)$ を $x_0=\frac{z_0}{z_2},\ x_1=\frac{z_1}{z_2}$ とおいて、この点を同次座標で $(z_0\ \ z_1\ \ z_2)$ であらわす。そして、この点の変換は

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{3-10}$$

であたえられるとしよう。また、この変換は Absolute

$$-z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0 \ , \tag{3-11}$$

を不変にする変換であるとしよう。この条件から

$$\begin{aligned} &-a_{00}^2 + a_{10}^2 + a_{20}^2 = -1, \ -a_{00}a_{01} + a_{10}a_{11} + a_{20}a_{21} = 0, \\ &-a_{01}^2 + a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \ -a_{00}a_{02} + a_{10}a_{12} + a_{20}a_{22} = 0, \\ &-a_{02}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \ -a_{01}a_{02} + a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0, \quad , \end{aligned} \tag{3-12}$$

をうる。次に、運動量空間にも、同時座標を導入しよう。運動量空間内の一点を同時座標で $(p_0 \ p_1 \ p_2)$ であらわすことにしよう。運動量はこの空間内の vector であるから Eq.(3-10)と同じ変換

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \tag{3-13}$$

ここで、

$$\begin{aligned} &-A_{00}^2 + A_{10}^2 + A_{20}^2 = -1, \ -A_{00}A_{01} + A_{10}A_{11} + A_{20}A_{21} = 0, \\ &-A_{01}^2 + A_{11}^2 + A_{21}^2 = 1, \ -A_{00}A_{02} + A_{10}A_{12} + A_{20}A_{22} = 0, \\ &-A_{02}^2 + A_{12}^2 + A_{22}^2 = 1, \ -A_{01}A_{02} + A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} = 0, \quad , \end{aligned} \tag{3-14}$$

である。条件 Eq.(3-14)と Eq.(3-12)とから Eq.(3-10)は Eq.(3-13)とは同じ変換であるから、この変換は Eq.(3-11)に対応して、Absolute

$$-p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 = 0, \tag{3-15}$$

を不変にする。Eq.(3-13)で

$$p'_2 = p_2 = 1 \ , \tag{3-16}$$

とおけば、

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{01} \\ A_{12} \end{pmatrix}, \tag{3-17}$$

となる。右辺第一項は homogeneous Lorentz 変換をあらわし、第2項は並進をあらわしている。次に、並進の項を

$$A_{02} = -e\phi, \ A_{12} = -eA \ , \tag{3-18a}$$

とおきかえ、homogeneous lorentz 変換の部分を単位元でおきかえれば、すなわち、

$$A_{01} = A_{10} = 0, \ \text{および} \ \ p'_2 = p_2 \ , \tag{3-18b}$$

とおけば、

$$p'_0 = E - e\phi \quad および \quad p'_1 = p_1 - eA \ , \tag{3-19}$$

となり、これは従来の理論における相互作用となる。つまり、変換行列 Eq.(3-13)において、左上の 2 × 2 行列は homogeneous Lorentz 変換をあらわし、右上の 1 × 2 行列は相互作用に対応している。このようにして、我々の model では、相互作用の効果は行列要素、$(A_{20}, \ A_{21}, \ A_{22})$ の変化でおきかえられる。このことは、更に、相互作用の効果は、第 3 軸すなわち、p_2 軸の成分の値の変化であらわされることを意味している。しかし、このような変化は空間に“歪み”を生ずることになる。

いいかえると、相互作用の強さの違いによって、系の energy と運動量の尺度の変化が生ずることになる。

このように、一つの対称性をもつより広い空間への拡張の仕方は、上述の仕方以外にも、いろいろな場合が考えられよう。この拡大の仕方は一意ではない。このことは本来実験で決められるべきであろう。

次に、この歪んだ空間に（擬）距離を導入しよう。Absolute Eq.(3-11)内の 2 点を同次座標で $A(y_0 \ \ y_1 \ \ y_2)$ および $B(z_0 \ \ z_1 \ \ z_2)$ とすると、この 2 点を通る直線の方程式は λ を parameter として

$$(y_0 + \lambda z_0, \ \ y_1 + \lambda z_1, \ \ y_2 + \lambda z_2) \ , \tag{3-20}$$

であたえられる。この直線と Absolite との交点を P, Q とすると、P, Q の座標は

$$-(y_0 + \lambda z_0)^2 + (y_1 + \lambda z_1)^2 + (y_2 + \lambda z_2)^2 = 0 \ , \tag{3-21}$$

の 2 つの解 λ_1 と λ_2 とを用いて $P(y_0 + \lambda_1 z_0, \ y_1 + \lambda_1 z_1, \ y_2 + \lambda_1 z_2)$、および、$Q(y_0 + \lambda_2 z_0, \ y_1 + \lambda_2 z_1, \ y_2 + \lambda_2 z_2)$ であたえられる。次に、この空間内の（擬）距離 X は、これら 4 点の複比 $(ABPQ)$ の対数で定義される。すなわち

$$X \equiv \frac{K}{2} \log_e (ABCD) = \frac{K}{2} \log_e \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ , \tag{3-22}$$

とおく。ここで、K は定数で、この空間の曲率半径をあらわす。また、1/2 は便宜上のものである。このように、距離が導入されると、この空間に直交座標を設置することが出来る。Fig.(3-1)のような座標系をとると、空間内の一点 $P(z_0 \ \ z_1 \ \ z_2)$ は距離 X_0 と X_1 とであらわすことが出来る。

$$-z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 1 \ , \tag{3-23}$$

と規格化すると点 $P(z_0 \ \ z_1 \ \ z_2)$ は

$$z_0 = sh\left(\frac{X_0}{K}\right),$$

$$z_1 = ch\left(\frac{X_0}{K}\right)s\left(\frac{X_1}{K}\right), \qquad (3\text{-}24)$$

および

$$z_2 = ch\left(\frac{X_0}{K}\right)c\left(\frac{X_1}{K}\right),$$

であたえられる。更に、Grenz Kreis 座標系 (ξ, η) を導入すると、(ξ, η) は (X_0, X_1) と

$$e^{-\frac{\xi}{K}} = e^{-\frac{X_1}{K}} ch\left(\frac{X_0}{K}\right)$$

$$\frac{i\eta}{K} = e^{i\frac{X_1}{K}} th\left(\frac{X_0}{K}\right), \qquad (3\text{-}25)$$

で関係づけられる。これより、無限小距離は

$$-K^2 ds^2 = K(-dz_0^2 + dz_1^2 + dz_2^2)$$
$$= -dX_0^2 + ch^2\left(\frac{X_0}{K}\right)dX_1^2$$
$$= -d\xi^2 + e^{-\frac{2\xi}{K}} d\eta^2 \qquad , \qquad (3\text{-}26)$$

