# 微小要素モデルとその非線形解析手法の研究

畠山, 正之 / 吉田, 長行 / YASUKAWA, Junpei / YOSHIDA, Nagayuki / HATAKEYAMA, Masayuki / 安川, 純平

(出版者 / Publisher)
法政大学情報メディア教育研究センター
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学情報メディア教育研究センター研究報告
(巻 / Volume)
21
(開始ページ / Start Page)
109
(終了ページ / End Page)
115
(発行年 / Year)
2008-03-31
(URL)
https://doi.org/10.15002/00003012

http://hdl.handle.net/10114/1527

# 微小要素モデルとその非線形解析手法の研究

# A Study on Infinitesimal Element Model And Nonlinear Analytical Method

畠山　正之[1)]　　安川　純平[1)]　　吉田　長行[2)]
Masayuki Hatakeyama, Junpei Yasukawa, Nagayuki Yoshida

[1)] 法政大学大学院工学研究科建設工学専攻
[2)] 法政大学工学部建築学科

We need to analyze the fracture phenomena due to the disasters such as earthquakes. Because we can not derive the exact result in detail by the analytical method for the continuum, we take a new physical approach based on the infinitesimal element model. By this model, we can analyze the whole domain of deformation from an elastic continuity to the plastic deformation until the structures are totally divided into particles. We simulate nonlinear behavior of concrete structures by this method.

***Keyword*** : Infinitesimal element model, Nonlinear analysis, Discrete particle

## 1．はじめに

現在, 連続体解析では, 有限要素法が主流であり，高い精度で解析することができる．構造物や地盤が何らかの原因によって，クラックや剥離，すべりなどの破壊が発生すると，その部分が所持していた応力の解放によって破壊が進展する．さらに，その破壊が進展し続けると最終的にはメカニズムが形成され，固体は離散状態に至る．計算固体力学によってこのような進行型の破壊現象を解析するとき，障壁となっているのが不連続箇所の取り扱いである．不連続体の数値解析法としては，有限要素法(Finite Element Method, FEM)に滑り要素を導入したものや，塑性崩壊状態の解析手法として，変分原理に基づいて定式化される川井の剛体ばねモデル(Rigid Body Spring Model, RBSM)[1]，対象を剛体粒子の集合体として取り扱う Cundall の DEM(Distinct Elemental Method,個別要素法)[2], がある. 個別要素法に関して, Gen-hua Shi は各要素を剛体とみなし，有限要素法により解くというハイブリッド法とも言うべき DDA(Discontinuous Deformation Analysis，不連続変形法)[3]を，伯野らは要素間に間隙ばねを導入することにより，連続体まで取り扱えるように拡張した，拡張個別要素法(Extended Distinct Element Method, EDEM)を提案している．

そこで，本研究では微小変形から大変形・崩壊に至るまでの挙動を統一的に追跡できる新たな物理モデルとその非線形解析手法を提案する．その基本的概念は DEM と共通するが，隅角部にポアソン効果とせん断変形を表現するばねを導入した，離散粒状体モデルである．その定式化を行い，数値解析例を挙げ，本手法の有効性を示す．

## 2．微小要素モデル

本論文で提案する微小要素モデルは，連続体としての微分要素(differential element)を質点とそれを繋ぐ線ばねからなる離散的な微小要素(infinitesimal element)に置き換える．モデル化の様子を Fig.1 に示す. このモデルを本研究では微小要素モデルと呼ぶ.

