誘導形としての生産関数

奥山, 利幸 / OKUYAMA, Toshiyuki

(出版者 / Publisher)
法政大学経済学部学会
(雑誌名 / Journal or Publication Title)
The Hosei University Economic Review / 経済志林
(巻 / Volume)
73
(号 / Number)
4
(開始ページ / Start Page)
487
(終了ページ / End Page)
511
(発行年 / Year)
2006-03-03
(URL)
https://doi.org/10.15002/00001965

誘導形としての生産関数*

奥　山　利　幸

1．はじめに

新古典派の企業理論の目的は，企業の市場での活動，とりわけ生産物の供給と生産要素の需要を演繹することにある。したがって，企業の内部活動は，そもそも説明の対象とはなっていない。実際，新古典派の企業理論は，技術と利潤最大化の二つから構成されており，これらのうち技術は，通常，幾つかの性質を有する生産集合，より具体的には生産関数によって表現される。生産関数はアドホックに与えられるものであり，それがどのようにして出来上がるのか，その構成要素が何であるのかは経済学ではなく，工学の対象であると考えるのが普遍的である。

生産関数と利潤最大化の二つによって企業を同定化するという接近は，多くの生産的な命題を各種応用分野において生み出していることは疑う余地もない。生産関数がどのように出来上がるのか，その構成要素が何であるのかは，それらの応用にとって本質的ではないのである。

それでは，いつ本質的となるのであろうか。真っ先に想像されることは，技術進歩，技術革新など，生産可能性の決定因に言及しなければならない経済現象を対象とする場合である。狩猟から農耕，職人による小規模

＊ 尾高煌之助先生の退職を記念し，それに捧げるものである。

生産から大量生産など，経済発展と生産方法の間には相関が見られる。また，労働や資本といった生産要素のみで説明できない経済成長も又，生産関数の構成要素への言及を必要とする。第二に本質的となるのは，企業を組織として考察するときである。組織構造によっては，生産性が異なる可能性がある。例えば，企業内部における情報伝達の仕組みによっては，効率的な生産が達成できないかもしれない。しかしながら，そもそも，新古典派の枠組みにおいて組織構造が生産関数にとって中立的か否か，我々はその理解を持ち合わせていない。取引費用などの不完全性が一切存在しないときに，企業に残るものは何であるのか，このような疑問に答えるためには生産関数の構成要素に対する理解が必要不可欠である。第三に，費用逓減の発生源を特定化する場合である。通常，生産関数はアドホックに与える。すなわち，費用逓減は仮定するものであり，演繹対象ではない。大規模設備を使用するときに費用逓減を示すという説明も又，直感的なものであって演繹されたものではない。企業や産業を費用の視点から特徴化する場合に，生産関数を構成する要素への理解は必要不可欠である。最後に，これらの問題の根底を成すものとして，企業の発生それ自体を問う場合である。Arrow-Debreu 型の接近では，企業はどこからか与えられたものであり，企業数と各企業の生産集合は所与である。更には，市場均衡を求め，その資源配分の効率性を問うのみであれば，企業の存在は本質的ではない。交換経済で説明可能な現象は，企業を導入しても成り立つ。企業の役割は，交換経済では一点で表現される経済全体の消費可能性が，生産可能性によって拡大するのみである。企業の導入によって説明力が増すことはない。これに対し，アダム・スミスのピン工場の寓話は，企業内分業が労働生産性を改善することを明快に例示している。これは，一人の消費者が生産者となって生産するときよりも，複数の消費者が一つの企業を構成して生産する方が，生産可能性が大きいことを意味する。この議論の延長上に，企業の進化と経済発展の関係や組織としての企業が存在する。個人経営的生産から大量生産への移行と経済発展の関係や，生産工程の細分

化とまとめ方，各工程をだれに任せるのか，管理者の必要性の有無などの組織上の問題があると言える。

本稿の目的は，新古典派の企業理論の構成要素の一つである生産関数について，その構成要素が何であるのか，またそれらと企業内部の選択との関係は何であるのか，より端的に言えば，「誘導形としての生産関数」を中心に文献サーベイを行うことにある。既に指摘したように，企業の内部活動と生産関数の関係については，新古典派理論では説明の対象外であるので，文献は皆無に等しい。それればかりか，存在しても各文献の目的，問題意識自体に統一性がない。本稿ではそのような少ない，しかも散在している文献を今後の見通しが得られるようにまとめ上げたいと考えている。