であり、体積要素は

$$dV = e^{-\frac{2\xi}{K}} d\xi d\eta, \qquad (3\text{-}27)$$

となる。

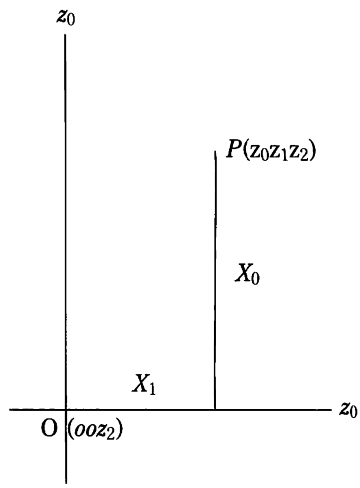


Fig.（3—1）

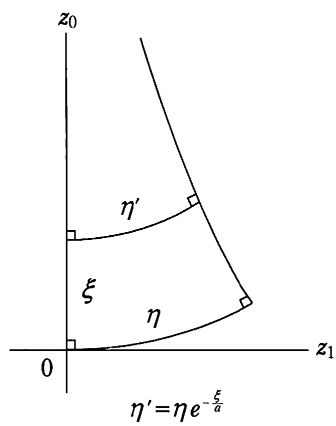


Fig.（3—2）

この空間では（擬）距離と角とは双対概念であり、角は距離とみなすことが出来る。逆に、距離は角とみなすことが出来る。この性質を利用して、momemtum space に距離を導入しよう。そのために、まず、momemtam space にける同次座標 $(p_0\ p_1\ p_2)$ は線同次座標（直線の方程式をあらわす座標）と同一視できることを示そう。次の式

$$-p_0 x_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0, \qquad (3\text{-}28)$$

は射影変換 Eq.(3-10) および Eq.(3-13) に対して不変である。したがって、Eq.(3-28) は線同次座標 $(p_0\ p_1\ p_2)$ であらわされた直線の方程式と同一視できる。このようにして、momemtem space に角、すなわち、距離を導入することが出来る。

2直線 $C(p_0\ p_1\ p_2)$ と $D(q_0\ q_1\ q_2)$ との交点を M とすると、M を通る直線は μ を parameter として、$(p_0 + \mu q_0,\ p_1 + \mu q_1,\ p_2 + \mu q_2)$ とかける。この直線が Absolute Eq.(3-15) に接するための条件は、

$$-(p_0 + \mu q_0)^2 + (p_1 + \mu q_1)^2 + (p_2 + \mu q_2)^2 = 0, \qquad (3\text{-}29)$$

である。この2次方程式の2つの解を μ_1 および μ_2 とすれば、2接線、P と Q は、それぞれ、$(p_0+\mu_1 q_0,\ p_1+\mu_1 q_1,\ p_2+\mu_1 q_2)$ および、$(p_0+\mu_2 q_0,\ p_1+\mu_2 q_1,\ p_2+\mu_2 q_2)$ とあらわされる。momentum space における角、すなわち、距離は

$$Y \equiv \frac{K}{2}\log_e(CDPQ) = \frac{K}{2}\log_e\frac{\mu_1}{\mu_2}, \tag{3-30}$$

で定義される。

このように momentum space に距離が導入されると、点座標のときと同様に momemtum space に直交座標を導入することが出来る。

$$p_0 = sh\left(\frac{Y_0}{K}\right),$$
$$p_1 = ch\left(\frac{Y_0}{K}\right)s\left(\frac{Y_1}{K}\right), \tag{3-31}$$

および
$$p_2 = ch\left(\frac{Y_0}{K}\right)c\left(\frac{Y_1}{K}\right),$$

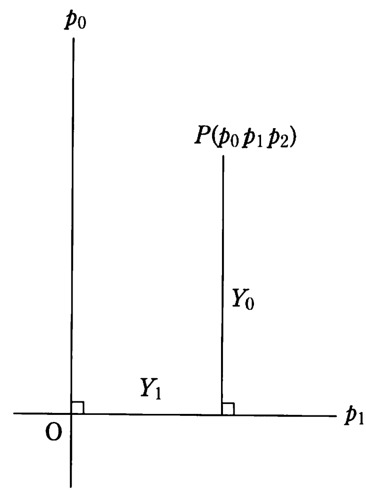


Fig.（3—3）

Grenz Kreis koordinate $(E,\ P)$ は

$$e^{-\frac{E}{K}} = e^{-i\frac{Y_1}{K}}ch\left(\frac{Y_0}{K}\right)$$
$$i\frac{P}{K} = e^{i\frac{Y_1}{K}}th\left(\frac{Y_0}{K}\right) \tag{3-32}$$

であたえられる。

このことから momentum space における無限小距離は

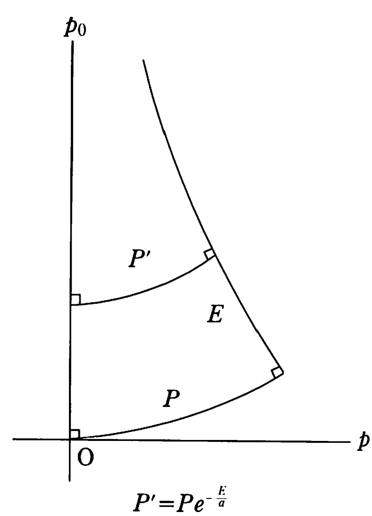
$$-K^2dp^2 = K^2(-dp_0^2+dp_1^2+dp_2^2)$$
$$= -dY_0^2+ch^2\left(\frac{Y_0}{K}\right)dY_1^2$$
$$= -dE^2+e^{-\frac{2E}{K}}dp^2 \tag{3-33}$$

となる。したがって、momentum space における volume element は

$$dV = e^{-\frac{E}{K}}dEdP, \tag{3-34}$$

である。

Fig.(3-2)における、平面 OP（または $O'P'$）はユークリッド的である。このことから、OP 平面を Minkowski metric をもった空間に拡張するのは容易である。すなわち、Eq.(3-26)における $d\mu^2$ を $-d\mu_0^2+d\mu_1^2+d\mu_2^2+d\mu_3^2$ でおきかえればよい。この拡張された空間の無限小距離は



$P'=Pe^{-\frac{E}{a}}$
Fig.（3—4）

$$ds^2 = d\xi^2+e^{-\frac{2\xi}{K}}(-d\mu_0^2+d\mu_1^2+d\mu_2^2+d\mu_3^2), \tag{3-35}$$

となる。この空間は第4章であらわれる。運動量空間においても、同様な拡張が出来る。

$$dp^2 = d\xi^2 + e^{-\frac{2\xi}{K}}(-dp_0^2 + dp_1^2 + dp_2^2 + dp_3^2), \tag{3-36}$$

Eq.(3-35)と Eq.(3-36)で同じ parameter ξ を使っているが、本来は別のものである。

4. 5次元定曲率空間上の物理

この章では、電荷の恒常性の要請（A）をみたす最小の空間として、5次元定曲率空間を設置し、その曲面上の物理について論じる。

Imhomogeneous な Lorentz 変換は homogeneous Lorentz 変換 (Λ_b^a) と translation (a^a) との積で与えられる。すなわち、

$$x'^a = \Lambda_b^a x^b + a^a \quad a,\ b = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{4-1}$$

である。この変換は η_{ab} を Minkowski metric とすると

$$\eta_{ab}(x^a - a^a)(x^b - a^b), \tag{4-2}$$

を不変にする。我々は、この空間を6次元空間に拡張しよう。すなわち、Eq.(4-1)の次元を拡張して

$$x'^\lambda = \Lambda_\mu^\lambda x^\mu + a^\lambda,\ \lambda,\ \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \tag{4-3}$$