原稿受付　2008 年 2 月 29 日
発行　2008 年 3 月 31 日
法政大学情報メディア教育研究センター

このようなモデル化により極限において厳密解に収束することが約束される．

こうして得られる微小要素の隅角部に，Fig.2 に示すポアソン効果とせん断変形を表現する 2 種類のばねを導入することにより，微小変形時の弾性的挙動を表現する．

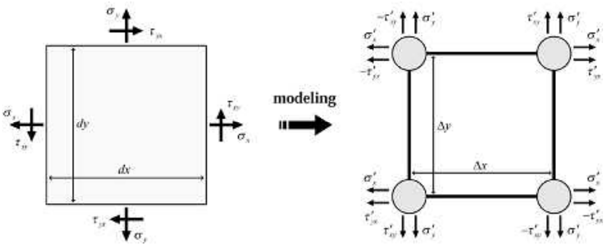



Fig. 1　Modeling to infinitesimal element from differential element

## 2.1 ポアソンばね

ポアソン効果(Poisson’s effect) を物理モデルに置き換えるために，2 つの直交する直ひずみの和に反応するばねを想定する．このばねをポアソンばねと呼ぶ．ばねの剛性が無限大の場合には次式が成立する．

$$\varepsilon_{1n} + \varepsilon_{2n} = 0 \qquad (1)$$

## 2.2 せん断ばね

通常用いられる接線方向のせん断ばねでは，せん断変形のみが発生して曲げ変形が生じないという欠点がある．そこで，この欠点を除くためにせん断変形を拘束し、曲げ変形を表現するばねを想定する．このばねをせん断ばねと呼ぶ．ばねの剛性が無限大の場合には次式が成立する．

$$\varepsilon_{1n} + \varepsilon_{2n} = 0 \qquad (2)$$

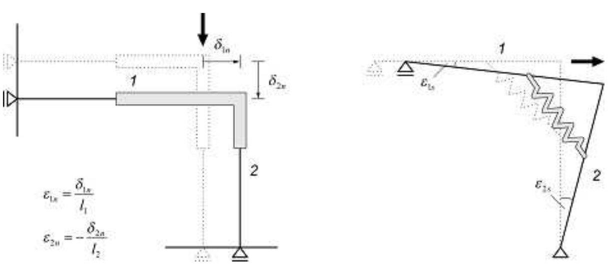


Fig. 2　Corner springs for Poisson’s effect and shear deformation

## 2.3 ばね定数の算定

ポアソンばねを 2 つの直交する直ひずみの和，せん断ばねをせん断ひずみに反応するばねとして，Fig.3 に示す四角形領域のひずみエネルギーを評価すると次式になる．

$$\Pi = \frac{1}{2} S_0 t \sum_{q=1}^{4} \left[ E_q \varepsilon^2{}_{qn} + H_q \left\{ \varepsilon_{qn} + \varepsilon_{(q-1)n} \right\}^2 + G_q \left\{ \varepsilon_{qs} + \varepsilon_{(q-1)s} \right\}^2 \right] \qquad (3)$$

ただし，$q=1$ のとき $q-1=4$ とする．また，$S$ は四角形領域の面積，$t$ は材厚，$E_q$ は線ばねの弾性係数，$H_q$ はポアソンばねのばね定数，$G_q$ はせん断ばねのばね定数を表わす．

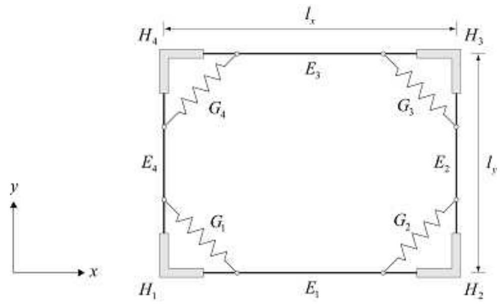


Fig.3　Rectangular region $l_y$ by $l_x$

微小要素モデルは連続体としての微分要素を物理モデルに置換したものである．したがって，線形弾性体と微小要素モデルのひずみエネルギーを等価におくことによって，モデルを構成する各ばね定数を算定することができる．算定された各ばね定数を Table.1 に示す．

| | 2Dstrain problem | 2D stress problem |
|---|---|---|
| $E_q$ | $\frac{E'}{(1+v')}$ | $\frac{E}{(1+v)}$ |
| $H_q$ | $\frac{v'E'}{2(1-v'^2)}$ | $\frac{vE}{2(1-v^2)}$ |
| $G_q$ | $\frac{G'}{2}=\frac{E'}{4(1+v')}$ | $\frac{G}{2}=\frac{E}{4(1+v)}$ |
| $G=\frac{E}{2(1+v)}=\frac{E'}{2(1+v')}=G'$, $E'=\frac{E}{1-v^2}$, $v'=\frac{v}{1-v}$ | | |