少ない文献の中でも，幾つかの流れが確認できる。一つは，生産関数が工学の分野の対象であるとする経済学者の思い込みに端を発した文献である。その典型が Hollis B. Chenery（1949）である。Chenery による接近は，David Levhari & Eytan Sheshinski（1970）や Kenneth Arrow et al.（1972）を動機付けた。そこで，次節ではこれらの接近を概観する。もう一つの流れは，アダム・スミスのピン工場の寓話を動機付けとしてもつ企業内分業に基づいた Sherwin Rosen（1979）と Gary S. Becker & Kevin M. Murphy（1992）のモデルがある。これらの接近は，生産関数を誘導形として導出することを第一義の目的としたものではないが，Chenery などによる工学的接近とは異なり，分業という経済問題から生産関数を導出するという意味で十分過ぎる程特記に値すると言える。というのも，組織構造と生産関数の関係や，Paul M. Romer（1987）に見られる成長理論との連携に期待できるからである。第 3 節では，Rosen や Becker & Murphy のモデルの共通部分を抽出したプロトタイプ・モデルを提示し，各モデルと対比しながら生産関数の構成要素をどのように捉えているかを整理する。以上の二つの流れを中心に今後の見通しについて議論をするが，工学的接近と企業内分業からの接近のいずれにも該当しない文献も存在する。そういった文献のすべてを拾い集め，ここで取り上げることは難

しいが，Jayasri Dutta & Kislaya Prasad（1996）のモデルは Becker & Murphy の接近との対比が容易なこと，そして，比較的近年の文献であることから，取り上げることとしたい。

2．工学的接近

生産関数は新古典派企業の技術を表現している。既に指摘したように，その分析は工学に任せるものであると考える経済学者は多い。本節では，そのような考えに従って生産関数の構成要素の説明を試みた文献である Chenery（1949）と Chenery の接近を動機付けとして工場の修理問題から生産関数を誘導形として導出を試みた Levhari & Sheshinski（1970）のモデルを概観する。本節における記号法は，便宜上，各接近（各小節）ごととすることに注意されたい。

2.1　Chenery（1949）の「工学的生産関数」

Chenery（1949）は，生産要素と生産物の間の技術的数量関係を示す生産関数を「工学変数（engineering variable）」を使用した「工学的生産関数（engineering production function）」に分解することの計量経済学的意義を説明した。工学的分解を試みた実証分析については，Soren Wibe（1984）によるサーベイがあり，その査定については読者に委ねたい[1)]。ここでは Chenery の分解方法と例示を見ながら，生産関数の構成要素を Chenery がどのように捉え，それが企業内部の選択理論へとどのように発展して行くのか，あるいはその発展の可能性を考察することを目的とす

1）Wibe（1984）によるサーベイに対しては，V. Kerry Smith（1986）の見解とそれへの応答 Wibe（1986）がある。生産関数の工学的分解に対する実証分析は少なくない。しかし，Wibe（1984）によれば，農業に対する実証分析が見受けられないという。養鶏におけるビタミンとタンパク質の代替の弾力性は，経済学者にとって余り感心がないからであろうという。Wibe（1984）は，実証分析の文献サーベイであるため，その手法についての文献は触れられていない。例えば，工学と会計データの統合，利用方法については，Robert J. Anderson（1970）がある。

る。

Chenery は，投入物を次のように分類する。労働や土地，資本，材料といった「経済的生産要素（economic factors of production）」と，生産工程や経済的生産要素の物理的特性を示す「工学変数」である。特に，前者については購入可能要素（purchasable factors）として位置づけるのに対し，後者については市場性がなく企業内部でのみ使用可能であると考える。

先ず，経済的生産要素 $i\ (i=1,...,m)$ の数量を x_i，工学変数 $j\ (j=1,...,n)$ の大きさを v_j とする。このとき，Chenery は，各生産要素 i に対し，

$$x_i=\xi_i(v_1,...,v_n) \tag{1}$$

なる工学的関係があると想定する。一方，経済学で通常表現される生産関数は，生産量を y とすれば，

$$y=f(x_1,...,x_m) \tag{2}$$

である。したがって，生産量 y は工学変数の関数

$$y=\varphi(v_1,...,v_n) \tag{3}$$

と表現できる。これが Chenery の言う「工学的生産関数」である。このようにして工学変数によって生産関数を表現することで工学分野が活用可能になり，多くの産業の生産関数がより正確に計量可能であると考えた。Chenery は，経済学者に対し工学の利用を啓蒙したと言える。