および

$$\Lambda_\mu^\lambda \Lambda_\mu^\nu = \delta_\mu^\lambda, \tag{4-4}$$

とおく。Eq.(4-4)は空間が unitary 対称性をもっていることをあらわしている。また、この変換は、Eq.(4-2)の次元を拡張した2次形式

$$\eta_{\lambda\mu}(x^\lambda - a^\lambda)(x^\mu - a^\mu),\ \lambda,\ \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \tag{4-5}$$

を不変にする。ここで、Eq.(4-5)における $\eta_{\lambda\mu}$ は拡張された Minkowski metric で sign は適宜決めればよいものとしておこう。この変換のうちで、準回転をあらわす拡張された homogeneous な部分空間 (Λ_μ^λ) の支配する空間に、我々の model space としての5次元定曲率空間をうめこもう。この拡張の仕方は一意ではなく、より高次元な空間への拡張は容易である。ここで、我々の提唱する物理空間は homogeneous Loretz 変換が支配する空間を部分空間として含み、なおかつ、我々の電荷の不変性の要請をみたすように作られる空間のうちで最小なものであろう。また、この空間には6個の並進の自由度があるので、系全体の energy-momentum の厳密な保存則の外に、更に、2つの保存量が存在することになるが、そのことの議論はここではしない。

このように、我々の住む物理空間は拡張された homogeneous な変換 (Λ_μ^λ) の支配する部分空間である小宇宙であるとするのである。例えば、日常的な世界で、荷電粒子が存在しても、その粒子の影響の及ぶ範囲は、ほんの数メートルほどの範囲をとれば十分であろう。この小宇宙が

我々の物理空間であって、これは拡張された (Λ_μ^λ) の支配する空間とするのである。

次に、この拡張された 6 次元空間 (Λ_μ^λ) 内に、我々の model space としての 5 次元定曲率空間をうめこむことを考えよう。

そのために、まず、3 次元ユークリッド空間内の回転面で定曲率であるものを求めよう。xz 平面上の曲線 $z=f(x)$ を z 軸のまわりに回転して得られる回転面の方程式は、$(u,\ \theta)$ を媒介変数として

$$x=u\cos\theta,\ \ y=u\sin\theta,\ \ z=f(u)\,, \tag{4-6}$$

とかける。ここで、

$$r=\int\sqrt{1+f'(u)^2}\,du,\ \ \theta=0\,, \tag{4-7}$$

とおけば、この回転面の無限小距離は

$$ds^2=dr^2+Gd\theta^2,\ \ G=u^2\,, \tag{4-8}$$

となる。この回転面が定曲率空間であれば定曲率を K として、G は

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r^2}+K\sqrt{G}=0\,, \tag{4-9}$$

をみたす。ここで

$$K=-\frac{1}{a^2}\,, \tag{4-10}$$

の場合、回転面は xz 平面上の曲線

$$\begin{aligned} x&=b\cos\frac{r}{a}+c\sin\frac{r}{a}\\ z&=\pm\int\sqrt{1-\frac{1}{a^2}(be^{\frac{r}{a}}-ce^{-\frac{r}{a}})^2}\,dr\,, \end{aligned} \tag{4-11}$$

を z 軸のまわりに回転して得られる。

ここで、

$$b=0,\ \ c=a\,, \tag{4-12}$$

とおけば、無限小距離は

$$ds^2=dr^2+a^2e^{-\frac{2r}{a}}d\theta^2\,, \tag{4-13}$$

となる。我々の model space、すなわち、5 次元定曲率空間上の無限小距離 Eq.(3-35) は Eq.(4-13) で、おきかえ $a^2d\theta^2\to -dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$ を行えば得られる。

$$ds^2=d\xi^2+e^{-\frac{2\xi}{a}}(-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2)\,, \tag{3-35}$$

但し、$\xi=r$ とおいた。

ここで、t は時間座標、$x,\ y,\ z$ は空間座標である。また、ξ は第 3 章で述べた z_2 軸（ないしは、p_2 軸）方向の座標に対応する extra な parameter であり、相互作用の強さに対応する parameter でもある。Eq.(3-35) より、この空間の基本 metric tensor は

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\xi}{a}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{2\xi}{a}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{2\xi}{a}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{2\xi}{a}} \end{pmatrix}, \tag{4-14}$$

および

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\xi}{a}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2\xi}{a}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{2\xi}{a}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{2\xi}{a}} \end{pmatrix}, \tag{4-15}$$

である。したがって、この空間の volume element は

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{\|g_{\alpha\beta}\|}\, d\xi dtdxdydz \\ &= e^{-\frac{4\xi}{a}} d\xi dtdxdydz \quad , \end{aligned} \tag{4-16}$$

である。

$d\xi = 0$ のときには、$\xi = const$ で粒子は相互作用をしていない自由粒子の場合に対応する。このとき、Eq.(3-35)は

$$ds^2 = const \times \left(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{4-17}$$

となるが、これは homogeneous Lorentz 変換の不変量である。

$d\xi \fallingdotseq 0$ のときは、ξ の値の変化は、第3章で議論されたように、相互作用の強さが変化することに対応する。このとき、電荷の不変性の要求のために、時空点の尺度がわずかだがずれる。すなわち、

$t \to t' = te^{-\frac{\xi}{a}}$, $x \to x' = xe^{-\frac{\xi}{a}}$, y, z も同様、となるが、この変化は時間座標と空間座標とを同時に同じだけ変化させるので、光の速さは相互作用があっても、すなわち、空間が歪んでも変わらないのである。また、この変化は曲率半径 a が大きい値であると考えられるので、その変化は僅かであると期待される。我々の model では、この空間の歪みによって、系の energy が系の外にもれて、素粒子の階層構造が形成されると考えるのである。しかし、系全体の並進は許容されているので、系全体の energy、すなわち、系の energy +

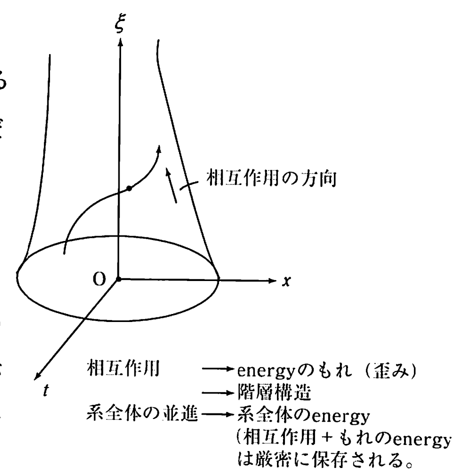


Fig.（4—1）

空間の歪みの energy、は保存されるのである。

次に、我々の model における scalar 場の波動方程式を導出しよう。まず、質量のない場合を考えよう。scalar 場を ϕ とし、Lagrangean を

$$L=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\phi)(\partial_\beta\phi),\ \alpha,\ \beta=\xi,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{4-18}$$