Table.1　Constants of longitudinal and corner springs

### 3．数値解析法

ここでは，微小要素モデルによる解析手法の特徴を述べ，その適用範囲を整理する．

#### 3.1 個別計算法

個別計算法とは，問題を動的なものとして取り扱い，各質点ごとに独立した運動方程式を立て，それらを差分近似により時間領域で前進的に解くという手法である．その際，運動方程式は隣接するすべての質点の影響を考慮したものでなければならない．この方法は，全体剛性マトリクスを必要とせず，マトリクスの性質に左右されないという利点がある．隣接する質点による影響を考慮すると，第 $q$ 質点に関して運動方程式は，

$$m_q \ddot{u}_q = f_q - \sum_p \sum_{k=1}^{n} ([C_{qk}^{(p)}]\{\dot{u}_k^{(p)}\} + [K_{qk}^{(p)}]\{u_k^{(p)}\}) \tag{4}$$

となる．ここで， $f_q$ は第 $q$ 質点にはたらく外力，$[C^{(p)}]$ は第 $p$ 要素の減衰マトリクス，$[K^{(p)}]$ は第 $p$ 要素の剛性マトリクスである．また，$\sum_p$ は質点 $q$ を含む要素 $p$ に関する総和を，$n$ は要素 $p$ に含まれる質点の総自由度を表わす．(Fig.4)

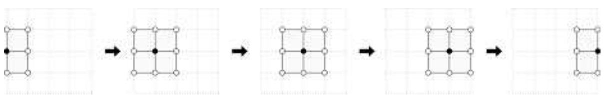


Fig.4　Individual calculation method

この運動方程式を各質点について逐次計算することにより，その集合体としての動的挙動を追跡する．その際，本研究において差分近似式は陽的数値積分法である Runge-Kutta 法[4]を用いた．

#### 3.2 粒子間の接触判定

微小要素モデルは土砂崩壊や液状化などの大変形を伴う現象の追跡を目的としている．すると，質点同士の貫入が発生し実際の現象にそぐわないため，以下に示す接触判定法を用いる．ただし，接触問題を扱う際には質点を大きさのある粒子として扱う．

#### 3.2.1 粒子間作用力

本研究では接触時にのみ粒子間に作用するばね[5]を想定する．Fig.5 に示すように 2 粒子 $i$， $j$ の接触面に作用する力を，法線方向に作用する圧縮力 $f_n$ と接線方向に作用するせん断力 $f_s$ に分けて考える．

法線方向作用力は Fig.5(a)に示すように，微小時間 $\Delta t$ における法線方向の相対変位増分 $\Delta u_n$ に比例した抗力増分 $\Delta e_n$ を生じる弾性スプリング（剛性定数 $K_n$ ）と相対変位速度 $\Delta \dot{u}_n$ に比例した抗力 $\Delta d_n$ を生じる粘性ダッシュポット（粘性定数 $\eta_n$ ）の並列配置を仮定する．

$$\Delta e_n = K_n \Delta u_n, \quad \Delta d_n = \eta_n \Delta \dot{u}_n \tag{5}$$

時刻 $t$ における 2 粒子間の法線方向圧縮力 $f_n(t)$ は次式で与えられる．

$$f_n(t) = e_n(t) + d_n(t) \tag{6}$$

Fig.5(b)に示すように，接線方向の相対変位増分 $\Delta u_s$ に対しても同様に，せん断抗力を与える弾性スプリング（剛性定数 $K_s$ ）と粘性ダッシュポット（粘性定数 $\eta_s$ ）の並列配置を仮定する．弾性抗力増分 $\Delta e_s$ と粘性抗力 $\Delta d_s$ は次式で表わせる．

$$\Delta e_s = K_s \Delta u_s, \quad \Delta d_s = \eta_s \Delta \dot{u}_s \tag{7}$$

