発散のないmodel の試作(8)

古尾谷, 泉 / Furuoya, Izumi

(出版者 / Publisher)
法政大学多摩研究報告編集委員会
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
法政大学多摩研究報告 / 法政大学多摩研究報告
(巻 / Volume)
21
(開始ページ / Start Page)
67
(終了ページ / End Page)
72
(発行年 / Year)
2006-03-30

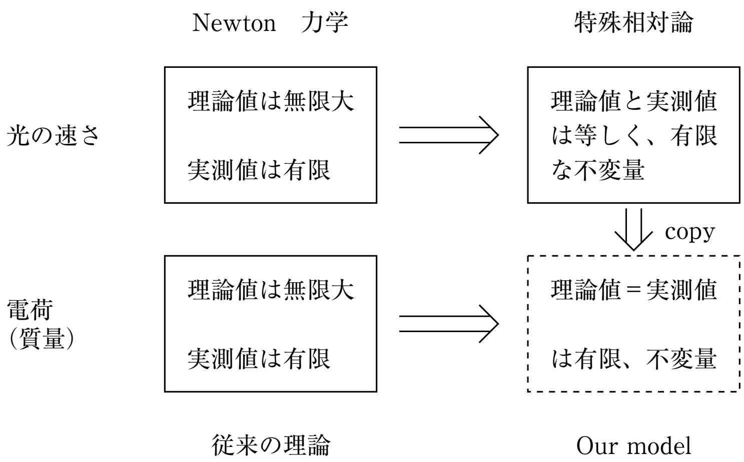
発散のない model の試作（Ⅷ）

古尾谷　泉

An attempt toward a non-divergent model (Ⅷ)

Izumi FURUOYA

我々の model の論理構造



特殊相対論：光の速さを不変量とする時空構造をもつ

Our model：電荷の値は有限で不変量となるような物理空間を作る。従来の理論を含み、極限をとると従来の理論に移行する。素粒子物理学における階層構造が説明できる可能性あり。

我々の model は、以下のような仮説に基づいている。

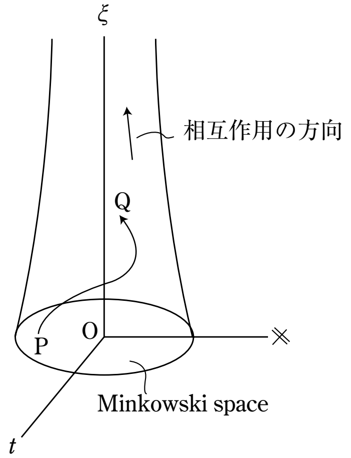
“古典的な意味で、電荷の値は相互作用によって変わってはならない恒常的不変量である。”

ここで、古典的とは virtual particle による反跳効果、すなわち、量子効果は含まないという意味である。しかし、このような電荷は測定にかかる量ではない。裸の粒子と virtual particle

とは実験では分離不可能であり、どちらか一方を単独で測定にかけることは出来ないからである。

我々の model は、特殊相対論において、光速不変性の要請を、電荷の不変性でおきかえた、理論と考えればよい。このことから、我々の仕事は電荷や質量の発散を除去しようとする試みではあるがむしろ電荷や質量が発散しないような物理空間を設置してその空間内での物理を論じようとする試み、といった方がよかろう。このような空間は無数に存在するであろう。しかし、新しい理論はこれまでの理論では説明できない何らかの実験事実が、新に、説明できるものでなければなるまい。我々の新しい理論では 20 世紀最大の難問の一つ、素粒子の階層構造の問題の解決の糸口となりうる一側面を示すことが出来た（と考えている）。

我々の model では、定曲率空間を設置してその空間内に図のような曲面をうめ込み、この空間を我々の物理空間とする。図で $(t-x)$ 平面は Minkowski 空間であり ξ 方向は相互作用の方向である。粒子の運動はこの曲面上の世界線であらわされる。今、図で $\xi=0$ で P 点にあった自由粒子が相互作用しながら曲面上の世界線に沿って、$\xi \fallingdotseq 0$ である点 Q 点に移行したとしよう。ここで、P 点も Q 点も定曲率空間内の点であるから、Q 点は P 点からこの定曲率間内の変換 G で移行できる。これが我々の model における相互作用に対応する。このようにして、我々の model space における相互作用は



$$G' \equiv G / G_0 \tag{1}$$

の形であらわされる。ここで、G_0 は homogeneous Lorentz 変換である。この効果は、また、相互作用の大きさを ξ とすると

$$e^{-\frac{\xi}{a}} \tag{2}$$

の形であらわされる。ここで、a は我々の model space である定曲率空間の曲率半径である。Eq.(2)の二乗 $e^{-\frac{2\xi}{a}}$ は我々の model space における基本計量テンソルであり、この量は potential に対応する。potential の微分は力であるから ξ は力となる。この事情は重力理論と同じである。このようにみてくると、我々の model は Kalza-Klein 型ではなく、むしろ重力理論に近いことがわかる。しかし、我々の model space の歪みは非常に小さいものでなければなるまい。以下、この点を簡単に議論しよう。重力理論は別として、現在の素粒子物理学の基礎理論での物理空間は常に平坦な Minkowski space である。そして、相互作用はこの空間内の並進の自由度が対応する。電磁量子力学は非常にすぐれた理論であって、例えば、この理論による電子の anormalous magnetic moment の計算値は驚くほどの精度で実験値を再現する。それらを数値で

