

### 変位場に応力を用いたHPMの開発

竹内, 則雄 / TAKEUCHI, Norio

---

(出版者 / Publisher)

法政大学情報メディア教育研究センター

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

法政大学情報メディア教育研究センター研究報告

(巻 / Volume)

20

(開始ページ / Start Page)

35

(終了ページ / End Page)

43

(発行年 / Year)

2007-03-20

(URL)

<https://doi.org/10.15002/00002022>

# 変位場に応力を用いた HPM の開発

竹内 則雄

法政大学工学部システムデザイン学科

既存の HPM (Hybrid-type Penalty Method : ハイブリッド型ペナルティ法) では, 部分領域毎に独立に剛体変位, 剛体回転とひずみ, 高次の場合にはひずみの勾配を未知パラメータに設定して変位場を仮定している. 本論文では, HPM の変位場として, ひずみのかわりに直接, 応力を未知パラメータに設定する新しい変位場を用いた混合法を提案する. さらに簡単な数値計算例によって, 本手法によって得られる解の精度が, ひずみを未知パラメータとした場合と同等であることを示す.

## 1. はじめに

進行型破壊などの問題では, 破壊面上の表面力を取り扱う必要がある. FEM では, このような問題の解析にあたり, 変位の連続性を若干緩め, 要素境界边上での変位の連続性に関する付帯条件を Lagrange の未定乗数によって変分表示に導入するハイブリッド型の変分原理が用いられる[1]. この未定乗数は要素境界面上の表面力という物理的な意味を有しており, 変位場は要素毎に独立に仮定することができる[2]. 著者らはこのハイブリッド型変位モデルの考え方に着目し, Lagrange の未定乗数にばねの考え方を導入し, ばね定数としてペナルティ関数を用いるハイブリッド型ペナルティ法 (HPM : Hybrid-type Penalty Method) を開発した[3]-[5].

HPM では, 解析領域を小さな部分領域に分割し, 部分領域毎に独立な変位場を仮定して, 境界上での変位の連続性をペナルティ関数により近似的に導入する. 既往の論文では[3]-[5], 変位場を表すために, 部分領域内の任意点における剛体変位, 剛体回転とひずみ, 高次要素の場合にはさらにひずみの勾配を未知パラメータに設定している[6][7].

ところで, 固体力学諸問題では, 変位と応力を取り扱うことが多く, ひずみをパラメータする方法では, 応力は間接的に求められるため, 直接応力が求められると便利である. FEM と異なり, ひずみを未知パラメータに設定する HPM では, これを変換して応力を未知パラメータに設定することが容易に行える.

そこで, 本論文では, HPM における 1 次あるいは 2 次の変位場に, 応力とその勾配を未知パラメータに用いる混合法を提案する. また, 提案手法によって得られる弾性解の精度を簡単な数値計算例によって検証する.

## 2. 基礎方程式

弾性問題の基礎方程式は次式で与えられる.

$$\text{(釣り合い方程式)} \quad \mathbf{L}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\text{(応力 - ひずみ関係)} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$\text{(ひずみ - 変位関係)} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

ここで,  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  は, それぞれ, 変位, ひずみ, 応力ベクトルであり,  $\mathbf{D}$  は構成行列,  $\mathbf{f}$  は物体力を表している. また,  $\mathbf{L}$  は微分作用素であり,  $\Omega$  は境界  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$  で囲まれた領域, もしくは体積である. ただし,  $\Gamma_u$  は変位が

与えられる境界,  $\Gamma_\sigma$  は表面力が与えられる境界で, 以下の力学的条件および幾何学的境界条件を満たしている.

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{on } \Gamma_\sigma \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (5)$$

ここで,  $\mathbf{T}$  は単位面積当りの表面力であり,  $\mathbf{T} = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$  であり,  $\mathbf{n}$  は境界上の外向き法線ベクトルである. また, 上付の  $\bar{\cdot}$  は既知量を表している.

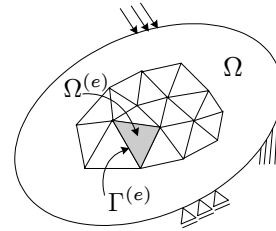


図 1 部分領域  $\Omega^{(e)}$

いま, 図 1 の領域  $\Omega$  は境界  $\Gamma^{(e)}$  で囲まれた  $M$  個の部分領域  $\Omega^{(e)}$  から構成されているものとする. すなわち,

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^M \Omega^{(e)} \quad \text{ただし} \quad \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = 0 \quad (r \neq q) \quad (6)$$

このとき, 仮想変位を  $\delta \mathbf{u}$  とすると仮想仕事式は以下のようになる.

$$\sum_{e=1}^M \left( \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L}\delta \mathbf{u}]^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma^{(e)}} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{T} d\Gamma \right) = 0 \quad (7)$$

ただし, 左辺第 3 項は  $\Gamma_\sigma$  において, 境界条件式(4)を満たすものとする.