以上より，時刻 $t$ における 2 粒子間の接線方向せん断力 $f_s(t)$ は次式で与えられる．

$$f_s(t) = e_s(t) + d_s(t) \tag{8}$$

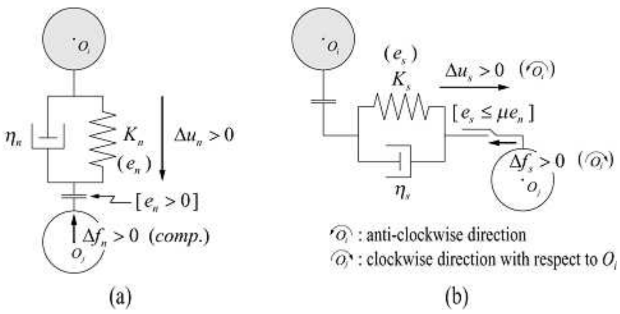



Fig.5　Elastic spring $(K)$ and viscous dashpot $(\eta)$ assumed for contact

#### 3.2.2 接触判定の効率化

通常の解析では 1 個の粒子に対する接触判定を他の全ての粒子について行うため，多くの計算時間が必要となる．そこで効率化のために，まず Fig.6 に示すように解析領域をセルで区切り各粒子を格納する．ここで，セルのサイズ $C$ は 1 つのセルに粒子の

中心$(x_0(i), y_0(i))$が1つ入るように次式で算出する．

$$C < \sqrt{2} r_{\min} \qquad (9)$$

このとき，接触可能な粒子の存在領域$L$は次式で与えられ，この領域のセル内の粒子との接触判定のみを行えばよく，計算期間が大幅に削減できる．

$x$方向：

$$INT(x_0(i) - 2r_{\max}) < L_x < INT(x_0(i) + 2r_{\max}) + 1 \qquad (10)$$

$y$方向：

$$INT(y_0(i) - 2r_{\max}) < L_y < INT(y_0(i) + 2r_{\max}) + 1 \qquad (11)$$

また，粒子間の力の伝達は作用反作用の法則に従うことから，接触力の計算は接触2粒子の一方についてのみ行い，相手粒子に同じ大きさの反力を与えるとより効率的である．

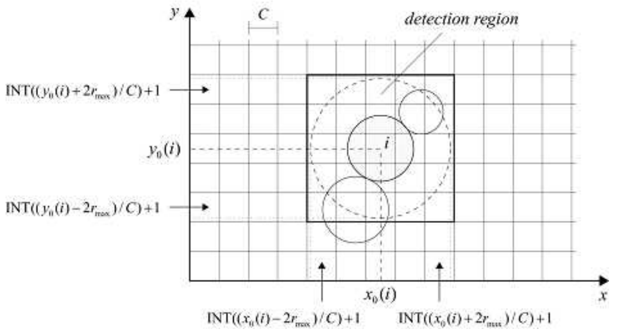



Fig.6　Detection region of contact between particles

## 4. 非線形解析手法

ここでは，コンクリートのような脆性材料の非線形性を考慮した非線形解析手法について述べる．

### 4.1 双曲線型構成則

本研究では, 双曲線モデル(hyperbolic model)[6]を構成則として用いている．双曲線モデルは

$$\sigma = \frac{E_{\max}\varepsilon}{1 + \dfrac{E_{\max}\varepsilon}{\sigma_{\max}}} \qquad (12)$$

で与えられる．

Fig.7 に双曲線モデルの構成則を示す．このモデルは，応力が$\sigma_{\max}$を超えないという特徴がある．モデルのパラメータは$E_{\max}$と$\sigma_{\max}$の二つであるが，$E_{\max}$は弾性定数なので，非線形挙動を決定するのは$\sigma_{\max}$だけである．

