# Arrowの一般不可能性定理についての簡略な証明

HIROKAWA, Midori / 廣川, みどり

(出版者 / Publisher)
法政大学経済学部学会
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
経済志林 / The Hosei University Economic Review
(巻 / Volume)
69
(号 / Number)
4
(開始ページ / Start Page)
361
(終了ページ / End Page)
370
(発行年 / Year)
2002-03-28
(URL)
https://doi.org/10.15002/00002976

【研究ノート】

# Arrow の一般不可能性定理についての簡略な証明*

廣 川 み ど り

## 1　イントロダクション

本稿は Arrow（1951, 1963）の一般不可能性定理についての簡略な証明を行うものである。

Arrow の一般不可能性定理については多くの証明が存在する。（たとえば Kelly（1978），Barbera（1980），Suzumura（1988），Denicolo（1996, 2001），Geanakoplos（2001）等を参照されたい。）ここでの証明は論理的には従来の証明と大きく異なるものではない。しかしながら，有向グラフを補助的に用いることで，論理を簡単化でき，繰り返しを含む議論を最小限に押さえることができる[1]。その意味で，本稿は教育を目的としたノートとしては意味を持つであろう。

以下，次章で定理に必要な用語を定義し，第 3 節で 2 人 3 選択肢のケースについて，インフォーマルな証明を与える。そののち，定理のフォーマルな証明を第 4 節で与える。

---

*久保田肇氏より，文献についての貴重な教示を受けたことを感謝する。

1）このアイディアは，Hirokawa（2001），Chapter 2 の「ループ構造」のアイディアを援用したものである。

## 2　Arrow の一般不可能性定理

個人の集合を $N=\{1, \cdots, n\}(n \geq 2)$，選択肢の集合を $X=\{x^1, \cdots, x^m\}(m \geq 3)$ とする。$n$ 人の個人の選好順序 $P_1, \cdots, P_n$ とそれによって生ずる社会的順序 $Q$ とは強順序（*strict orderings*）であるものとする(2)。社会的厚生関数（*social welfare function*）$f$ は選好プロファイル $P=(P_1, \cdots, P_n)$ に対して社会的順序 $Q=f(P)=f(P_1, \cdots, P_n)$ を割り当てるものとする。選好プロファイル $P=(P_1, \cdots, P_n)$，$P'=(P'_1, \cdots, P'_n)$ に対応する社会的順序をそれぞれ $Q, Q'$ と表するものとしよう。

$f$ についてつぎの 3 つの性質を考える。

パレート性（*Pareto*）：任意の選好プロファイル $P=(P_1, \cdots, P_n)$ と任意の 2 つの選択肢 $x^j, y^k \in X$ とに対して，すべての $i \in N$ について $x^j P_i x^k$ であるならば，$x^j Q x^k$ が成り立つ。

無関係選択肢からの独立性（*independence of irrelevant alternatives* (*IIA*)）：任意の 2 つの選好プロファイル $P=(P_1, \cdots, P_n)$，$P'=(P'_1, \cdots, P'_n)$ と任意の 2 つの選択肢 $x^j, x^k \in X$ とが与えられたとき。もし，すべての $i \in N$ について $x^j P_i x^k \Leftrightarrow x^k P'_i x^j$ が成り立っているのであれば，帰結される社会的順序に対しても以下が成り立つ：$x^j Q x^k \Leftrightarrow x^j Q' x^k$.