一方, 図 2 に示す隣接する部分領域間において, 付帯条件

$$\hat{\mathbf{u}}^{(a)} = \hat{\mathbf{u}}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{\langle ab \rangle} \quad (8)$$

を満たす必要がある. ここで,  $\hat{\mathbf{u}}^{(a)}$ ,  $\hat{\mathbf{u}}^{(b)}$  は図 2 に示すように部分領域  $\Omega^{(a)}$ ,  $\Omega^{(b)}$  の境界  $\Gamma_{\langle ab \rangle}$  上の変位を表している. ハイブリッド型の仮想仕事の原理では, Lagrange の

未定乗数 $\lambda$ を用いて

$$H_{ab} = \delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \lambda^t (\hat{u}^{(a)} - \hat{u}^{(b)}) d\Gamma = 0 \quad (9)$$

と表し、仮想仕事式に導入する。

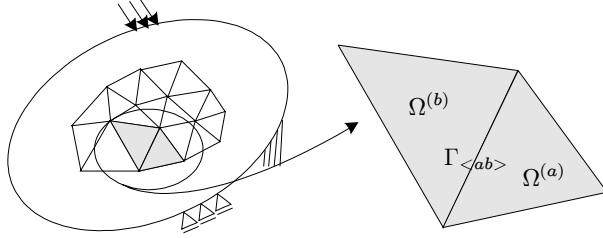


図2 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の間の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$

いま、隣接する2つの部分領域境界面数を $N$ とすると、付帯条件を考慮したハイブリッド型の仮想仕事式は式(10)のように表せる。

$$\sum_{e=1}^M \left( \int_{\Omega^{(e)}} [L\delta u]^t D[Lu] d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta u^t f d\Omega - \int_{\Gamma^{(e)}} \delta u^t T d\Gamma \right) - \sum_{s=1}^N \left( \delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \lambda^t (\hat{u}^{(a)} - \hat{u}^{(b)}) d\Gamma \right) = 0 \quad (10)$$

### 3. 応力を未知パラメータとする変位場

#### 3-1. 剛体変位とひずみを未知数とする変位場

変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を部分領域内の点 $\mathbf{x}_P = (x_P, y_P) \in \Omega^{(e)}$ についてテーラー展開し、2次の項までを表示すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(e)} &= \mathbf{u}^P + (x - x_P) \mathbf{u}_x^P + (y - y_P) \mathbf{u}_y^P \\ &+ \frac{1}{2} (x - x_P)^2 \mathbf{u}_{xx}^P + \frac{1}{2} (y - y_P)^2 \mathbf{u}_{yy}^P \\ &+ (x - x_P)(y - y_P) \mathbf{u}_{xy}^P + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $(\bullet)^P$ は点 $\mathbf{x}_P$ における物理量の値を示しており、また、

$$\begin{aligned} (\bullet)_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\bullet), \quad (\bullet)_y = \frac{\partial}{\partial y}(\bullet), \quad (\bullet)_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\bullet) \\ (\bullet)_{xx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\bullet), \quad (\bullet)_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\bullet) \end{aligned}$$

である。

一方、 $x$ 方向変位を $u$ 、 $y$ 方向変位を $v$ とすると、ひずみ-変位関係は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} u_x &= \varepsilon_x, \quad u_{xx} = (\varepsilon_x)_x, \quad u_{xy} = (\varepsilon_x)_y \\ v_y &= \varepsilon_y, \quad v_{yy} = (\varepsilon_y)_y, \quad v_{yx} = (\varepsilon_y)_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (v_x - u_y) &= \theta, \quad \frac{1}{2}(u_y + v_x) = \gamma_{vy} \\ \frac{1}{2}(u_y + v_x)_x &= (\gamma_{vy})_x, \quad \frac{1}{2}(u_y + v_x)_y = (\gamma_{vy})_y \end{aligned}$$

これらの関係を用いることによって式(11)は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(e)} &= \mathbf{u}^P - Y^{(e)} \theta^P + X^{(e)} \varepsilon_x^P + \frac{1}{2} Y^{(e)} \gamma_{xy}^P \\ &+ \frac{1}{2} (X^{(e)})^2 (\varepsilon_x^P)_x - \frac{1}{2} (Y^{(e)})^2 (\varepsilon_y^P)_x \\ &+ X^{(e)} Y^{(e)} (\varepsilon_x^P)_y + \frac{1}{2} (Y^{(e)})^2 (\gamma_{xy}^P)_y \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(e)} &= \mathbf{v}^P + X^{(e)} \theta^P + Y^{(e)} \varepsilon_y^P + \frac{1}{2} X^{(e)} \gamma_{xy}^P \\ &+ X^{(e)} Y^{(e)} (\varepsilon_y^P)_x + \frac{1}{2} (X^{(e)})^2 (\gamma_{xy}^P)_x \\ &- \frac{1}{2} (X^{(e)})^2 (\varepsilon_x^P)_y + \frac{1}{2} (Y^{(e)})^2 (\varepsilon_y^P)_y \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} X^{(e)} &= x - x_P \\ Y^{(e)} &= y - y_P \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

であり、 $u^P, v^P, \theta^P$ は点 $\mathbf{x}_P$ における $x$ および $y$ 方向の剛体変位と剛体回転角、 $(\varepsilon_x^P)_x, (\varepsilon_y^P)_x, (\gamma_{xy}^P)_x$ はひずみの $x$ 方向の勾配、 $(\varepsilon_x^P)_y, (\varepsilon_y^P)_y, (\gamma_{xy}^P)_y$ は $y$ 方向の勾配を表している。したがって、2次の変位場はマトリックス形式で次のように表せる。