とおく。ここで、$\left(g^{\alpha\beta}\right)$ は Eq.(4-15)であたえられる基本計量 tensor である。作用積分は

$$I=\int L\sqrt{\|g\|}\,dV, \tag{4-19}$$

である。ここでは、scalar 場 ϕ についての変分のみをとることにしよう。

$$\begin{aligned}\delta I&=\int\delta L\sqrt{\|g\|}\,dV\\&=\int(g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\phi)(\partial_\beta\delta\phi))\sqrt{\|g\|}\,dV\\&=\int\partial_\beta\left(g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\phi)\partial\phi\sqrt{\|g\|}\right)dV\\&-\int\partial_\beta\left(g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\phi)\sqrt{\|g\|}\right)\delta\phi dV\\&=0\end{aligned}, \tag{4-20}$$

無限遠点で $\delta\phi=0$ とすると、右辺第一項は消えてしまう。第２項より、質量のない scalar 場の波動方程式は

$$\partial_\beta\left(g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\phi)\sqrt{\|g\|}\right)=0, \tag{4-21}$$

となる。これは、また

$$g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\partial_\beta\phi)+(\partial_\alpha g^{\alpha\beta})(\partial_\beta\phi)+g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\phi)\frac{\partial_\beta\sqrt{\|g\|}}{\sqrt{\|g\|}}=0, \tag{4-22}$$

ともかける。Eq.(4-14)、および Eq.(4-15)を使うと、Eq.(4-21)は、$x\equiv(x,\ y,\ z)$ として

$$\left\{\Lambda_\xi+e^{\frac{2\xi}{a}}(\Lambda_0+\Lambda_x)\right\}\phi=0, \tag{4-23}$$

となる。但し、ここで、

$$\Lambda_\xi=\partial_\xi^2-\frac{4}{a}\partial_\xi,\ \Lambda_0\equiv-\partial_0^2,\ \text{および}\ \Lambda_x\equiv\partial_x^2, \tag{4-24}$$

である。Eq.(4-21)は共変微分を使って

$$\begin{aligned}\Lambda\phi&\equiv g^{\alpha\beta}V_\alpha V_\beta\phi\\&\equiv\left(\Lambda_\xi+e^{\frac{2\xi}{a}}(\Lambda_0+\Lambda_x)\right)\phi\\&=0\end{aligned}, \tag{4-25}$$

ともかける。一般には、粒子の質量を μ、potential を $V(\xi 0x)$とかけば、scalar 場の波動方程式は

$$\left\{\Lambda_{\xi}+e^{\frac{2\xi}{a}}\left(\Lambda_0+\Lambda_x+\mu^2+V(\xi 0x)\right)\right\}\Phi(\xi 0x)=0\,, \tag{4-26}$$

とかけるであろう。ここで、ξ はpotential V の大きさに依存する量と考えるべきであろうが、ここでは形式的に、Eq.(4-26)の形にかいておく。このことは、この章の終りで議論する。

次に、potentialが時刻に依存しない系が定常的な状態にある場合、すなわち

$$V(\xi 0x)=V(\xi x)\,, \tag{4-27}$$

の場合の波動方程式を解くことにしよう。

Eq.(4-26)において、変数分離

$$\Phi(\xi 0x)=\phi(0)\,\phi(\xi x)\,, \tag{4-28}$$

を行って、これをEq.(4-27)と共にEq.(4-26)に代入し、変数を分離してその値を W とおく。すなわち、

$$-\Lambda_0\phi(0)\Big/\phi(0)=(e^{-\frac{2\xi}{a}}\Lambda_{\xi}+\Lambda_x+\mu^2+V)\,\phi(\xi x)\Big/\phi(\xi x)=W\,, \tag{4-29}$$

とおけば、

$$\begin{aligned}&(\Lambda_0+W)\,\phi(0)=0\\&\left(e^{-\frac{2\xi}{a}}\Lambda_{\xi}+\Lambda_x+\mu^2+V(\xi x)\right)\phi(\xi x)=W\phi(\xi x),\end{aligned} \tag{4-30}$$

と分離できる。ここで

$$(\Lambda_{\xi}+\lambda_{\xi})\,\phi_{\lambda\xi}(\xi)=0\,, \tag{4-31a}$$

$$(\Lambda_{\xi}+k_0^2)\,\phi_{k0}(0)=0\,, \tag{4-31b}$$

および

$$(\Lambda_{\xi}+k_x^2)\,\phi_{kx}(x)=0\,, \tag{4-31c}$$

である。Eq.(4-31b)およびEq.(4-31c)は、通常のenergyとmomentumの波動方程式である。$\phi_{\lambda\xi}(\xi)$, $\phi_{k0}(o)$, および ϕ_{kx} は、それぞれ、完全直交系をなす。すなわち、

$$\int\phi^*_{\lambda\xi}(\xi)\,\phi_{\lambda'\xi}(\xi)\,e^{-\frac{4\xi}{a}}\,d\xi=\delta_{\lambda_\xi\lambda'_\xi}\,,\quad\sum_{\lambda_\xi}\phi_{\lambda_\xi}(\xi)\,\phi^*_{\lambda_\xi}(\bar{\xi})\,e^{-\frac{4\xi}{a}}=\delta_{\xi\bar{\xi}}\,, \tag{4-32a}$$

$$\int\phi^*_{k_0}(o)\,\phi_{k'_0}(o)\,do=\delta_{k_0k'_0}\,,\quad\sum_{k_0}\phi^*_{k_0}(o)\,\phi_{k_0}(o)\,do=\delta_{k_0k'_0}\,, \tag{4-32b}$$

$$\int\phi^*_{k_x}(x)\,\phi_{k'_x}(x)\,dx=\delta_{k_xk'_x}\,,\quad\sum_{k_x}\phi_{k_x}(x)\,\phi^*_{k_x}(\bar{x})=\delta_{x\bar{x}}\,, \tag{4-32c}$$

である。したがって、$\phi(\xi x)$ は ϕ_{λ_ξ} と ϕ_{k_x} で展開できる。

$$\phi(\xi x)=\sum_{\lambda_\xi}B_{\lambda_\xi k_x}\,\phi_{\lambda_\xi}(\xi)\,\phi_{k_x}(x)\,, \tag{4-33}$$

とおいて、これを Eq.(4-30)に代入して、少し変形すれば、

$$\sum_{\lambda_\xi k_x}\left(\lambda_\xi+e^{\frac{2\xi}{a}}(k_x^2+\mu^2-W)\right)\phi_{\lambda_\xi}(\xi)\,\phi_{k_x}(x)=(-)\,e^{\frac{2\xi}{a}}V(\xi x)\,\phi(\xi x)\,, \tag{4-34}$$

となる。Eq.(4-34)の左辺から $\phi^*_{k'_x}(x)$ をかけて直交関係 Eq.(4-32c)を用いると

$$\sum_{\lambda\xi}B_{\lambda_\xi k'_x}\left(\lambda_\xi+e^{\frac{2\xi}{a}}(k'^2_x+\mu^2-W)\right)\Phi_{\lambda_\xi}(\xi)=(-)\left\langle\phi_{k'_x}\middle|e^{\frac{2\xi}{a}}V(\xi x)\middle|\phi(\xi x)\right\rangle, \tag{4-35}$$