実際にどのように工学を利用するのか，経済学者にも理解できるように，Chenery はパイプラインによるガス送管から例示した。D をパイプの半径，P_1 をパイプの入口圧力，P_2 をパイプの排出口圧力，そして A をガスの重力やパイプの長さ，温度等に依存したパラメータとすると，ガスがパイプラインによって送られる大きさ y は，Chenery によると，つぎの Weymouth's formula と呼ばれる工学的関係によって表現されるとい

う。

$$y = AD^{8/3}\sqrt{P_1^2 - P_2^2}$$

工学変数 D はパイプライン（資本）の属性である。一方，工学変数 P_1 や P_2 は，パイプラインの長さや半径 D，厚み T のみならず，コンプレッサ（資本）の能力，特に馬力 H にも依存する。

$$P_1 = 2ST/D,\ H = \{28.75(P_1/P_2) - 13.9\}y.$$

ここで，S はパラメータである。この結果，工学的生産関数（3）はパイプラインの属性 D と T，そして，コンプレッサの属性 H の関数として表現可能である。パイプラインとコンプレッサの二つの経済的生産要素については，属性 D，T，H によって表現される。すなわち，方程式（1）の形が存在する。例えば，パイプラインという資本が売買されるときにその重さ W で取引されるのであれば，

$$W = 28.2(D + T)T$$

がパイプラインに対する方程式（1）となる。

この例証から経済学で使われている生産関数（2）を直接的に導き出すのは難しいが，費用関数を計測してそこから大方の形状を予測することは可能である。Chenery は，資本 K を

$$K \equiv a_1 D + a_2 H + a_3 W$$

また，材料 M を

$$M \equiv b_1 D + b_2 H$$

と定義した。ここで，$a_h\ (h=1,2,3)$ は費用関数のうち利子費用分を，そして b_1 と b_2 は経常費用部分を意味する。このような再定義を経て得られる等量曲線は，綺麗な双曲線（Chenery 1949, Figure 4, p.525）を示す。

Chenery による上記例示は，後に工学的生産関数を実証分析する際に，つぎのような定式化に至った。Wibe（1984，p.403）は，工学的関係式（1）を制約条件として工学的生産関数（3）を最大にすることで生産関数（2）を導出できるとしている。Chenery の所期の定式化とは異なるが，Wibe による定式化は我々の問題意識にも答えを提供してくれるという利点がある。すなわち，生産関数の構成要素は，工学的関係式（1），工学的生産関数（3），そして工学的関係式（1）の下で工学的生産関数（3）を最大にすることの三つとなる。

2.2 修理問題モデル

Chenery の接近を動機付けとして具体的な技術上の問題から生産関数の導出を試みた分析として，Levhari & Sheshinski（1970）と Arrow et al.（1972）がある。後者の分析は前者の分析での定常性を考察したものであるので，本稿では前者の論文を中心に紹介することとする。

ある工場に M 個の機械があるとする[2)]。各機械は一切の労働を必要とせずに稼働し，絶えず運転状態にあって各時点ごとに一単位の生産物を産出するものとする。絶え間なく運転状態にあるこれらの機械は，t 時点から $t+h$ 時点までに $\lambda h+O(h)$ の確率で故障する。t 時点で運転状態にない機械の台数を n とすると，t 時点から $t+h$ 時点までに $n+1$ 個の機械が運転状態にない確率は $(M-n)\lambda h+O(h)$ となる。

これに対し，企業は故障中の機械を修理するために労働者を雇用する。今，企業が L 人 $(L\leqq M)$ を雇用したとする。各労働者は故障中の機械を一台のみ修理することができる。しかしながら，Levhar & Sheshinski は，t 時点から $t+h$ 時点までに修理が必ず完了するとは考えていない。t 時点から $t+h$ 時点までに修理が終わる確率は $\mu h+O(h)$ であると想定する。したがって，t 時点で運転状態にない機械の台数が n のとき，$t+h$