#### (2次の変位場)

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} + \mathbf{N}_g^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)} \quad (15)$$

$$\mathbf{d}^{(e)} = [u^P, v^P, \theta^P]^t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = [\varepsilon_x^P, \varepsilon_y^P, \gamma_{xy}^P]^t$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)} = [(\varepsilon_x^P)_x, (\varepsilon_y^P)_x, (\gamma_{xy}^P)_x, (\varepsilon_x^P)_y, (\varepsilon_y^P)_y, (\gamma_{xy}^P)_y]^t$$

$$\mathbf{N}_d^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y^{(e)} \\ 0 & 1 & X^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} = \begin{bmatrix} X^{(e)} & 0 & Y^{(e)}/2 \\ 0 & Y^{(e)} & X^{(e)}/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_g^{(e)} = \begin{bmatrix} (X^{(e)})^2/2 & -(Y^{(e)})^2/2 & 0 \\ 0 & X^{(e)} Y^{(e)} & (X^{(e)})^2/2 \\ X^{(e)} Y^{(e)} & 0 & (Y^{(e)})^2/2 \\ -(X^{(e)})^2/2 & (Y^{(e)})^2/2 & 0 \end{bmatrix}$$

一方、1次の変位場は、ひずみの勾配を無視することにより以下のように表すことができる。

#### (1次の変位場)

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \quad (16)$$

### 3-2. 剛体変位と応力を未知数とする変位場

いま、部分領域 $(e)$ における構成行列を $\mathbf{D}^{(e)}$ とすると、応力-ひずみ関係は以下のように与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \quad (17)$$

ここで、

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = [\sigma_x^P, \sigma_y^P, \tau_{xy}^P]^t$$

例えば、平面応力状態の構成行列は、弾性係数を $E$ 、ポアソン比 $\nu$ として以下のように与えられる。

$$\mathbf{D}^{(e)} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

式(17)は、

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{C}^{(e)} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \quad (19)$$

と表すこともできる。ここで、 $\mathbf{C}^{(e)}$ は $\mathbf{D}^{(e)}$ の逆行列で、平面応力状態では以下のように与えられる。

$$\mathbf{C}^{(e)} \stackrel{\text{def.}}{=} (\mathbf{D}^{(e)})^{(-1)} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (20)$$

式(19)の関係を式(16)に代入すれば、応力を未知数とする1次の変位場を定義することができる。

(応力を未知数とする1次の変位場)

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\sigma^{(e)} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \quad (21)$$

ここで、 $\mathbf{N}_\sigma^{(e)}$ は、以下のとおりである。

$$\mathbf{N}_\sigma^{(e)} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \mathbf{C}^{(e)} \quad (22)$$

同様に、式(15)に代入するなら、応力を未知数とする2次の変位場が次のように定義される。

(応力を未知数とする2次の変位場)

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\sigma^{(e)} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \mathbf{N}_{\sigma_x}^{(e)} \boldsymbol{\sigma}_x^{(e)} \quad (23)$$

ただし、

$$\boldsymbol{\sigma}_x^{(e)} = [(\sigma_x^P)_x, (\sigma_y^P)_x, (\tau_{xy}^P)_x, (\sigma_x^P)_y, (\sigma_y^P)_y, (\tau_{xy}^P)_y]^t$$

ここで、 $\mathbf{N}_{\sigma_x}^{(e)}$ は、以下のとおりである。

$$\mathbf{N}_{\sigma_x}^{(e)} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{N}_g^{(e)} \mathbf{C}^{(e)} \quad (24)$$

### 4. 離散化方程式の誘導

式(9)で導入した Lagrange の未定乗数は、物理的には表面力を意味している。いま、境界 $\Gamma_{<ab>}$ 上の表面力 $\boldsymbol{\lambda}_{<ab>}$ と相対変位の関係を式(25)のように表す。

$$\boldsymbol{\lambda}_{<ab>} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}_{<ab>} \quad (25)$$

ここで、 $\boldsymbol{\delta}_{<ab>}$ は部分領域境界面 $\Gamma_{<ab>}$ 上の相対変位を表しており、 $\mathbf{k}$ はばね定数に対応する係数行列である。ハイブリッド型の仮想仕事式では、近似的に部分領域境界面上で変位の連続性を確保するため、極めて固いばねを設ける必要がある。そこで本手法では、ばね定数をペナルティ関数と考え、式(13)のように仮定する。

$$\mathbf{k} = \mathbf{p} \quad (26)$$

応力を未知数とする変位場を用いた離散化方程式は、式(10)に対して、式(21)もしくは式(23)で示す関係を代入することによって得られる。ただし、仮想変位 $\delta \mathbf{u}$ についても変位場と同じ関係を用いて次式のように表す。

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}_d \delta \mathbf{d} + \mathbf{N}_\sigma \delta \boldsymbol{\sigma} \quad (1 \text{ 次変位場}) \quad (27)$$

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}_d \delta \mathbf{d} + \mathbf{N}_\sigma \delta \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{N}_{\sigma_x} \delta \boldsymbol{\sigma}_x \quad (2 \text{ 次変位場}) \quad (28)$$

離散化方程式の誘導に先立ち、変位場と仮想変位を次のように整理する。

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)}, \quad \delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathbf{U}^{(e)} \quad (29)$$

