コンデンサー中に流れる変位電流の可視化法

星野, 賢治 / SAITO, Yoshifuru / HOSHINO, Kenji / 齊藤, 兆古

(出版者 / Publisher)
法政大学情報メディア教育研究センター
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学情報メディア教育研究センター研究報告
(巻 / Volume)
21
(開始ページ / Start Page)
71
(終了ページ / End Page)
73
(発行年 / Year)
2008-03-31
(URL)
https://doi.org/10.15002/00003004

http://hdl.handle.net/10114/1519

コンデンサー中に流れる変位電流の可視化法

A Method of Visualization for Displacement Currents in Capacitos

星野　賢治[1)]　　齋藤　兆古[1)]
Kenji Hoshino, Yoshifuru Saito

[1)] 法政大学工学研究科電気工学専攻

Electrical capacitor is one of the most popular and widely used electric circuit elements storing electric field energy. Due to its mechanical structure, electric field distribution could not uniform at the edges of electrode plates constructing capacitor. This field distortion is so called edge effect. Principal purpose of this paper is to minimize the edge effect, so that it enables us to optimize the shape of electrodes leading to the maximum capacitance but minimum size. To realize this purpose, it is essential to compute the electric fields around capacitor exactly. The electric fields around the capacitor distribute to an infinitely long distance point theoretically. In order to take into account this electric field nature rigorously, in this paper, we employ the strategic dual image (SDI) method along with conventional first order triangular finite element method.

Keyword : Visualization, Displacement current, Capacitor, Edge effect

1. 緒論

近年のデジタル計算機の高性能化、小型化、ならびに低価格化はデジタル計算機の爆発的普及をもたらし、いわゆる、デジタル計算機が PC などの高級・多機能文房具として使われるようになった。このため、有限要素法などで代表される電磁界の数値解析は、PC で実行可能な環境になり、この意味で、既に数値解析の汎用パッケージが販売されるに至っている。[1]

本論文では電磁界解析手法のひとつとして有限要素法を採用している。有限要素法の特徴の一つは、偏微分方程式で記述される物理現象を呈示する未知関数を、区分的多項式群で近似的に表そうとすることにある。この考えは、対象とする解析領域を、有限要素と呼ばれる単純な形状の部分領域に分割することにより実現される。

原稿受付　2008 年 2 月 29 日
発行　2008 年 3 月 31 日
法政大学情報メディア教育研究センター

また、有限要素法の欠点のひとつである閉領域問題のみしか適用できない問題点を双対影像法によって厳密に解決する。双対影像法は電磁気学の電気影像法を拡張したもので開領域問題を二つの閉領域問題に置き換えて解析する手法である。[2]

本論文では、偏微分方程式を数値的に解く有効な手段である有限要素法に SDI 法を併用し、キャパシタンス中を流れる厳密な変位電流可視化の第一段階を述べる。

2. 有限要素法

二次元有限要素法は任意形状の二次元問題対象領域を三角形などの任意の形状の平面要素を用いて離散化し、ポテンシャル分布を計算する方法である。

単純に問題対象領域を一次関数で表現しただけでは全領域のポテンシャルを連立するシステム方程式は得られない。このため、問題対象領域のエネルギーに対応する関数、すなわち、汎関数を考える。また変分原理より有限要素法は、任意の形状の領域を任意の形状を持つ要素に離散化し、場のエネルギーを表す汎関数をもとめ、この汎関数の第一変分を取

ることでエネルギーが最小になるようなポテンシャルの分布を求めるエネルギー最小原理に基づく偏微分方程式の解法である。

電界系の汎関数は、ϕをスカラーポテンシャル、εを誘電率、さらにρを電荷密度として、式(1)で与えられる。

$$F(\phi)=\frac{1}{2}\int\{\varepsilon(\nabla\phi)^2-2\phi\rho\}ds \tag{1}$$

式(1)を変分原理に基づき変形し、Green の定理を用いれば、式(2)の Poisson の方程式 、および式(3)の対象境界条件（Symmetrical Boundary condition)が得られる。

$$\lambda\nabla^2\phi=-\sigma \tag{2}$$

$$\partial\phi/\partial n=0 \tag{3}$$

3．電界系等価回路法

Fig.1 に示す三角形一次要素で、汎関数のパラメータ(ε/2)Cotα=(ε/2)(OD/DC)を考える。二次元の偏微分方程式は無限に厚い 3 次元空間の単位厚さ部分で成り立つと仮定しているから、(ε/2)(OD/DC)は単位厚さ当たりに成り立つパラメータである。　キャパシタンス C は誘電率 ε と電極面積 1 ×OD に比例し、電極間距離 DC に反比例するから、明らかに(ε/2)Cotα は節点 B、C 間のキャパシタンスとなる。以上のことから電界系の偏微分方程式は等価回路を描くことにより電気回路の知識で解くことが可能とされる。[3]

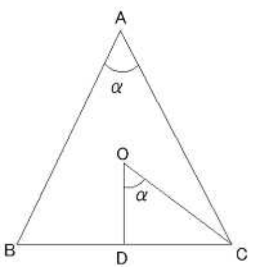

Fig.1　Relationship among the Angles and Lines.