となる。更に、$\phi^*_{\lambda'_x}(\xi)$ を左からかけて積分し、$\lambda'_\xi\leftrightarrow\lambda_\xi$ および $k'_{x'}\leftrightarrow k_x$ とおきかえれば

$$\sum_{\lambda_{\xi'}}B_{\lambda'_\xi k_x}\left\{\lambda_\xi\delta_{\lambda_\xi\lambda'_\xi}+\left\langle\lambda_\xi\middle|e^{\frac{2\xi}{a}}(k_x^2+\mu^2-w)\middle|\lambda'_\xi\right\rangle\right\}=(-)\left\langle\lambda_\xi k_x\middle|e^{\frac{2\xi}{a}}V(\xi x)\middle|\phi(\xi x)\right\rangle, \tag{4-36}$$

となる。この方程式は λ_ξ に関する coupled equation であり、これ以上解くことは出来ない。ここで

$$\Gamma_{\lambda_\xi\lambda'_\xi:k_x}\equiv\lambda_\xi\delta_{\lambda_\xi\lambda'_\xi}+\left\langle\lambda_\xi\middle|e^{\frac{2\xi}{a}}(k_x^2+\mu^2-W)\middle|\lambda'_\xi\right\rangle, \tag{4-37}$$

とおくと、Eq.(4-35)は

$$\sum_{\lambda_{\xi'}}\Gamma_{\lambda_\xi\lambda'_\xi:kx}B_{\lambda'_\xi:k_x}=(-)\left\langle\lambda_\xi k_x\middle|e^{\frac{2\xi}{a}}V(\xi x)\middle|\phi(\xi x)\right\rangle, \tag{4-38}$$

となる。$\Gamma_{\lambda_\xi\lambda'_\xi:kx}$ の逆行列を $\Gamma^{-1}_{\lambda'_\xi\lambda_\xi:kx}$ とすると、

$$\sum_{\lambda'_\xi}\Gamma^{-1}_{\lambda_\xi\lambda'_\xi:k_x}\Gamma_{\lambda'_s\lambda'_s:k_x}=\sum_{\lambda'_s}\Gamma_{\lambda_\xi\lambda'_\xi:k_x}\Gamma^{-1}_{\lambda'_\xi\lambda'_\xi:k_x}=\delta_{\lambda_\xi\lambda'_\xi}\,, \tag{4-39}$$

である。Eq.(4-38)の左辺から $\Gamma^{-1}_{\lambda'_\xi\lambda_\xi}$ をかけて、λ_ξ についての和をとり、λ_ξ と λ'_ξ とを入れかえれば

$$B_{\lambda_\xi k_x}=(-)\sum_{\lambda'_\xi}\Gamma^{-1}_{\lambda_\xi\lambda'_\xi:k_x}\left\langle\lambda'_\xi k_x\middle|e^{\frac{2\xi}{a}}V(\xi x)\middle|\phi(\xi x)\right\rangle, \tag{4-40}$$

をうる。これより、Eq.(4-30)の第２式の解は

$$\phi(\xi x)=\phi^{(0)}(\xi x)+(-)\sum_{\lambda'_\xi k_x}\left|\lambda'_\xi k_x>\Gamma^{-1}_{\lambda_\xi\lambda'_s}\left\langle\lambda_\xi k_x\middle|e^{\frac{2\xi}{a}}V(\xi x)\middle|\phi(\xi x)\right\rangle\right., \tag{4-41}$$

となる。ここで、$\phi^{(0)}(\xi x)$ は $V=0$ のときの Eq.(4-30)の解である。これより、我々の model における scalar 場の propagator、すなわち Green 関数は、

$$G(\xi x:\bar{\xi}\bar{x})\equiv(-)\sum_{\lambda_\xi\lambda'_\xi k_x}\left|\lambda_\xi k_x>\Gamma^{-1}_{\lambda_\xi\lambda'_\xi}<\lambda'_{\bar{\xi}}k_{\bar{x}}\right|, \tag{4-42}$$

となる。

次に、λ_ξ-mode と λ_k-mode とが独立な場合には、Green 関数はどのような形になるかをみよう。議論を簡単にするために、Green 関数は diagonal part のみの場合について考えよう。すなわち

$$G^{(D)}(\xi x:\bar{\xi}\bar{x})\equiv\sum_{\lambda_\xi k_x}\left|\lambda_\xi k_x>\frac{(-)}{\lambda_\xi+\left\langle\lambda_\xi\middle|e^{\frac{2\xi}{a}}(k_x^2+\mu^2-W)\middle|\lambda_\xi\right\rangle}<\lambda_{\bar{\xi}}k_{\bar{x}}\right|, \tag{4-43}$$

を用いて議論しよう。そのために、まず、Eq.(4-31a)を解こう。

$$\phi_{\lambda_\xi}(\xi)=B_\lambda e^{ib_\lambda\xi}, \tag{4-44}$$

とおいて、Eq.(4-31a)に代入すると

$$(\Lambda_\xi+\lambda_\xi)\phi_{\lambda\xi}(\xi)=B_{\lambda_\xi}(-b_\lambda^2-\frac{4i}{a}b_\lambda+\lambda_\xi)e^{ib_\lambda\xi}=0, \tag{4-45}$$

これより

$$\lambda_\xi=b_\lambda^2+\frac{4i}{a}b_\lambda\quad\therefore\quad b_\lambda=(-)\frac{2i}{a}+X_\lambda,\quad X_\lambda^2\equiv\lambda_\xi-\left(\frac{2}{a}\right)^2, \tag{4-46}$$

をうる。これを用いると、

$$\phi_{\lambda_\xi}(\xi)=B_\lambda e^{ib_\lambda\xi}=B_\lambda e^{\frac{2}{a}\xi}e^{ix_\lambda\xi}, \tag{4-47}$$

となる。これを用いて、matrix element $\left\langle\lambda'_\xi\middle|e^{\pm\frac{2}{a}\xi}\middle|\lambda_\xi\right\rangle$ を計算しよう。

(A) $$\left\langle\lambda'_\xi\middle|e^{\frac{2}{a}\xi}\middle|\lambda_\xi\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Lambda\to\infty}\int_0^\Lambda e^{(i(x_\lambda-x'_\lambda)+\frac{2}{a})\xi}d\xi=\frac{a^2}{2\pi}\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{e^{(i(x_\lambda-x'_\lambda)+\frac{2}{a})\Lambda}}{i(x_\lambda-x'_\lambda)+\frac{2}{a}}\to\infty, \tag{4-48}$$

(B) $$\left\langle\lambda'_\xi\middle|e^{-\frac{2\xi}{a}}\middle|\lambda_\xi\right\rangle=\frac{a^2}{2\pi}\cdot\frac{(-)}{i(x_\lambda-x'_\lambda)-\frac{2}{a}}, \tag{4-49}$$

となるから (B) の場合には

$$G^{(D)}(\xi x:\bar{\xi}\bar{x})=\sum_{\lambda_\xi k_x}\left|\lambda_\xi k_x>\frac{(-)}{\lambda_\xi+Q^2}<\lambda_{\bar{\xi}}k_{\bar{x}}\right|, \tag{4-50}$$

但し、
$$Q^2 \equiv \frac{a^2}{4\pi}(k_x^2+\mu^2-W),$$
となる。ここで、

$$\begin{aligned}\lambda_\xi + Q^2 &= b_\lambda^2 - \frac{4i}{a}b_\lambda + Q^2\\ &= \left(b_\lambda - \frac{2i}{a}\right)^2 + Q^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2,\\ &\cong X_\lambda^2 + Q^2,\quad Q^2 >> \left(\frac{2}{a}\right)^2\end{aligned} \tag{4-51}$$