ただし、それぞれの係数は、1次と2次の変位場に対して、それぞれ以下のものである。

(1次変位場の場合)

$$\mathbf{N}^{(e)} = [\mathbf{N}_d^{(e)}, \mathbf{N}_\sigma^{(e)}]$$

$$\mathbf{U}^{(e)} = [\mathbf{d}^{(e)}, \boldsymbol{\sigma}^{(e)}]^t, \quad \delta \mathbf{U}^{(e)} = [\delta \mathbf{d}^{(e)}, \delta \boldsymbol{\sigma}^{(e)}]^t$$

(2次変位場の場合)

$$\mathbf{N}^{(e)} = [\mathbf{N}_d^{(e)}, \mathbf{N}_\sigma^{(e)}, \mathbf{N}_{\sigma_x}^{(e)}]$$

$$\mathbf{U}^{(e)} = [\mathbf{d}^{(e)}, \boldsymbol{\sigma}^{(e)}, \boldsymbol{\sigma}_x^{(e)}]^t, \quad \delta \mathbf{U}^{(e)} = [\delta \mathbf{d}^{(e)}, \delta \boldsymbol{\sigma}^{(e)}, \delta \boldsymbol{\sigma}_x^{(e)}]^t$$

一方、

$$\mathbf{L} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{L} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} \quad (30)$$

より、式(10)における左辺第一項は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{(e)}} [\mathbf{L} \delta \mathbf{u}]^t \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u} \, d\Omega &= (\delta \mathbf{U}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^t \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \, d\Omega \mathbf{U}^{(e)} \end{aligned} \quad (31)$$

いま、全部分領域における自由度を並べた1次元配列を $\mathbf{U}$ とすると、部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関する自由度 $\mathbf{U}^{(e)}$ ならびに仮想変位は、以下のように関係付けられる。

$$\mathbf{U}^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} \mathbf{U} \quad (32)$$

$$\delta \mathbf{U}^{(e)} = \mathcal{A}^{(e)} \delta \mathbf{U} \quad (33)$$

ここで、 $\mathcal{A}^{(e)}$ は、全部分領域における自由度と着目部分

領域における自由度を関係付ける行列である。これより、式(32)は次のように整理できる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} [L\delta u]^t DLud\Omega = \delta U^t \mathbf{K}^{(e)} U \quad (34)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{(e)}$ は以下のとおりである。

$$\mathbf{K}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{B}^{(e)})^t \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega \mathcal{A}^{(e)} \quad (35)$$

また、式(10)の左辺第2項および3項は同様に以下のよう表すことができる。

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta u^t \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \delta u^t \mathbf{T} d\Gamma = \delta U^t \mathbf{P}^{(e)} \quad (36)$$

ここで、 $\mathbf{P}^{(e)}$ は以下の関係にある。

$$\mathbf{P}^{(e)} = (\mathcal{A}^{(e)})^t \left( \int_{\Omega^{(e)}} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{N}^{(e)})^t \mathbf{T} d\Gamma \right) \quad (37)$$

最後に式(10)の左辺第4項の離散化を行うにあたり、付帯条件を部分領域境界面に沿った局所座標系の成分に変換する。

$$\mathbf{R}_{\langle ab \rangle} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(a)} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \quad \text{on } \Gamma_{\langle ab \rangle} \quad (38)$$

ここで、 $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}$ は全体座標系から局所座標系への座標変換行列であり、次の関係がある。

$$\mathbf{R}_{\langle ab \rangle} = -\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} = \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \quad (39)$$

$\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)}$ 、 $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)}$ は部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ における境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に対するそれぞれの部分領域境界から見た座標変換行列である。したがって、式(9)は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} H_{\langle ab \rangle} &= \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \boldsymbol{\lambda}_{\langle ab \rangle}^t \mathbf{R}_{\langle ab \rangle} (\mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(a)} - \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(b)}) d\Gamma \\ &= \sum_{l=1}^2 \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \boldsymbol{\lambda}_{\langle ab \rangle}^t \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(l)} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(l)} d\Gamma \end{aligned} \quad (40)$$

一方、

$$\begin{aligned} \delta_{\langle ab \rangle} &= \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(a)} + \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \\ &= \sum_{l=1}^2 \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(l)} \mathbf{u}_{\langle ab \rangle}^{(l)} \end{aligned} \quad (41)$$

であるので、式(40)は式(25)と(41)より以下のように書くことができる。

$$H_{\langle ab \rangle} = \delta \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \boldsymbol{\delta}_{\langle ab \rangle}^t \cdot \mathbf{k} \cdot \delta_{\langle ab \rangle} d\Gamma \quad (42)$$

いま、相対変位 $\delta_{\langle ab \rangle}$ を次のように表す。

$$\delta_{\langle ab \rangle} = \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} U_{\langle ab \rangle} \quad (43)$$

ここで、 $\mathbf{B}_{\langle ab \rangle}$ 、 $U_{\langle ab \rangle}$ は、以下のとおりである。

$$\mathbf{B}_{\langle ab \rangle} = [\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \mathbf{N}^{(a)}, \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \mathbf{N}^{(b)}]$$

$$U_{\langle ab \rangle} = [U^{(a)}, U^{(b)}]^t$$

したがって、

$$H_{ab} = -\delta U_{\langle ab \rangle}^t \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \mathbf{B}_{\langle ab \rangle}^t \mathbf{k} \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} d\Gamma U_{\langle ab \rangle} \quad (44)$$