非独裁的（*non-dictatorial*）：ある個人 $i \in N$，任意の 2 つの選択肢 $x^j, x^k \in X$ に対して $x^j P_i x^k \Rightarrow x^j Q x^k$ が成り立つとき，その個人を独裁者（*dictator*）と呼ぶ。独裁者が存在しない（存在する）ときに，その社会的厚生関数 $f$ は非独裁的（独裁的）であると言う。このとき，以下の定理が

2)　強順序とは非反射性と推移性とが成り立つものをいう。Arrow のオリジナル定理では，個人の選好順序や社会的順序は弱順序で与えられている。しかしながら，弱順序も許したケースについては簡単に拡張できる。実際，Denicolo（1996）の Arrow の定理の証明では，最初のステップで，選択肢のペアについて無差別とする個人がひとりもいないときには，社会的順序は無差別にはならないことを数行で示している。

成立する。

**定理（Arrow 1951, 1963）** パレート性，IIA を満たし非独裁的であるような社会的厚生関数 $f$ は存在しない。

定理の証明に先立ち，本稿で扱うツールを定義しておこう。IIA によって，2 選択肢の間の順序づけは他の選択肢についての個人の選好とは独立になるので，2 選択肢のみの比較が意味を持つ。そこで，$x^jQx^k$ となることを $x^j \rightarrow x^k$ と表す。$x^1 \rightarrow x^2, x^2 \rightarrow x^3, x^3 \rightarrow x^1$ となるときには，社会的順序の推移性が満たされないことに注意しよう。それは図ではちょうど矢印が一回りして戻ってくる状態として表現できる。（図 1 参照。）証明では，パレート性と IIA とを満たす社会的選択関数を考え，それが推移性を満たす（すなわち，矢印が一回りすることがない）ならば，独裁的なものでしかありえないことを示していく。

いま，$N$ の任意の部分集合を $N'$ とし，$N', N-N'$ のなかの個人がそれぞれ次のように同一の選好順序を持っているものとしよう：

$$x^jP_ix^k \forall i \in N' \ \& \ x^kP_ix^j \forall i \in N-N'$$

このとき，社会的な順序づけの可能性はつぎの 2 通りである：

$$\text{(A)} \ x^jQx^k, \quad \text{(B)} \ x^kQx^j$$

(A)のケースを $x^j \xrightarrow{N'} x^k$ で表し，(B)のケースを $x^k \xrightarrow{N-N'} x^j$ と表す。2 人の選好順序が一致しているときにはパレート性が適用されるから，全ての

**図 1**

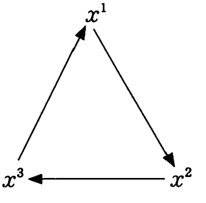
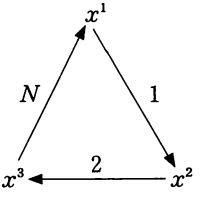



**図 2**



個人 $i$ に対して $x^jP_ix^k$ のときには $x^jQx^k$ となるわけだが，それは $x^j\xrightarrow{N}x^k$ と表す。(A)，(B)の定義より，$x^j\xrightarrow{N'}x^k$ $x^k\xrightarrow{N-N'}x^j$ のどちらか一方だけが成立することに注意しよう。

## 3　2人3選択肢のケースでの直観的な証明

ここでは，単純なケース（2人3選択肢）におけるインフォーマルな形での証明を与えておく。次節での証明の前半部の基本的なアイディアは本節で与えられる。

$f$ をパレート性，IIA を満たす社会的厚生関数であるものとする。いま，$x^1\xrightarrow{1}x^2$ であるとすると，$x^3\xrightarrow{1}x^2$ となる(3)。なぜなら，そうでないとすると $x^2\xrightarrow{2}x^3$ となり，2人の選好順序が $x^3P_1x^1P_1x^2$，$x^2P_2x^3P_2x^1$ で与えられたときに，IIA より $x^1\xrightarrow{1}x^2$，$x^2\xrightarrow{2}x^3$，パレート性より $x^3\xrightarrow{N}x^1$ となるため，社会的順序の推移性と抵触するためである。（図2参照。）