具体的に示すと

$$測定値 = 0.0011596521$$

$$理論値 = 0.0011596524$$

であるが、このすばらしい一致が、おそらく、電磁的空間は平坦であと確信させる主な理由の一つとなったのであろう。このため、基礎理論では Kalza-Klein 型以外の空間は排除されるのであろう。しかし考えようによっては、この一致は、たかだか、数値にて 10 桁である。自然界には人知のおよばぬ測り知れないことが数多く存在する。例えば、big bang 宇宙論では、宇宙の創生時点では宇宙は一点に集中していたとされるが、これなどは我々の日常的な感覚ではとうてい信じられない。我々の物理空間は歪んでいても、その曲率半径 a が仮に

$$a > 10^{10}$$

であれば、この歪みによって anormalous magnetic moment の 10 桁の精度は乱されることはないであろう。したがって、我々の model space の歪みの度合は上の条件をみたさなければなるまい。

このようにして、我々の物理空間は従来の理論の物理空間とは異なるのであるから、charge density も、我々の新しい物理空間で定義されねばなるまい。では、我々の model における charge density と従来の理論の charge density とはどのように違うのか。そのことをみるために、まず、従来の理論における charge についての話から始めよう。

scalar field $\Psi(x)$ に対しては、non relativistic な charge density は、$x=(t, X)$ とおいて、

$$\rho = e\Psi^*(x)\Psi(x), \tag{3}$$

である。ここで、x は Minkowski space の点である。波動関数 $\Psi(x)$ は Schrödinger 方程式、

$$i\partial_t\Psi(x) = H\Psi(x),\quad H = H_0 + V, \tag{4}$$

をみたす。Eq.(4)の complex conjugate をとると

$$-i\partial_t\Psi^*(x) = H\Psi^*(x), \tag{5}$$

となる。charge の probability density $\rho = e\,\Psi^*(x)\psi(x)$ の時間による変化は、Eq.(4)と Eq.(5)とから、

$$\begin{aligned}\partial_t\rho &= (\partial_t\Psi^*)\Psi - \Psi^*(\partial_t\Psi),\\ &= \frac{i}{2m}\Big\{(\nabla\Psi^*)\Psi - \Psi^*(\nabla\Psi)\Big\},\end{aligned} \tag{6}$$

となり current density を

$$\boldsymbol{i} = \frac{i}{2m}\Big\{(\nabla\Psi^*)\Psi - \Psi^*(\nabla\Psi)\Big\}, \tag{7}$$

とおけば、これらは連続の方程式

$$\partial_t\rho = div\ \boldsymbol{i}, \tag{8}$$

をみたす。

free particle の場合には、non interacting system における wave function を $\Phi(x)$ とすると、$\Phi(x)$ は Schrödinger 方程式

$$i\partial_t \Phi(x) = H_0 \Phi(x) \tag{9}$$

をみたす。この場合の charge density および current density を、それぞれ、

$$\rho_0 = e\Phi^*(x)\Phi(x), \tag{10}$$

および

$$i_0 = \frac{i}{2m}\Big((\nabla\Phi^*)\Phi - \Phi(\nabla\Phi)\Big), \tag{11}$$

とおけば、これらは連続の方程式

$$\partial_t \rho_0 = div\ \boldsymbol{i}_0 \tag{12}$$

をみたす。しかし、ここで、ρ_0 は ρ とは異なることに注意しておこう。すなわち、

$$\rho(x) \neq \rho_0(x) \tag{13}$$

である。

relativistic な場合には、ρ や $\boldsymbol{i}$ は単に operator でしかないが、charge density や current density は、それらの operator の状態ベクトルによる期待値で考えれば事情は同じである。例として Klein Gordon 場を考えよう。Scalar field を $\Psi(x)$ とすれば、$\Psi(x)$ は Klein Gordon 方程式

$$(\partial_t^2 - \nabla_x^2 + \nabla + m^2)\Psi(x) = 0, \tag{14}$$

を満たす。このとき、four current　$j^\mu \equiv (\rho\ i)$ は

$$\rho = e\Big(\Psi^*(\partial_t\Psi) - \Psi(\partial_t\Psi^*)\Big) \tag{15}$$

および

$$i = e\Big(\Psi^*(\nabla\Psi) - (\nabla\Psi^*)\Psi\Big) \tag{16}$$

で定義される。free partide の場合には

$$j^\mu = 2|N|^2(E\ P), \tag{17}$$

となる。E は正負の両符号をとりうるので、ρ は、もはや、probability density の意味をもたない。この場合にも、一般には non interacting system における ρ を ρ_0 とかけば

$$\langle m|\rho|n\rangle \neq \langle m|\rho_0|n\rangle, \tag{18}$$

である。

charge density について、これまで述べてきたが、次に、このことは我々の model ではどのようになるであろうか。そのことについて議論しよう。

$\Psi(x)$ を我々の model space における波動関数としよう。ここで、点 (x) は変換群 G の支配する Minkowski space を含む広い空間における点をあらわすとする。