いま、式(32)(33)と同様に、全部分領域における自由度を並べた1次元配列を $U$ とすると、部分領域境界面 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ に関する自由度 $U_{\langle ab \rangle}$ 、仮想変位 $\delta U_{\langle ab \rangle}$ は、以下のよう関係付けられる。

$$U_{\langle ab \rangle} = \mathcal{M}_{\langle ab \rangle} U \quad (45)$$

$$\delta U_{\langle ab \rangle} = \mathcal{M}_{\langle ab \rangle} \delta U \quad (46)$$

ここで $\mathcal{M}_{\langle ab \rangle}$ は、全部分領域における自由度と着目部分領域境界面に関する自由度を関係付ける行列である。これらの関係を用いると、 $H_{ab}$ は次のように書くことができる。

$$H_{ab} = -\delta U^t \mathbf{K}_{\langle s \rangle} U \quad (47)$$

ここで、 $\mathbf{K}_{\langle s \rangle}$ は以下のとおりである。

$$\mathbf{K}_{\langle s \rangle} = \mathcal{M}_{\langle s \rangle}^t \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \mathbf{B}_{\langle s \rangle}^t \mathbf{k} \mathbf{B}_{\langle s \rangle} d\Gamma \mathcal{M}_{\langle s \rangle} \quad (48)$$

以上より、式(10)は最終的に以下のようになる。

$$\delta U^t \left( \sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{\langle s \rangle} \right) U - \delta U^t \left( \sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)} \right) = 0 \quad (49)$$

ここで、仮想変位 $\delta U$ は任意であるため、最終的に以下の離散化方程式が得られる。

$$\mathbf{K} U = \mathbf{P} \quad (50)$$

ただし、 $\mathbf{K}$ および $\mathbf{P}$ は以下のとおりである。

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^M \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{s=1}^N \mathbf{K}_{\langle s \rangle}, \quad \mathbf{P} = \sum_{e=1}^M \mathbf{P}^{(e)}$$

このように、本モデルの離散化方程式は、式(50)に示す連立1次方程式に帰着し、左辺の係数行列 $\mathbf{K}$ は、各部分領域の剛性と部分領域境界面に関する付帯条件の関係を組み合わせることによって得られる。

## 5. 数値計算例

### (1) 内圧を受ける中空厚肉円筒

はじめに、弾性解の精度を検証するため、図3に示す内圧を受ける中空厚肉円筒の問題を解析する。内径 $r_1$ 及び外径 $r_2$ 、ならびに内圧 $p_0$ 、弾性係数 $E$ 、ポアソン比 $\nu$

は図中に示すとおりである。また境界条件としては、図のように、両端をスライドとした。なお、ペナルティとして弾性係数の  $10^6$  倍の値を設定した。

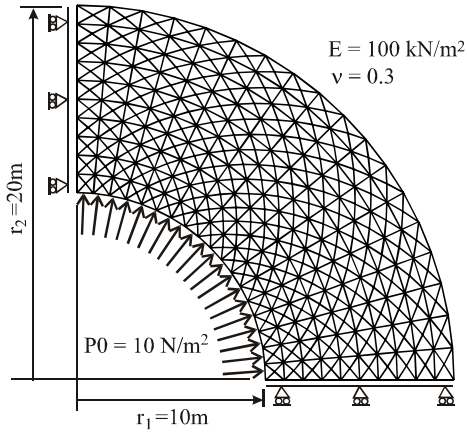


図3 内圧を受ける厚肉円筒

本モデルでは、領域形状として任意の形状を用いることができる。ここでは、図3に示すように、円筒の 1/4 を取り出し、半径方向と円周方向が 5 : 9 になるよう四角形に分割し、さらに1つの四角形を図のようにクロス分割した。図は半径方向分割 10、円周方向分割 18 の分割例である。

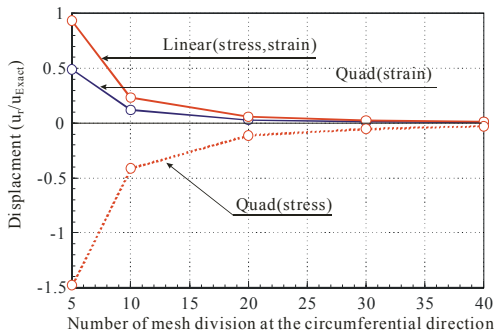


図4 半径方向変位

図4は縦軸に半径方向変位を解析解で除した値(%), 横軸に半径方向分割数をとった図である。図中(stress)は応力を未知パラメータとした場合, (strain)はひずみを未知パラメータにした場合で, Linear は線形変位場, Quad は 2 次変位場を表している。10 分割以上の分割で誤差は 0.5%以下に収まっており良好な精度の解が得られている。

図5は1次の変位場を用いた半径方向20分割の場合の半径方向の変位分布を示した図である。横軸は半径方向の距離を、また、縦軸は半径方向変位を、それぞれ、内径  $r_1$  で除して無次元化した値を示している。図中、実線が解析解を、白抜き○が本解析による半径方向の変位を表している。すべての点において、誤差は 0.06%以下である。剛体変位と応力を未知数に設定しても変位の精度は高い結果となった。

図6は図5と同じ問題の半径方向の部分領域内応力  $\sigma_r$  と円周方向の部分領域内応力  $\sigma_\theta$  を解析解と比較した図で

ある。横軸は半径方向の距離を内径  $r_1$  で除して無次元化した値を、また、縦軸は、それぞれの部分領域内応力を内圧で無次元化した値を示している。実線が解析解を、白抜き○が、円周方向の応力と半径方向の応力を示している。載荷部付近で  $\sigma_\theta$  の誤差が 0.96%程度と最大の誤差となるが、それ以外の部分では、それぞれの応力も正解と 0.1% 以下の誤差であった。