このケースでは図の3角形において，ある部分で右回りに個人1の選好が社会的に反映されて$\xrightarrow{1}$となり，他の部分で同じく右回りに個人2の選好が社会的に反映され$\xrightarrow{2}$となったために推移性と抵触したこと，および，$\xrightarrow{2}$とならないためには，逆方向の左回りに個人1の選好が社会的に反映される（$\xrightarrow{1}$）ことが必要になったことに注意しよう。つまりある方向で一ヵ所$\xrightarrow{1}$が生ずると，他の部分において逆方向に$\xrightarrow{1}$が生ずる。それを何回か繰り返すと，全ての隣り合う選択肢のペアについて，どちらの方向にも$\xrightarrow{1}$が生ずることになるのである。

実際に，$x^3\xrightarrow{1}x^2$ が成り立ったのと同様に，$x^1\xrightarrow{1}x^2$ より $x^1\xrightarrow{1}x^3$ が成り立ち，さらに，$x^3\xrightarrow{1}x^2$ より $x^3\xrightarrow{1}x^1$ が，$x^1\xrightarrow{1}x^3$ より $x^2\xrightarrow{1}x^3$ が成り立つ。最後に，$x^3\xrightarrow{1}x^1$ より $x^2\xrightarrow{1}x^1$ が成り立つ。ここから，任意の $(x^j, x^k)$ について $x^j\xrightarrow{1}x^k$ が成立することが示され，さらにパレート

3)　簡単化のために，$x^j\xrightarrow{\{i\}}x^k$ を $x^j\xrightarrow{i}x^k$ と記す。

性によって，$x^jP_1x^k \Rightarrow x^jQx^k$ が得られる。これは個人 1 が独裁者となることを表している。

## 4 証　明

$f$ をパレート性，IIA を満たす社会的厚生関数であるものとする。証明はステップを追って行うものとしよう。なお，証明の便利のために，$x^{m+1}=x^1$ と置く。

ステップ 1：$n=2$ とする。$x^1 \xrightarrow{1} x^2$ のときに，任意の $(x^j, x^k)$ について $x^j \xrightarrow{1} x^k$ が成り立つ。

(1)　はじめに $1 \leq k < j \leq m+1$ $(j \neq k, (j, k) \neq (2, 1))$ のときに，$x^j \xrightarrow{1} x^k$ が成立することを示す。いま，そうでないものとして，$x^j \xrightarrow{1} x^k$ が成り立たなかったとしよう。すると，(A)，(B)の定義より $x^k \xrightarrow{2} x^j$ となる。このとき，つぎのプロファイルを考えよう。(図 3 参照。)

$$x^jP_1x^1P_1x^2P_1x^k \ \& \ x^2P_2x^kP_2x^jP_2x^1.$$

(ただし，$j=m+1$，すなわち $x^j=x^1$ のときには，上のプロファイルは $x^1P_1x^2P_1x^k \ \& \ x^2P_2x^kP_2x^1$ と考える。また，$k=2$ のときには，上のプロファイルは $x^jP_1x^1P_1x^2 \ \& \ x^2P_2x^jP_2x^1$ と考える。) すると IIA より $x^1Qx^2$ と $x^kQx^j$ が導かれる。また，パレート性より $x^2Qx^k$ および $x^jQx^1$ が導かれる。(ただし，$j=m+1$，すなわち $x^j=x^1$ のときには，$x^jQx^1$ は除く。

**図 3**

$$\begin{tikzcd} x^1 \arrow[r, "1"] & x^2 \arrow[d, "N"] \\ x^j \arrow[u, "N"] & x^k \arrow[l, "2"] \end{tikzcd}$$

**図 4**

$$\begin{tikzcd} x^3 \arrow[r, "1"] & x^2 \arrow[d, "N"] \\ x^j \arrow[u, "N"] & x^k \arrow[l, "2"] \end{tikzcd}$$