Non relativistic な場合で、scalor field $\Psi(x)$ に対しては、我々の model space における charge densiy は

$$\rho \equiv e\ \Psi^*(x)\Psi(x), \tag{19}$$

となるであろう。我々の model では相互作用は Eq.(1)変換であらわされる。$\Psi(x)$ は scalar field であるから、Eq.(1)の変換に対して

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = \Psi(x') = \Psi(G'x) = \Psi(x), \tag{20}$$

である。このことにより、ρ_0 を free particle の charge density とすると、

$$\rho \equiv e\Psi^*(x')\Psi(x') = e\Psi^*(x)\Psi(x) = \rho_0 \tag{21}$$

となり、この charge は相互作用によって不変である。これは Eq.(13)とは明らかに異なる。また、Klein Gordon 型の scalar field $\Psi(x)$ に対しては

$$\rho \equiv e\Big(\Psi^*(x)(\partial_t\Psi(x)) - (\partial_t\Psi^*(x))\Psi(x)\Big), \tag{22}$$

となるであろう。この場合にも、G' が global な変換であれば、ρ は不変量となる。

次に、波動関数が vector field $\Psi_\lambda(x)$ の場合について考えよう。もし、G' が global な変換であれば charge density は

$$\rho_t \equiv e\eta^{\lambda\mu}\Big(\Psi^*_\lambda(\partial_t\Psi_\mu) - (\partial_t\Psi^*_\lambda)\Psi_\mu\Big), \tag{23}$$

となるであろう。しかし、G' が x に依存する local な変換であれば、Eq.(23)における時間 t による通常の微分は偏微分でおきかえるべきであろう。このようにして、vector 場 $\Psi_\lambda(x)$ に対する charge density は

$$\rho_\rho \equiv eq^{\lambda\mu}\Big(\Psi^t_\lambda(D_\rho\Psi_\mu) - (D_\rho\Psi^*_\lambda)\Psi_\mu\Big), \tag{24}$$

となるであろう。但し、Eq.(24)では Eq.(23)における時間成分による微分を、一般の成分 ρ による共変微分 D_ρ でおきかえてある。

ρ_ρ の相互作用による不変性は以下である。Eq.(24)の第一項を

$$\rho_\rho \equiv eg^{\lambda\mu}\Psi^*_\lambda(x)(D_\rho\Psi_\mu(x)), \tag{25}$$

とき、vector の変換を $V_\lambda = A^{\mu}_{\lambda}V_\mu$ とかけば

$$\begin{aligned}
\rho_{\rho^1} &\equiv eg^{\lambda'\mu'}\Psi^*_{\lambda'}(V_{\rho'}\Psi_{\mu'})\delta^{\delta}_{\mu} \\
&= eg^{\lambda\mu}\underbrace{A^{\lambda'}_{\lambda}\,\overline{A^{\mu'}_{\mu}(A^{\alpha}_{\lambda'}}}_{\delta^{\alpha}_{\lambda}}\overline{\Psi^*_{\alpha}),\ A^{\rho}_{\rho'}A^{\delta}_{\mu'}}\Psi^*(V_\rho\Psi_\delta) \\
&= A^{\rho}_{\rho'}eg^{\lambda\mu}\Psi^*_\lambda\big(V_\rho\Psi_\mu\big) \\
&= A^{\rho}_{\rho'}\rho^{(1)}_{\rho}
\end{aligned} \tag{26}$$

となる。Eq.(24)の第 2 項についても同様なことがいえるから ρ_ρ は

$$\rho_{\rho'} = A^{\rho}_{\rho'}\rho_\rho \tag{27}$$

と変換する。したがって、成分 ρ を Minkowski space の成分に限れば、ρ_ρ は four vector となる。

しかし、G' は G の不変部分群ではない。したがって、上で得られた four vector は G' すなわち相互作用に依存する。そこで、vector field $\Psi_\lambda(x)$ に対する我々の model space における charge を、Eq.(22)における時間微分 ∂_t を世界線 s による共変微分 D_s でおきかえて、また、Eq.(22)を一般座標における変換性をもつように書きかえて、

$$\rho \equiv e g^{\lambda\mu}\Big(\Psi^{*}_{\lambda}(D_s\Psi_{\mu}) - (D_s\Psi^{*}_{\lambda})\Psi_{\mu}\Big), \qquad (28)$$

と定義しよう。これならば、charge は不変量となる。

G を直交変換にとれば、この変換は 2 次形式 $(x,\ x)$ を不変とし、同時に Eq.(28)を不変にする。すなわち

$$(x',\ x') = (x \quad x) \qquad (29)$$

である。