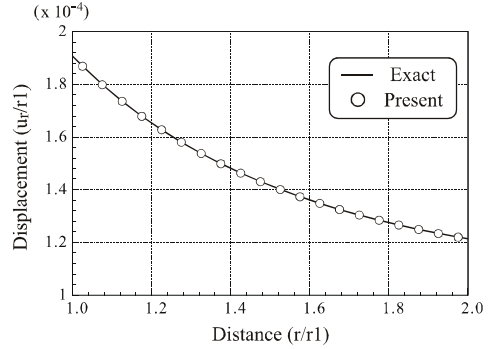


図5 半径方向変位分布

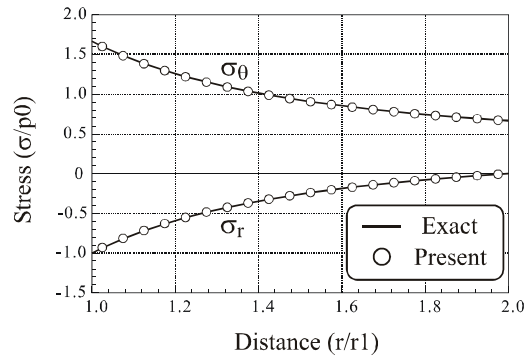


図6 半径方向および円周方向応力分布 (表面力)

図7は VonMises の応力を示したものである。本モデルでは要素内応力を直接求めることができるため、図のような、FEM で行われているカラーコンターによる表現も可能である。なお、この例は図3に示した分割例の倍 (半径, 円周方向とも) の分割に対する結果である。

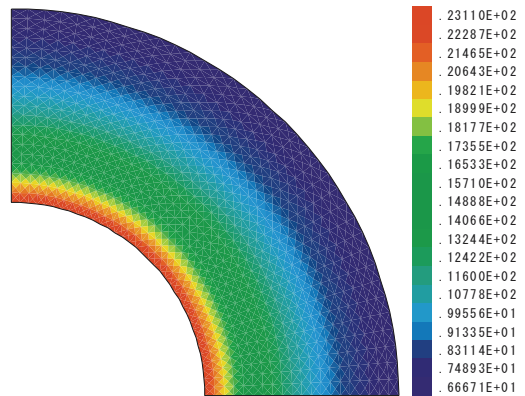


図7 VonMises の応力コンター

(2) 曲げを受けるはり

曲げを受けるはりの解析例として図8に示す高さ200mmのはりの解析を行った。解析に用いた材料定数は図中に示すとおりで、対称性を利用して左右半分を解析領域とした。解析に用いた領域分割は正方形を基本にして、三角形分割の場合は1つの正方形領域をクロス分割して作成した。中心より左半分が三角形分割、右側が四角形分割の例を示している。両者とも部分領域の数は800である。

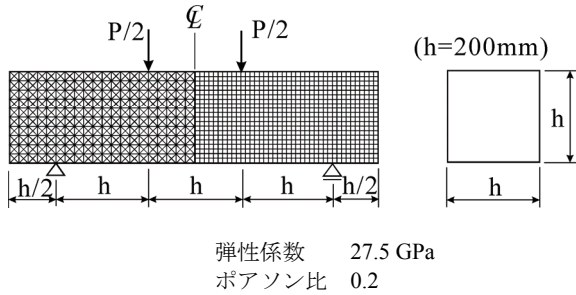


図8 曲げを受ける梁の解析例

表1 はり中央部最下端の鉛直変位(mm)

領域分割	HPM	FEM
三角形分割	0.0458 ( 0.0444 )	0.0444
四角形分割	0.0440 ( 0.0437 )	0.0448

2次の変位場を用いた場合のはり中央部最下端の鉛直下向きの変位を表1に示す。FEMの解析はDIANA[8]の6節点三角形要素と8節点四角形要素を用い、同じ要素分割で行った。HPMの( )内の値はひずみを未知パラメータとした場合の結果である[6]。応力を未知パラメータとした場合の方が大きめの変位を与える結果となった。

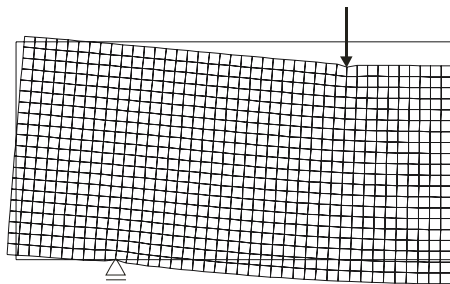


図9 変位モード(四角形分割)

図9に四角形分割の場合の変位モードを示す。当然のことながら、三角形分割やFEMの解析結果も同様なモードを示している。

一方、2次の変位場を用いた場合の梁中央部における上縁、下縁の水平応力をはり理論による解で正規化し比較した結果を表2に示す。( )内はひずみを未知パラメータとするHPMの解である[6]。FEM[8]の三角形分割は、他に比べ下縁で4%弱大きな値となっており、上縁においても同様に傾向が見られる。