Fig.7 に示すように，式(12)に$\varepsilon = \varepsilon_r = \sigma_{\max}/E_{\max}$を代入すると，

$$\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{2} \qquad (13)$$

となる．すなわち$\varepsilon = \varepsilon_r$のとき，$E/E_{\max} = 0.5$である．ここで，$\varepsilon_r$は基準ひずみと呼ばれ，この性質を利用し，$\sigma_{\max}$を決定する．

本研究では，引張，圧縮，せん断に対して，降伏強度の違いから異なる$\sigma_{\max}$を用いて解析を行う．

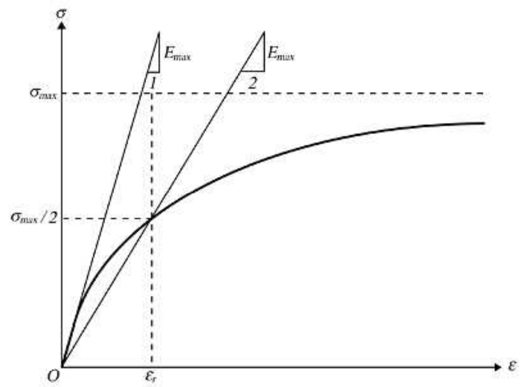



Fig.7　Hyperbolic model

### 4.2 非線形特性のモデル化

非線形解析の応力 - ひずみ関係では，処女載荷時の挙動と除荷後の挙動に分けて記述するのが普通である．Fig.8 において，処女載荷時の挙動(O→A→C)を骨格曲線，除荷後の挙動(A→B→A)を履歴曲線と呼ぶ．本研究では，処女載荷時の挙動と除荷後の挙動を別々にモデル化するのではなく，Masing の法則(Masing’s hypothesis)[7]を用いて骨格曲線から履歴曲線を作成する．

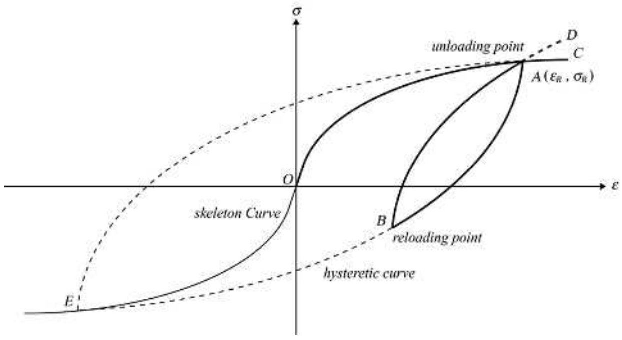


Fig.8　Stress-strain relation

## 5．解析例

ここでは，これまで述べてきた微小要素モデルの非線形解析手法を用いた解析例を挙げ，その有効性について検証する．

### 5.1 微小要素モデルの性能評価

本論文で用いた微小要素モデルによる非線形解析手法の性能評価として，片持ち梁と曲げ破壊試験における解析結果を有限要素法[8]と比較する．Fig.9 は片持ち梁の解析モデルであり，先端中央のたわみを Fig.10 に示す．また，曲げ破壊試験の解析モデルを Fig.11 に，中央底部のたわみを Fig.12 に示す．