また，$k=2$ のときには，$x^2Qx^k$ は除く。）これは，社会的順序が推移性を満たすことと矛盾する。

(2) うえの帰結により，特に，$x^3 \xrightarrow{1} x^2$, $x^{m+1} \xrightarrow{1} x^m$ (すなわち，$x^1 \xrightarrow{1} x^m$) が成り立つ[4]。ここから，(1)と同様の論理によって，$1 \leq j < k \leq m+1$ $(j \neq k)$ となる $(x^j, x^k)$ に対して $x^j \xrightarrow{1} x^k$ が成立する[5]。これより，特に $x^2 \xrightarrow{1} x^3$ が成り立つが，ふたたび(1)と同様の論理によって，$x^2 \xrightarrow{1} x^1$ が成立する。したがって，すべての $(x^j, x^k)$ について $x^j \xrightarrow{1} x^k$ が成り立つことが示された。

残りの部分で，$n \geq 2$ のケースについて考えていく。いま，$N$ の任意の部分集合を $N'$ とし，$N', N-N'$ のなかの個人がそれぞれ同一の選好順序を持っているものとしよう。するとステップ1と同様の論理から，：

(C) 任意の $x^j, x^k \in X$ に対して，$x^j \xrightarrow{N'} x^k$

(D) 任意の $x^j, x^k \in X$ に対して，$x^j \xrightarrow{N-N'} x^k$

のどちらかが成立する。

いま一般性を失うことなく，(C)が成立しているとし，このときの $N'$ を勝利提携と呼び，勝利提携の集合を $\boldsymbol{W}$ と表す。

ステップ2：$\boldsymbol{W}$ については以下の性質が成り立つ：

(1) $\forall W \in \boldsymbol{W}, \# |W| \geq 1,$

(2) $\forall W, W' \in \boldsymbol{W}, W \cap W' \in \boldsymbol{W},$

(3) $\exists i \in N, \{i\} \in \boldsymbol{W}$

(1) $W \in \boldsymbol{W}$ のときには $N-W \notin \boldsymbol{W}$ となることに注意せよ。パレート性

4) $x^1 = x^{m+1}$, $m \geq 3$ より $m \neq 2$ であることに注意せよ。

5) たとえば，$x^3 \xrightarrow{1} x^2$ からは図4を満たすようなプロファイルを考えることによって，$1 \leq j < k \leq m+1 (j \neq k, (j, k) \neq (2, 3))$ のときに，$x^j \xrightarrow{1} x^k$ が成立することが示される。$x^2 \xrightarrow{1} x^3$ については同様に，$x^{m+1} \xrightarrow{1} x^m$ から導かれる。

より，$N \in \boldsymbol{W}$. $\phi \notin \boldsymbol{W}$ となるため，任意の勝利提携 $W$ に対して$\#|W| \geq 1$ が成り立つ。

(2)　いま示したい性質が成立していないとして，ある選択肢のペア $(x^1, x^2)$ に対して，

$$x^1 P_i x^2 \forall i \in W \cap W',\ x^2 P_i x^1 \forall i \in N - W \cap W', \text{かつ } x^2 Q x^1$$

であったとしよう。そのとき，$x^3 \in X$ を新たに考え，つぎのような選好順序を考えよう：

$$x^1 P_i x^3 P_i x^2 \forall i \in W \cap W',\ x^2 P_i x^1 P_i x^3 \forall i \in W - W',$$
$$x^3 P_i x^2 P_i x^1 \forall i \in W' - W,\ x^2 P_i x^3 P_i x^1 \forall i \in N - W \cup W'.$$

このとき，$W \in \boldsymbol{W}$ より $x^1 Q x^3$, $W' \in \boldsymbol{W}$ より $x^3 Q x^2$ が成り立ち，仮定より，$x^2 Q x^1$ であったため，社会的順序の推移性に矛盾する。(図 5 参照。)

(3)　いま，ある勝利提携 $W$ が $\#|W| \geq 2$ であったとし，その分割 $W'$, $W''$ $(W' \neq \phi,\ W'' \neq \phi)$ を考える。$W', N - W'$ の片方は勝利提携である。$N - W'$ が勝利提携ならば(2)より，$W'' = (N - W') \cap W$ も勝利提携となるため，$W' \in \boldsymbol{W}$ または $W'' \in \boldsymbol{W}$ が成り立つ。$\#|W| \geq 2$ のときには繰り返しこの論理を適用して，$W$ の真部分集合で勝利提携となるものを見つめることができる。これと(1)より，最小の勝利提携はひとりの個人からなることが示された。