表2 はり中央部の水平応力

領域分割		HPM	FEM
三角形分割	下縁	1.058 ( 1.058 )	1.098
	上縁	0.907 ( 0.907 )	0.929
四角形分割	下縁	1.061 ( 1.058 )	1.058
	上縁	0.907 ( 0.907 )	0.907

図10は2次の変位場を用い、四角形領域に分割して解析した時のvonMisesの応力コンターを描いた図である。中央部において準曲げの応力状態が得られている様子が伺える。このことを確認するため、中央部の部分領域における水平応力をプロットした結果を図11に示す。横軸が水平応力、縦軸がはりの高さ方向の位置を示している。また、○が三角形分割、□が四角形分割の結果であり、直線ははり理論による解を示している。

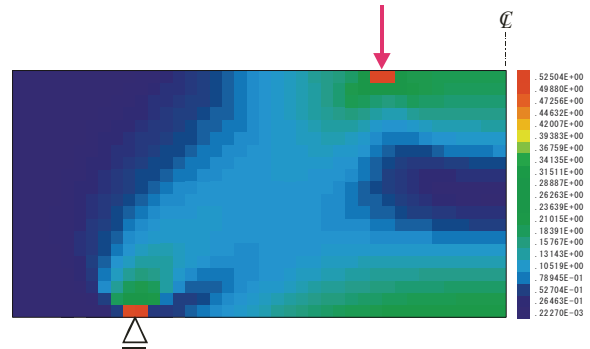


図10 vonMisesの応力コンター(四角形領域)

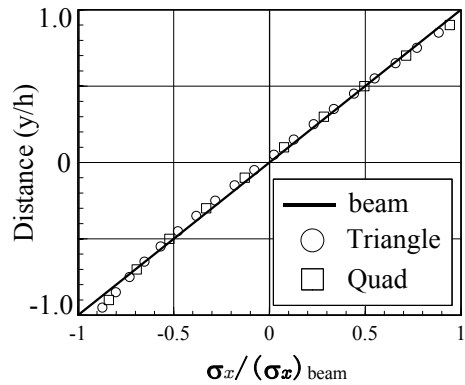


図11 はり中央部の水平応力分布

(3) 円孔有する平板の引っ張り

最後に、応力集中の問題として、円孔を有する平板の引っ張り問題を取り上げた。図12に解析モデルを示す。解析は上下左右の対称性を利用して1/4モデルで行った。図中に領域分割を示す。上が三角形分割、下は四角形分割であるが、応力集中部分を細分割するため不整合メッシュを用いている。本モデルは、有限要素法でいうところの要素頂点に自由度はもっておらず、部分領域毎に変位場が独立であるため、このような領域分割を行うことも可能である。

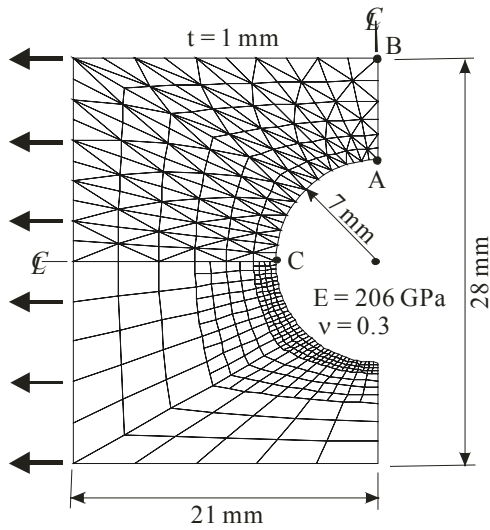
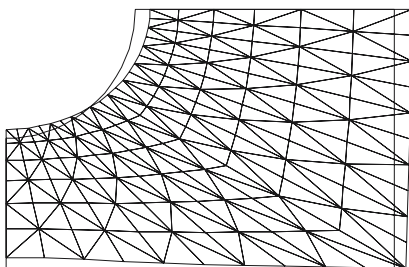


図 1 2 円孔有する平板の解析例

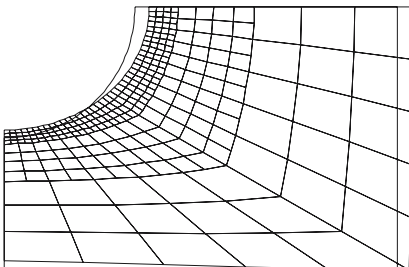
表 3 は図 1 2 に示す A 点の鉛直変位と C 点の水平変位を FEM による解析結果と比較したものである。解析には 2 次の変位場を用いている。( ) 内はひずみを未知パラメータとした場合の結果で、応力を未知パラメータとした場合の方が大きめの変位となっている。

表 3 変位の比較 (mm)

解析法	分割方法	A 点	C 点
HPM	三角形	0.0951 (0.0895)	0.159 (0.153)
	四角形	0.0857 (0.0815)	0.151 (0.147)
FEM	三角形	0.0895	0.153



(a) 三角形分割



(b) 四角形分割

図 1 3 変位モード

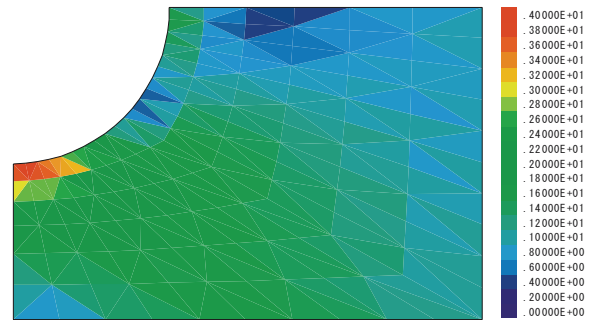
図 1 3 は三角形分割と四角形分割の変位モードを示した図である、モード的にも両者の間に顕著な差は見られない。