2）前小節にあった記号 M とは別物である。本節での記号法は，各小節ごとに閉じていると考えて頂きたい。

時点までに $n-1$ 個の機械が運転状態にない確率は，$n=0$ ならばゼロ，$1\leqq n\leqq L$ ならば $n\mu h+O(h)$，そして $L\leqq n\leqq M$ であれば$L\mu h+O(h)$ となる。

以上から，t 時点で n 個の機械が運転状態にない確率を $P_n(t)$ とすれば，$P_n(t+h)$ はつぎのようになる。

$$
\begin{aligned}
P_n(t+h)=&P_n(t)[1-(M-n)\lambda h-n\mu h]\\
&+P_{n+1}(t)(n+1)\mu h+P_{n-1}(t)(M-n+1)\lambda h+O(h) \qquad n<L\\
P_n(t+h)=&P_n(t)[1-(M-n)\lambda h-L\mu h]\\
&+P_{n+1}(t)L\mu h+P_{n-1}(t)(M-n+1)\lambda h+O(h) \qquad L\leqq n\leqq M
\end{aligned}
$$

ここで，$n<0$ ならば，任意の τ に対し，$P_n(\tau)=0$ である。また，任意の τ に対し，$\sum_{n=0}^{M}P_n(\tau)=1$ が成り立つ。

定常状態で n 個の機械が運転状態にない確率を P_n としよう。上記方程式の両辺から $P_n(t)$ を差し引いて h で割り，$h\to 0$ とすれば微分方程式が得られる。それから，定常状態での確率を得ることができる。

$$
\begin{aligned}
&[(M-n)\lambda+n\mu]P_n=(n+1)\mu P_{n+1}+(M-n+1)\lambda P_{n-1} \qquad n<L\\
&[(M-n)\lambda+L\mu]P_n=L\mu P_{n+1}+(M-n+1)\lambda P_{n-1} \qquad L\leqq n\leqq M
\end{aligned}
$$

条件から $\sum_{n=0}^{M}P_n=1$ より，すべての n に対し P_n が求まることとなる。得られた $P_n\,(n=0,...,M)$ は，L と M，そしてパラメータ λ，μ に依存する。

$$P_n=\pi_n(L,M;\lambda,\mu) \tag{4}$$

したがって，平均産出量は，

$$y=M-\sum_{n=0}^{M}n\pi_n(L,M;\lambda,\mu) \tag{5}$$

と表現することができる。

このようにして導出された生産関数の一般的特性については，残念ながら見いだすのは難しい。例えば，コブ・ダグラス型，あるいはより一般的

には CES 型に類似しているのか否か，等量曲線の形状や規模に関する収穫，限界生産性などの情報は得にくい。そこで Levhari & Sheshinski は，故障率 λ と修理率 μ の二つのパラメータに対し具体的数値を与え，機械の台数 M と修理スタッフの人数 L の各値に対し生産量を計算し，生産関数の特性を探っている。彼らの数値計算例では，規模に関する収穫については緩やかな逓増が確認できること，そして等量曲線は原点に対し凸形（技術的限界代替率逓減）が認められると指摘する。更には，コブ・ダグラス型に近似していると結論づける。

彼らの数値計算による生産関数の特徴化をどの程度信頼するかは，読者個々人によって異なるであろう。ただ，コブ・ダグラス型に類似するという結論は，次の理由から正確さに欠く。修理スタッフの人数 L が M に近づけば，Levhari & Sheshinski も示しているように，L の限界生産性はゼロに近づく。実際，$L \geqq M$ なる L では，L の限界生産性はゼロでなければならない。$L \geqq M$ のときの追加的雇用は，修理への限界的貢献が存在しないからである。これに対し，コブ・ダグラス型の場合，限界生産性は逓減するが，けっしてゼロになることはない。

同様の議論は $L=0$ の場合にも妥当である。$L=0$ の場合，一度故障した機械は二度と稼働することはない。故障した機械がたまっている状態に修理スタッフを一人雇用すれば，追加的生産はどのようになるであろうか。修理の完了率 μ で一台がようやく稼働するのである。したがって，追加的雇用の生産への効果はほとんど無視しうる程なのである。これに対し，コブ・ダグラス型の場合，$L=0$ での限界生産性は無限大に等しい。