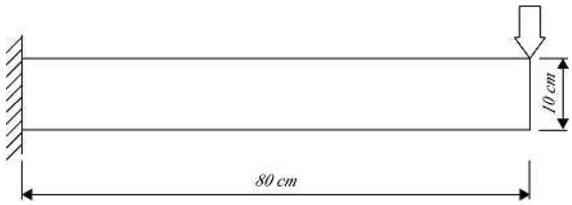



Fig.9　Analysis model for cantilever

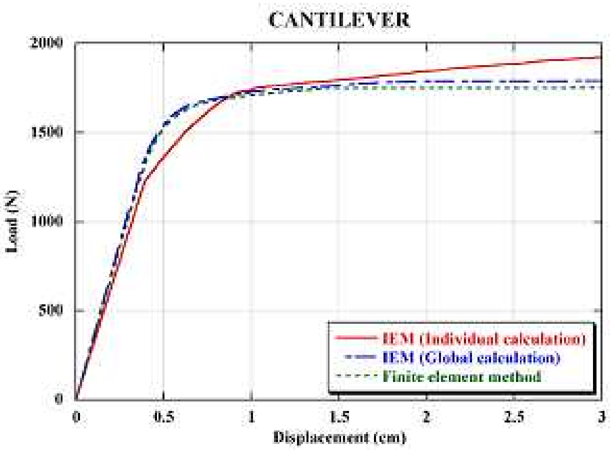



Fig.10　Displacement of cantilever

荷重 - 変位曲線の勾配が徐々に緩やかになっていることがわかる．これは材料非線形解析における特徴的なものである．また，微小要素モデルの解析結果は，有限要素法とほぼ一致している．よって，非線形解析における精度は有限要素法と同程度であることが確認できる．

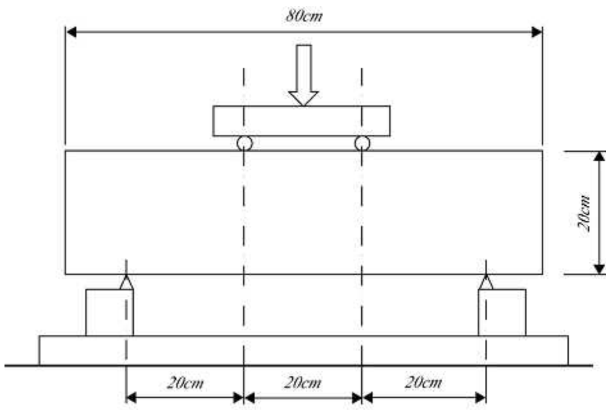



Fig.11　Analysis model for simple beam

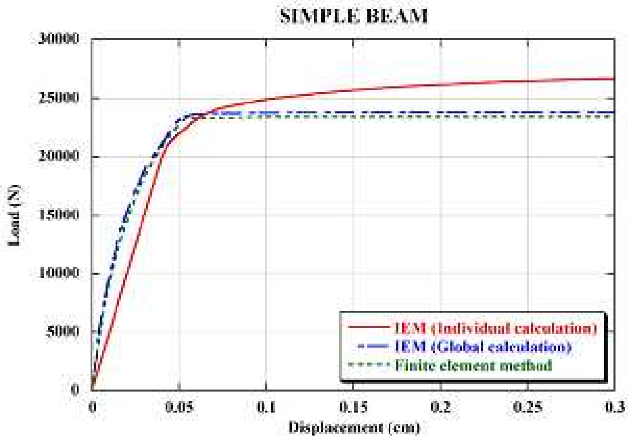



Fig.12　Displacement of simple beam

曲げ破壊試験においても，片持ち梁と同様に荷重 - 変位曲線の勾配が徐々に緩やかになり，解析結果は，有限要素法とほぼ一致していることがわかる．

### 5.2 動的非線形解析

個別計算法に用いた非線形解析手法の有効性を示すため，先端にステップ荷重が作用する片持ち梁の動的非線形解析を行う．解析には Fig.9 と同じモデルを用い，梁先端のたわみを Fig.13 に，応力 - ひずみ曲線を Fig.14 に示す．なお，減衰定数は 0.03 としている．