表 4 に応力集中係数を比較した結果を示す。四角形領域の方が三角形領域より大きな値になっているが、文献 [9] によれば、FEM で 2.32, BEM で 2.31 となっており、本手法の方が解析解に近い値となっている。

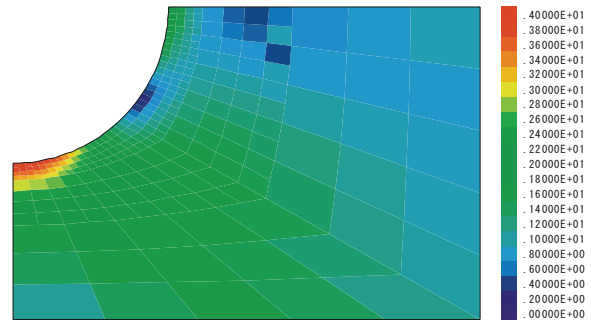
図 1 4 は三角形分割と四角形分割の場合の vonMises の応力分布状況を示した図である。両者の間で同様な分布状況を示している。

表 4 応力集中係数

解析法	分割方法	応力集中係数
HPM	三角形	2.07 (2.32)
	四角形	2.24 (2.17)
FEM	三角形	2.31
	四角形	2.29
解析解 (Howland)		2.16



(a) 三角形分割



(b) 四角形分割

図 1 4 vonMises の応力分布

## 6. まとめ

本論文では、ハイブリッド型ペナルティ法 (HPM) の変位場として、剛体変位と応力、応力の勾配を自由度とする 1 次もしくは 2 次のオーダーの変位場を提案した。さらに、一様応力場、曲げ、応力集中などのタイプの異なる問題を設定し解析を試みたところ、FEM の 2 次要素と同程度の精度の解が得られた。

HPM では、全体領域を部分領域 (FEM でいうところの要素) に分割し、それぞれの部分領域において独立に変位場が定義される。このとき、領域の節点は領域形状を



認識するためだけに用いられ、FEMのように自由度は持たない。このことは、剛体変位とひずみだけではなく、本提案のように剛体変位と応力を自由度に設定しても同じであり、また、2次のオーダーの変位場を用いても、FEMの要素のように中間節点を設ける必要はない。すなわち、線形変位場と同じ分割情報で、高次の変位場が適用できることになる。これは、数値解析例の細分モデルのように、任意の領域を細分する際、節点を気にせず行えることができることを意味しており、応力を自由度に設定しても、アダプティブ法におけるh法のような扱いが可能となる。局所的に強い非線形性が現れる問題の場合、部分的な再分割によって精度の向上が図れるものと考えられる。

一般に、ひずみより応力が問題となるケースでは、本手法のように直接応力を未知パラメータとして扱う方が便利である。ただし、応力-ひずみ関係が、変位場に含まれるため、今後、領域内の降伏が生ずるような問題に対する適応性を検討する必要がある。

#### 参考文献

- [1] Washizu,K, "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon, 1975.
- [2] 鷲津久一郎, "弾性学の変分原理概論", 日本鋼構造協会, 培風館, 1972.
- [3] 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, "ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析", 土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp.261-270, 2000.
- [4] 竹内則雄, 大木裕久, 上林厚志, 草深守人, "ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適応した離散化モデルによる材料非線形解析", 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20010002), pp.53-62, 2001.
- [5] 大木裕久, 竹内則雄, "ハイブリッド型ペナルティ法による上下界解析", 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20060020), pp.1-10, 2006.
- [6] 見原理一, 竹内則雄, 草深守人: 2次の変位場を仮定したハイブリッド型ペナルティ法の開発, 土木学会構造工学論文集, Vol.51A, pp249-257, 2005
- [7] 見原理一, 竹内則雄, "3次の変位場を仮定したハイブリッド型ペナルティ法の開発", 法政大学情報メディア教育研究センター研究報告, Vol.19, pp.155-162, 2006.
- [8] C.Frits and H.Feenstra : DIANA User's Manual, TNO, 2002.
- [9] 日本機会学会編: 固体力学におけるコンピュータアナリシス, コロナ社, 1986.

キーワード.

ハイブリッド型ペナルティ法, 変位場, 応力未知パラメータ, 混合法

-----

Summary.

**Development of HPM which used the stress for displaced field**

Norio Takeuchi

Dep. of Art and Technology, Faculty of Engineering, Hosei University

In the existing HPM (Hybrid-type Penalty Method), independent rigid-body displacement, rigid-body rotation, and the strain are set as the unknown parameter of the displacement field for every sub-domain. In the case of the high order displacement field, the gradient of the strain is also taken into consideration. In this paper, it proposes the new displacement field which sets the stress as the unknown parameter instead of the strain as a displacement field of HPM. At the secondary displacement field, it also adds the gradient of the stress to the unknown parameter. The simple numerical examples show that the accuracy of the solution obtained by this technique is the same as the displacement field which assumes the strain in the unknown parameter.

Keywords.

Hybrid-type Penalty Method, Displacement field, stress unknown parameter, mixed method