とすると
$$\frac{1}{x^2+Q^2} = \frac{1}{2iQ}\left(\frac{1}{X-iQ} - \frac{1}{X+iQ}\right), \tag{4-52}$$

となるから
$$G^{(D)} \equiv G_{(D)}^{(+)} + G_{(D)}^{(-)}$$

$$G_D^{(+)} \equiv \sum_\lambda \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2iQ}\frac{e^{iX(\xi-\bar{\xi})}\cdot e^{-\frac{2}{a}(\xi-\bar{\xi})}}{X+iQ} - e^{-k(x-\bar{x})}, \tag{4-53a}$$

および $$G_D^{(-)} \equiv \sum_\lambda \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2iQ}\frac{e^{iX(\xi-\bar{\xi})}e^{-\frac{2}{a}(\xi-\bar{\xi})}}{X-iQ}e^{ik(x-\bar{x})}, \tag{4-53b}$$

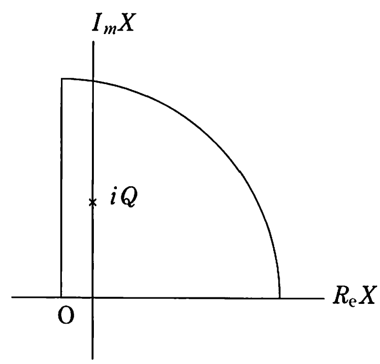


Fig.（4—2）

と分解しよう。$G_D^{(-)}$ については $\sum_\lambda$ を積分でおきかえて、積分路を右図のようにとれば、pole は imaginary 軸上の iQ にあるから、留数は $2\pi iQ^{i(iQ)}$ である。これより、
$$G_D^{(-)} = \sum_k \frac{1}{2Q}e^{-Q(\xi-\bar{\xi})}e^{-\frac{2}{a}(\xi+\bar{\xi})}e^{ik(x-\bar{x})}, \tag{4-54}$$

となる。しかし、この形は propagator として採用することは出来ない。というのは、propagator の正しい形は分母に、Q ではなく $Q^2 = \frac{1}{4\pi}(k_x^2+\mu^2-W)$ が入らなければならないからである。このことから、λ_ξ-mode と k_x-mode は独立であるとするのは適切ではない。

次に、何故我々の model では発散がおきないかについて、具体例を使って考えよう。例として、第一章で扱った、無限に重い核子が中間子を放出後、再び吸収する場合を考えよう。Fig.(4-3)で、energy 保存則と momentum の保存量から、それぞれ、
$$E_p = E_{p'} + E_k \quad E_k = k_0^2, \tag{4-55}$$
および
$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{k}, \tag{4-56}$$
をうる。$(k_0,\ \boldsymbol{k})$ は 4 元 vector を成すが、shell 上にはない、すなわち、

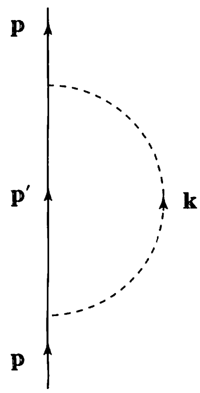


Fig. (4—3)

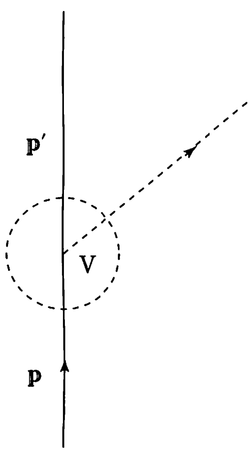


Fig. (4—4)

$$-k_0^2+\boldsymbol{k}^2\neq 0\,, \tag{4-57}$$

である。Fig.(4-4)のように、potential V があれば、energy 保存則と momemtum 保存則とが同時に成り立つから、

$$\text{“}V\text{”}=k_0^2-\boldsymbol{k}^2\ , \tag{4-58}$$

となる。このとき、free 中間子の propagator は

$$\frac{1}{-k_0^2-\boldsymbol{k}^2}\,, \tag{4-59}$$

である。

我々の model における相互作用は extended homogeneous Lorentz 変換 (Λ_μ^λ) の homogeneous Lorentz 変換 (Λ_b^a) による剰余因子であたえられる。このことから、相互作用の強さは ξ の値であらわすことが出来るのと同じことである。これは、また、第 2 章における p_2 軸（または、Z_2 軸）の値に対応している。ここで、相互作用はきわめてゆっくり入れるとしよう。すなわち、$\dfrac{d\xi}{ds}\cong 0$ と仮定しよう。

このことをふまえて、Eq.(3-35)から

$$ds^2=d\xi^2+e^{-\frac{2\xi}{a}}(-dt^2+d\boldsymbol{x}^2)\,, \tag{3-33}$$

より

$$1=\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2+e^{-\frac{2\xi}{a}}(-Q_0^2+\boldsymbol{Q}^2)\,, \tag{4-60}$$

である。但し、ここで、Q_0 と $\boldsymbol{Q}$ は、それぞれ

$$Q_0\equiv\frac{dt}{ds}\quad および\quad \boldsymbol{Q}\equiv\frac{dx}{ds}\,, \tag{4-61}$$

と定義する。Q_0 と $\boldsymbol{Q}$ とは、それぞれ我々の model における energy と momentum である。仮定により $\dfrac{d\xi}{ds}\cong 0$ であり、また、中間子の質量を μ として、質量項まで考慮すれば、Eq.(4-60)は

$$1=e^{-\frac{2\xi}{a}}(-Q_0^2+\boldsymbol{Q}^2+\mu^2)\,, \tag{4-62}$$

とかけるであろう。これより、potential（相互作用）は

$$\text{“}V\text{”}=-Q_0^2+\boldsymbol{Q}^2+\mu^2=e^{\frac{2\xi}{a}}\ , \tag{4-63}$$

となる。したがって、Eq.(4-62)より、我々の model における propagator は

$$\frac{1}{-Q_0^2+\boldsymbol{Q}^2+\mu^2}=e^{-\frac{2\xi}{a}}\,, \tag{4-64}$$

となる。系が時間によらない定常状態であれば、Eq.(4-6)で $Q_0=0$ として、積分すれば、

$$\int \frac{dQ}{Q^2+\mu^2} = \int_{\frac{a}{2}\log_e \mu^2} e^{-\frac{2\xi}{a}} d\xi\,, \tag{4-65}$$

となる。この積分はEq.(1-4)に対応するが、右辺は明らかに収束している。

5. 保存量

ある物理系の方程式と保存量は、その系のLagrangeanがあたえられれば、変分原理から求まる。また、場の振舞いは、求められた方程式から決定される。

ここで、次のような変分を考えよう。

まず、座標変換については

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu\,, \tag{5-1}$$

また、場の量については

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = \varphi(x) + \delta\varphi(x)\,, \tag{5-2}$$