4．双対影像法

三角形 1 次有限要素を用いた有限要素法は、解析領域を三角形要素で離散化して近似解を得る。よって三角形要素による離散化は、有限の領域しかできない。それは同時に境界条件を明確に設定する閉領域で解くことを前提にしている。すなわち、有限要素法は開領域問題に直接使用できないという欠点をもつ。そこで、その解決策として双対影像法を適用する。[4] 双対影像法は、電気影像法を拡張したもので影像を仮定することで開領域問題を閉領域問題に置き換えて有限要素解を得る解法であり、開領域問題を解く際に非常に有効な解法である。また、2 次元解析の場合、解析領域は円となる特徴をもつ。[4]

4.1　システム方程式

双対影像法でベクトルの回転・発散方向成分を求めるシステム方程式を式(4)とする。式(4)はすでに固定境界条件に関する行列要素、ベクトル要素を取り除いていることに注意しなければならない。

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

ここで、$C_{11},C_{12},C_{21},C_{22},X_1,X_2,F_1,F_2$ はそれぞれ仮想境界内部の係数行列、仮想境界内部と仮想境界上を結ぶ係数行列、仮想境界上と仮想境界内部を結ぶ係数行列、仮想境界上の係数行列、仮想境界内部の解ベクトル、仮想境界上の解ベクトル、仮想境界内部からの入力ベクトル、仮想境界上からの入力ベクトルを示す。式(4)からゼロ境界条件と対象境界条件をそれぞれ設定し、平均をとることで開領域問題の解、式(5)を得る。

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 2C_{22}-C_{21}C_{11}^{-1}C_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

4.2　双対影像法による電界解析

端効果によりキャパシタンス中の電流は電極の中央付近と端部では均一に流れない。さらにキャパシタンスの電極寸法は、同一容量とするためには、端効果を無視した解析値と端効果を考慮した解析値を比較すると後者のほうが大きくなる。

具体的な変位電流の可視化例として、極めてポピュラーな形状で構成される平行板キャパシターの変位電流分布を可視化する。Fig.2 は平行板キャパシターとその周辺の領域を双対影像法から導かれる電気的等価回路から得られた可視化変位電流ベクトル分布を示す。三角形の分割個数は 13102 個である．Fig.2 から平行板コンデンサーの電極間に流れている変位電流が均一に流れていないことが判り、端効果現象を確認できる。数値的な観点から比較しても中央付

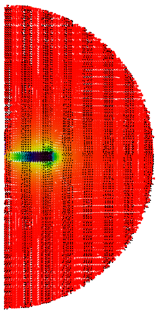

Fig.2 Visualized Displacement Current Vectors
Distribution of Parallel Plate Capacitor.

近と端部の変位電流ではかなりの有意差がある。このことから平行板コンデンサーがどの付近まで端効果の実質的影響を与えるかが判る。

Fig.2 と同様の条件で解析範囲（半径）を変更して解析し、電極周辺の変位電流を比較した。その結果、数値的に同程度の値になっていることがわかった。よって、SDI 法によって厳密に開境界条件が満たされていることが確認された。

5．まとめ

本研究では有限要素法へ双対影像法を併用することで厳密に開境界問題を解決し、キャパシタンスの端効果問題を正確に解析可能な方法を明らかにした。その結果、最適キャパシタンス形状問題決定の一歩が記された。

参考文献

[1]http://www.jri-sol.co.jp/field/service/package.html.

[2]Y.Saito, K.Takahashi and S.Hayano,"The Strategic Dual Image Method: An extremely simple procedure for open field problems," J. Appl. Phys. 63(8) 15 April 1988

[3]星野賢治，齋藤兆古，"端効果の可視化によるコンデンサー形状の最適化"MAGDA 第 15 回, pp.83-87 ,2006.

[4]Y Y.Saito, K.Takahashi and S.Hayano,"Finite Element Solution of Open Boundary Magnetic Field Problems," IEEE Trans. MAG-23 No.5, September 1987.