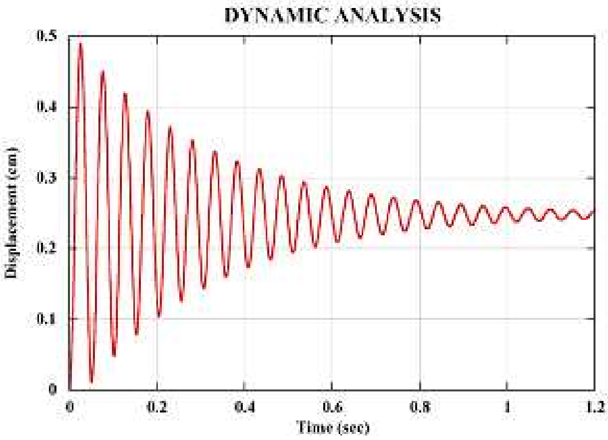



Fig.13　Displacement response of cantilever

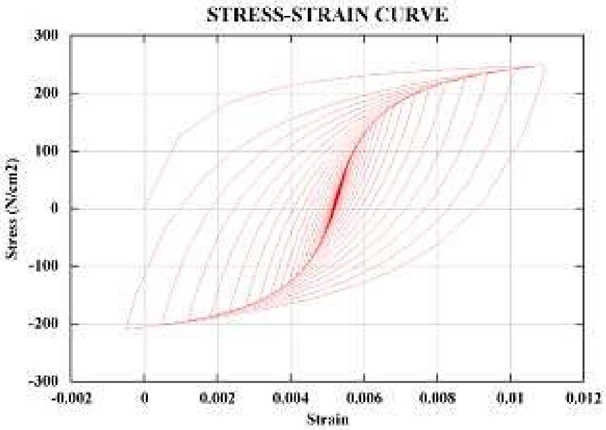



Fig.14　Stress-strain curve of cantilever

Fig.13 より，減衰力が適切に作用し，個別計算法による動的解析の有効性が確認できる．また，変位が 0 に収束していないが，これは片持ち梁に亀裂が入ったことによるものだと考えられる．Fig.14 では，骨格曲線に折り返し点が現れ，履歴曲線がループを描き，変位の収束につれて履歴曲線が収束していること確認できる．この結果から，非線形解析に導入した Masing の法則が適切に作用し，本研究で用いた解析手法が動的非線形解析にも適用可能であることがわかる．

### 5.3 亀裂進展の追跡

ここでは，片持ち梁と曲げ破壊試験のシミュレーションを行い，亀裂の進行について検討する．解析パラメータを Table.2 に，片持ち梁の解析に用いたモデルを Fig.15，曲げ破壊試験のモデルを Fig.16 に示す．

| unit weight | Poisson’s ratio | compressive strength |
|---|---|---|
| $24\,kN/m^2$ | 0.1667 | $2500\,kN/cm^2$ |

Table.2　Analysis parameter of concrete model

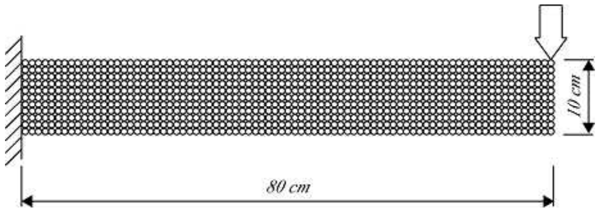



Fig.15　Concrete model for cantilever

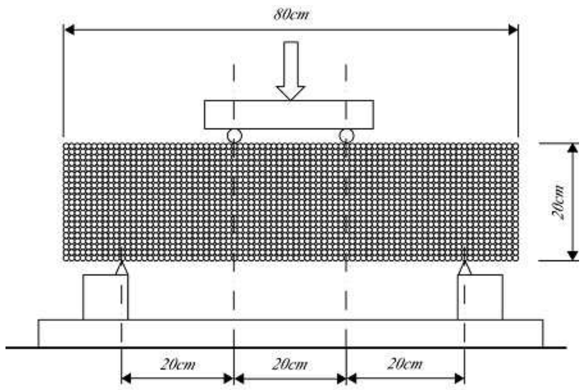
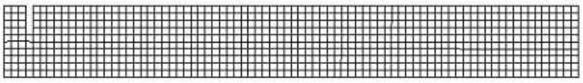



Fig.16　Concrete model for flexural failure

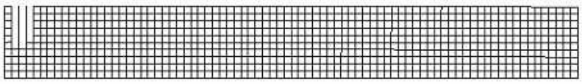
まず，片持ちの非線形解析による結果を Fig.17 に示す．接合部付近の上面から亀裂が入っている．さらにその亀裂が下方に進行していることがわかる．