のように変換するものとする。δx も $\delta\varphi$ も無限小量であり、δ の一次まで考慮し、それ以上は無視する。ここで、注意することは、$\varphi'(x')$ は $\varphi(x)$ の変分と、同時に、座標変換も行うものとする。したがって、x は x' となっているが、同一の点での場の量をあらわす。ここで、Eq.(5-2)と少し異った変分を

$$\bar{\delta}\varphi(x) \equiv \varphi'(x'=a) - \varphi(x=a)\,, \tag{5-3}$$

で定義する。この意味は、変換後の新しい座標値 $x'^\mu = a$ という値をもつ時空点 Q と、もとの座標で、x^μ の値が $x^\mu = a$ という時空点 P における値の差をあらわす。右図のような P, Q 点をとると

$$\bar{\delta}\varphi(x) \equiv \varphi'(Q) - \varphi(P)\,, \tag{5-4}$$

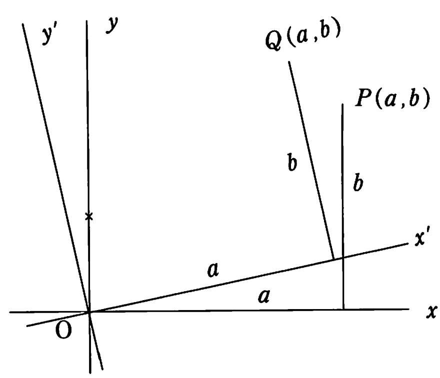


Fig. (5—1)

である。次に、$\delta\varphi$ と $\bar{\delta}\varphi$ との間の関係を求めよう。

$$\begin{aligned}
&\bar{\delta}\varphi(x=a)\\
&= \varphi'(x'=a) - \varphi(x=a)\\
&= \varphi'(x'=a+\delta x-\delta x) = \varphi(x=a)\\
&= \varphi'(x'=a+\delta x) - \varphi(x=a) - \delta x^\rho \partial_\rho \varphi'(x'=a+\delta x)\\
&= \delta\varphi(x) - \partial x^\rho \partial_\rho \varphi(x)
\end{aligned} \qquad , \tag{5-5}$$

この計算で、δ^2 以上の無限小量は無視した。一般に、δ と $\bar{\delta}$ との間には、φ と $\partial_\mu\varphi$ との関数 $\Phi(\varphi,\ \partial_\mu\varphi)$ に対して、

$$\bar{\delta}\Phi = \delta\Phi - \delta x^{\rho}\partial_{\rho}\Phi \tag{5-6}$$

が成立する。$\bar{\delta}\varphi$ が便利なことは、$\bar{\delta}$ と ∂_{μ} とが可換な点にある。

$$\begin{aligned}
\delta\partial_{\mu}\varphi &= \partial'_{\mu}\varphi'(x') - \partial_{\mu}\varphi(x) \\
&= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'_{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}(\varphi(x) + \delta\varphi(x)) - \frac{\partial}{\partial x^{r}}\varphi(x) \\
&= (\delta^{\rho}_{\mu} - \partial_{\mu}\delta x^{\rho})(\partial_{\rho}\varphi + \partial_{\rho}\delta\varphi) - \partial_{\mu}\varphi(x) \\
&= \partial_{\mu}\delta\varphi - (\partial_{\mu}\partial x^{\rho})(\partial_{\rho}\varphi) \quad ,
\end{aligned} \tag{5-7}$$

一方、Eq.(5-6)から

$$\bar{\delta}\partial_{\mu}\varphi = \delta\partial_{\mu}\varphi - \delta x^{\rho}\partial_{\rho}(\partial_{\mu}\varphi), \tag{5-8}$$

であるから、Eq.(5-8)の右辺第一項にEq.(5-7)を代入すると

$$\bar{\delta}\partial_{\mu}\varphi = \partial_{\mu}\bar{\delta}\varphi, \tag{5-9}$$

となる。

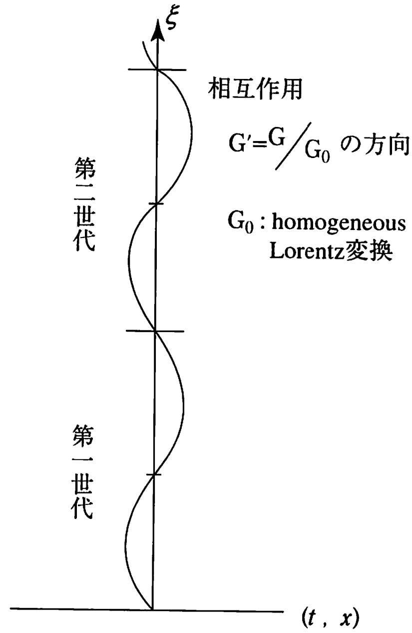


Fig. (5—2)

これで準備が出来たので、我々の model space における保存量について議論しよう。Lagrangean は、Eq.(4-18)、すなわち

$$L = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha}\phi)(\partial_{\beta}\phi), \tag{4-10}$$

であり、作用積分は

$$I = \int L\sqrt{g}\,dV, \quad dV = d\xi dtdxdydz, \tag{5-10}$$

である。ここで、metric は固定しておいて変分はとらない。したがって、変分は scalar 場 φ のみについて行い、それと同時に座標変換を行うものとする。Eq.(5-10)の変分をとると

$$\delta I = \int \delta L\sqrt{g}\,dV + \int L\delta\left(\sqrt{g}\,dV\right), \tag{5-11}$$

となるが、$\sqrt{g}\,dV$ は座標変換によって不変だから、$\delta\left(\sqrt{g}\,dV\right) = 0$, である。また、$g^{\alpha\beta}$ については、座標変換のみで、変分はとらないのであるから、$g^{\alpha\beta}$ の変化は

$$\delta g^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}{}_{,\rho}\delta x^{\rho}, \tag{5-12}$$

となる。これより

$$\delta L = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}{}_{,\rho}\delta x^{\rho}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + g^{\alpha\beta}\delta\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}, \tag{5-13}$$

となる。

また、$\bar{\delta}\phi = \delta\phi - \delta x^{\rho}(\partial_{\rho}\phi)$ および $\bar{\delta}\phi_{,\alpha} = \delta\phi_{,\alpha} - \delta x^{\rho}(\partial_{\rho}\phi_{,\alpha})$, (5-14)

であるから、

$$\delta L = -\underline{\partial_\alpha\left(g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta}\sqrt{g}\right)}\overline{\delta\phi}$$

$\|$ 運動方程式 Eq.(4-21)による。

0

$$+\partial_\alpha\left(g^{\alpha\beta}\overline{\delta}\phi\phi_{,\beta}\sqrt{g}\right)$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}{}_{,\rho}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}+g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}(\partial_\rho\phi_{,\beta})\right)\sqrt{g}}\ \delta x^\rho, \tag{5-15}$$

となる。一方

$$(\partial_\rho L)\sqrt{g} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}{}_{,\rho}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}+g^{\alpha\beta}(\partial_\rho\phi_{,\alpha})\phi_{,\beta}\right)\sqrt{g}} \tag{5-16}$$

であるが、Eq.(5-16)を用いて、Eq.(5-15)の〰〰の部分を消去すれば、

$$\delta L\sqrt{g} = \partial_\alpha\left(g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta}\sqrt{g}\,\delta\phi\right)-\partial_\alpha\left(\left(g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta}(\partial_\rho\phi)-\delta^\alpha_\rho L\right)\sqrt{g}\,\delta x^\rho\right)-L\partial_\rho\left(\sqrt{g}\,\delta x^\rho\right), \tag{5-17}$$