**図 5**

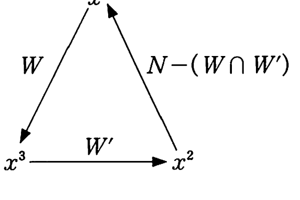
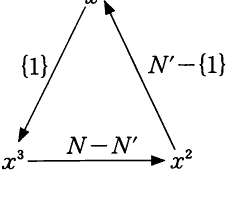



**図 6**



ステップ3：$f$ は独裁的な社会的厚生関数となる。

ステップ2より，あるひとりの個人（一般性を失うことなく個人1）からなる勝利提携が存在することが示された。すなわち，個人1以外の全員の選好が同一であるときに，個人1の選好順序は社会的な順序と同一になる。残されたステップとして，個人1が独裁者となることを示す。いま，個人1が独裁者でないとし，ある選択肢のペア $(x^1, x^2)$ に対して，$x^1P_1x^2$ かつ $x^2Qx^1$ であったとしよう。このときに，$N', N''$ をつぎのように定めよう。$N'=\{i \mid x^1P_ix^2\}, N''=\{i \mid x^2P_ix^1\}$。ここで $x^3 \in X$ を追加して，つぎのような選好順序を考えよう。（図6参照。）

$$x^1P_1x^3P_1x^2,\ x^3P_ix^1P_ix^2 \forall i \in N'-\{i\},\ x^3P_ix^2P_ix^1 \quad \forall i \in N''.$$

このとき，$\{1\}$ が勝利提携であることとIIAとにより，$x^1Qx^3$，パレート性より，$x^3Qx^2$ が成り立ち，仮定より，$x^2Qx^1$ となっていたため，社会的順序の推移性に矛盾する。　　□

## References


Arrow, K. J. 1963 *Social Choice and Individual Values; second edition,* (first edition, 1951), Yale University Press.

Barbera, A. S. 1980 "Pivotal Voters: a new proof of Arrow's theorem," *Economics Letters,* Vol. 6, pp.13-16.

Denicolo, V. 1966 "An Elementary Proof of Arrow's Impossibility Theorem," *Japanese Economic Review,* Vol. 47, pp.432-435.

Denicolo, V. 2001 "An Elementary Proof of Arrow's Impossibility Theorem: Correction," *Japanese Economic Review,* Vol. 52, pp.134-135.

Genakoplos, J. 2001 "Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem," *Cowles Foundation Discussion Paper,* No.1123RRR.

Hirokawa, M. 2001 *Essays on Institutions,* Ph. D dissertation, Hitotsubashi University.

Kelly, J. S. 1978 *Arrow Impossibility Theorems,* Academic Press.

Suzumura, K. 1993 *Rational Choice, Collective Decisions, and Social Welfare,* Cambridge.

Suzumura, K. 1988 "Reduction of Social Choice Problems: A simple proof of Arrow's general possibility theorem," *Hitotsubashi Journal of Economics,* Vol. 29, pp.219-221.

# A Simple proof of Arrow's General Impossibility Theorem

Midori HIROKAWA

**《Abstract》**

This paper presents an attempt to demonstrate a simple proof of Arrow's general impossibility theorem (Arrow (1951), (1963)): it makes use of figures as an auxiliary tool. As is well known, there are already many proofs of Arrow's general impossibility theorem in existence, including examples such as those propounded by Kelly (1978), Barbera (1980), Suzumura (1988), Denicolo (1996), (2001) and Geanokoplos (2001). Technically seen, the proof proposed here is not so very far from its predecessors, but the figures employed should make it possible to simplify the proof. As a result, it is hoped that the paper will prove useful for pedagogical purposes.