次に，曲げ破壊試験による解析結果を Fig.18 に示す．中央底部から亀裂が入り，上部に進行していることが確認できる．その後，中央上部付近ではせん断破壊が広がっている．

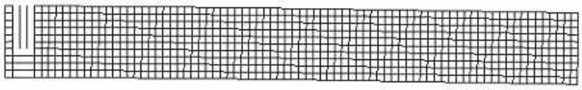
これら結果から，非線形領域内において，微小要素モデルは高い精度で亀裂の進展過程を追跡できることがわかる．



Stage 1

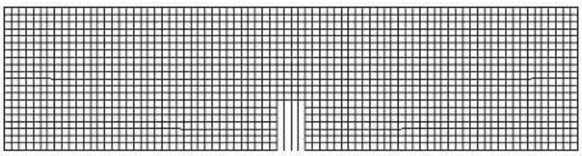


Stage 2

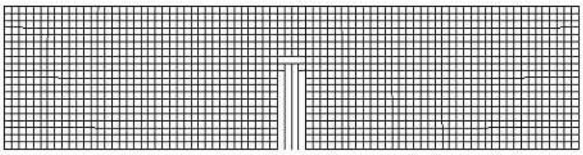


Stage 3

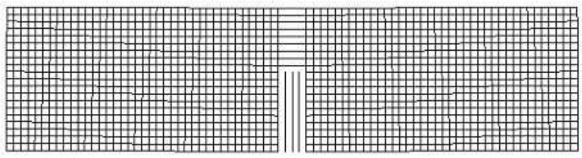
Fig.17　Cantilever of concrete



Stage 1



Stage 2



Stage 3

Fig.18　Flexural failure of concrete

## 6．結論

本研究では，破壊のメカニズムを解明するため，微小変形から大変形・崩壊に至るまでの挙動を統一的に追跡できる数値解析手法の開発を目標として，微小要素モデルとその非線形解析手法を提案し，定式化を行った．その結果，非線形解析における有限要素法との比較では，片持ち梁の先端のたわみと単純支持梁の中央底部のたわみが，有限要素法と同程度の精度であることが確認できた．これは，非線形領域内での微小要素モデルの有効性を示すものであり，非線形解析においてもその精度を検証できたことは，今後この研究を進める上で，非常に重要なデータとなる．動的非線形解析では，本研究で用いた解析手法が動的な問題を取り扱うことが可能であり，除荷や再載荷にも対応していることを示すことができた．また，微小要素モデルにおいて，構造物の亀裂の進展過程を追跡できることも示した．

今後の課題としては，より複雑な構造物への適用などを考え，非線形領域における減衰や接触判定について検討しなければならない．さらに，非線形解析において双曲線モデルの構成則を骨格曲線としたMasingの法則を用いたが，他の構成則についても検証する必要がある．また，離散後の粒子挙動の追跡法の確立も，大変形や崩壊現象の解析のためには必要である．

## 参考文献


[1]Kawai, T., New Discrete Model for Analysis of Solid Mechanics Ploblem, Journal of the Seisan Kenkyu, Institute of Industrial Science, University of Tokyo, 29, No.4, pp.208-210, 1977.

[2]Cundall, P. A., A computer model for simulating progressive, large scale movements in blocky rock system, Symp. ISRM, Nancy, France, Proc., 2, pp.129-136, 1971.

[3]Shi, G. H. and Goodman, R.E., Discontinuous Deformation Analysis, Proc. 25th U.S. Symposium on Rock Mechanics, pp.269-277, 1984.

[4]宇野利雄，計算機のための数値解析，朝倉書店，1962.

[5]木山栄郎，藤村尚，カンドルの離散剛要素法を用いた岩質粒状体の重力流動の解析，土木学会論文報告集，第333号，pp.137-146, 1983. 5

[6]大崎順彦，建築振動理論，章国社，1996.

[7]社団法人 日本建築学会，入門・建物と地盤との動的相互作用，丸善，1996.

[8]山田嘉昭訳, 塑性の有限要素法, 科学技術出版社, 1988.