となる。ϕ は scalar 場であり、内部自由度をもたないので、Eq.(5-17)の右辺第一項は零とおこう。ここで、T^α_β を

$$T^\alpha_\rho \equiv g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta}(\partial_\rho\phi)-\delta^\alpha_\rho L, \tag{5-18}$$

で定義すれば

$$\delta I = -\int\partial_\alpha\left(T^\alpha_\rho\sqrt{g}\,\delta x^\rho\right)dV-\int L\partial_\rho\left(\sqrt{g}\,\delta x^\rho\right)dV, \tag{5-19}$$

となる。ここで、$\sqrt{g}=e^{-\frac{4\xi}{a}}$ であり、ξ のみの関数であるから、$\xi=\mathrm{const}$ ならば、Eq.(5-19)の右辺の第2項は消えてしまう。その結果、Eq.(5-19)は通常の energy-momentum の保存をあらわす式となる。

次に、δx^ρ のいろいろな場合について対応する保存量を求めよう。

（イ） $\delta x^0=\varepsilon$, $\delta x^\xi=\delta x^i=0$, $i=1, 2, 3$, $\xi=\mathrm{const}$ の場合、但し、ここで 0 は時間成分、1, 2, 3 は x, y, z 成分をあらわす。

$$J \equiv \int T^0_0\sqrt{g}\,dV^{(0)} \quad dV^{(0)}=dx^1dx^2dx^3 \tag{5-20}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
O &= \int_{T_0}^{T}\int\partial_\alpha\left(T^\alpha_0\sqrt{g}\right)dx^0dV^{(0)}\\
&= \int_{T_0}^{T}\left|\partial_0\left(T^0_0\sqrt{g}\right)+\underbrace{\partial_i\left(T^i_0\sqrt{g}\right)}_{\substack{\| \\ 0\ at\ \mathrm{infinity}}}+\overbrace{\partial_\xi\left(T^\xi_0\sqrt{g}\right)}^{\substack{0 \\ \|}}\right|dx^0dV^{(0)}\\
&= \int_{T_0}^{T}\partial_0 J dx^0\\
&= J(T)-J(T_0)
\end{aligned} \tag{5-21}$$

となり、J は時間によらない保存量となる。これは、通常の energy 保存量である。

（ロ） 例えば、x 方向のみの変位 $\delta x^1=\varepsilon$

他の変位 = 0 また ξ = const の場合

$$P \equiv \int T_1^1 \sqrt{g}\, dV^{(1)},\ \ dV^{(1)} \equiv dx^2 dx^3 dx^0\,, \tag{5-22}$$

とおく、（イ）の場と同様なやり方で

$$\partial_1 P \equiv O\,, \tag{5-23}$$

をうる。このことより、P は x-方向の momentum の保有をあらわす。y, z 方向についても同様な議論が出来る。

（ハ）$d\xi = \varepsilon$,で $dx^0 = dx^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, の場合、$\partial_\xi \sqrt{g} = (-)\frac{4}{a}\sqrt{g}$ であるから、Eq.(5-19)は

$$\begin{aligned} O &= \int \left\{ |\partial_\alpha \left(T_\xi^\alpha \sqrt{g} \right) + (-)\frac{4}{a} L \sqrt{g} \right\} dV^{(\xi)} \\ &= \int \left\{ \partial_\xi \left(T_\xi^\xi \sqrt{g} \right) + \underset{\substack{\parallel \\ 0\ at\ \mathrm{infinity}}}{\underline{\partial_0 \left(T_\xi^0 \sqrt{g} \right) + \partial_i \left(T_\xi^i \sqrt{g} \right)}} + (-)\frac{4}{a} L \sqrt{g} \right\} dV^{(\xi)} \\ &= \int \left\{ \partial_\xi \left(T_\xi^\xi \sqrt{g} \right) + (-)\frac{4}{a} L \sqrt{g} \right\} dV^{(\xi)} \qquad , \end{aligned} \tag{5-24}$$

これより、

$$\partial_\xi \left(T_\xi^\xi \sqrt{g} \right) + (-)\frac{4}{a} L \sqrt{g} = 0, \tag{5-25}$$

とおいてよいであろう。$T_\xi^\xi = \phi,_\xi^2 - L$ であるから、Eq.(5-25)は

$$\partial_\xi \left(T_\xi^\xi \sqrt{g} \right) + \frac{4}{a}\left(T_\xi^\xi \sqrt{g} \right) + (-)\frac{4}{a} \phi,_\xi^2 \sqrt{g} = 0\,, \tag{5-26}$$

となる。ここで、Eq.(5-26)を解こう。そのために、まず、

$$\partial_\xi \left(\hat{T}_\xi^\xi \sqrt{g} \right) + \frac{4}{a}\left(\hat{T}_\xi^\xi \sqrt{g} \right) = 0\,, \tag{5-27}$$

の解は

$$\hat{T}_\xi^\xi \sqrt{g} = A e^{-\frac{4}{a}\xi},\ \ A: \text{定数}\,, \tag{5-28}$$

であるから、

$$T_\xi^\xi \sqrt{g} = X(\xi)\, e^{-\frac{4}{a}\xi}\,, \tag{5-29}$$

とおいて、これを Eq.(5-26)に代入すると、

$$\partial_\xi X(\xi) = \frac{4}{a} \phi,_\xi^2 \tag{5-30}$$

をうる。これより、

$$X(\xi) = \frac{4}{a} \int_0^\xi \phi,_{\xi'}^2 d\xi' \tag{5-31}$$

となる。したがって、Eq.(5-26)の解は、

$$T_\xi^\xi \sqrt{g} = \frac{4}{a} e^{-\frac{4}{a}\xi} \int_0^\xi \phi,_{\xi'}^2 d\xi'\,, \tag{5-32}$$

となる。Eq.(5-26)の右辺第二項を無視すれば

$$T_\xi^\xi \sqrt{g} \propto e^{-\frac{4}{a}\xi}\,, \tag{5-33}$$

であり、a が虚数ならば、$T_\xi^\xi \sqrt{g}$ は

,

$$\xi=\frac{\pi|a|}{2},\ n\quad n=0,\ 1,\ 2, \tag{5-34}$$

なる波長をもつ周期関数である。いいかえると、相互作用の増大にともなって、tensor T_ξ^ξ は周期性を示すのである。

Appendices

Van Hove の定理

H_0 の固有 vector の張る空間は、H_0+gH_1 の固有 vector の張る空間の外にある。すなわち、固有値問題を解くに用いる空間は、Hamiltonian ごとに異っていて、互に結びつける unitary 変換は存在しない。例えば、湧き出し $g\delta(x)$, をもつ Hamiltonian では、涌き出しの結合定数 g が異るごとに用いるべき空間が異っている。

Haag の定理

どんな場の理論であっても、次の4つの条件をみたせば、その理論は自由場の理論に等しい。

1）Poincaré 変換の変換性

2）unique, normalizable, invariant な真空が存在し、negative energy state は存在しない。

3）同時刻における canonical commutation relation が存在する。

4）ある時刻において、自由場と結びつける unitary 変換が存在する。