しかしながら，Levhari & Sheshinski が工場の修理問題から生産関数を導出したことの意義が消え去る訳ではない。彼らの問題意識は，そもそも Chenery の工学的生産関数に対するミクロ的背景を与えることにある。実際，方程式（4）は工学的関係式（1）の逆関数に相当し，生産関数（5）の原型は P_n を工学変数としたときの工学的生産関数（3）であることが理解できる。工場の修理という具体的問題であるため，その一般性を議論

することはできないが，Chenery が生産関数の分解に工学を利用することを啓蒙したことに対し，十分にその意義を論証するに足りる例証と言えよう。Wibe（1984）が工学的関係式（1）を制約条件として工学的生産関数（3）を最大にすることで生産関数（2）を導出できることに言及したことに対し，Levhari & Sheshinski（1970）は工学的な関係式を積み重ねることで生産関数を導出したと言う意味で Chenery（1949）の所期の問題意識やパイプラインの例証に忠実に即していると言える。この結果，企業内部の選択については一切の言及がない。類似のことは，後に見る Dutta & Prasad（1996）による生産関数の導出にも見られる。工学的分解をどのように企業の内部活動や組織構造につなげて行くかは，今後の課題として残る。

3．企業内分業からの接近

生産関数を誘導形として導出する文献の中で，アダム・スミスのピン工場の寓話を動機付けとしてもつ企業内分業に基づいて構築されたモデルがある。比較優位が発生するような異質的労働を前提にして企業内分業から生産関数を導出した Rosen（1979）の接近，そして，同質的労働を前提にして各労働者が担当のタスクの技巧を自らの労働を投入して獲得することで企業内分業が規模の経済を発生させることを示した Becker & Murphy（1992）のモデルがある。Rosen と Becker & Murphy の各モデルの詳細については別の機会に紹介することとし，ここではそれらのモデルの共通部分のみを抽出して，Rosen と Becker & Murphy の各モデルとの相対化を行うことで，より本稿の論題に対し答えを求めやすいようにしたい[3)]。これらのモデルの詳細に興味のある読者は，例えば，拙稿（2006）を参照していただきたい。

3）このため，本節内の記号法は，本節全体で閉じる。前節とは異なり，本節内の各小節の記号は，本節内では同じ意味となる。

3.1　プロトタイプ・モデル

Rosen と Becker & Murphy の各モデルの共通部分は，つぎのようになる。先ず，企業の生産は様々なタスクから構成されていると考える。例えば，無数のタスクから構成されているとすれば，タスクの集合は区間 $[0, T]$ で表現される。ここで言う「タスク」とは，アダム・スミスのピン工場の寓話で言えば，ワイアを引き出し，それを伸ばしといった一つ一つの工程をさす。そして，各タスク $\tau \in [0, T]$ の成果 $x(\tau)$ はその企業の生産にとって必要不可欠であり，したがって，生産量 y はレオンチェフ型で表現される。

$$y = \min_{\tau \in [0, T]} x(\tau) \tag{6}$$

Rosen は，これを「間接的生産関数」あるいは「工学的生産関数」と呼んだ。N 人の労働者を雇用し，各労働者 i $(i=1,\ldots,N)$ にタスクを割り当てる。その集合を J_i とすれば，Rosen は J_i を労働者 i の「仕事」と呼んだ。各労働者の仕事は，割り当てられたタスクで構成されると考える訳である。N 組の仕事 $\{J_i\}$ は，タスクの全体 $[0, T]$ を被覆するとき，すなわち，包含関係

$$[0, T] \subset \bigcup_{i=1}^{N} J_i$$

が成り立つとき，「仕事配分」と呼ぶことにしよう。各労働者 i が達成したタスク $\tau \in [0, T]$ の成果を $x_i(\tau)$ とすれば，定義によって，$J_i \equiv \{\tau | x_i(\tau) > 0\}$ となる。補集合 $[0, T] \backslash J_i$ に属すタスク τ では，$x_i(\tau) = 0$ となる。このように各労働者の成果関数 x_i があるとすれば，企業全体で達成される成果 $x(\tau)$ は，水平分業が可能であると想定するので，各担当者からの成果の和となる。

$$x(\tau) = \sum_{i=1}^{N} x_i(\tau)$$

各労働者 i がタスク $\tau\in[0,T]$ を一単位達成するのに必要な労働量を $a_i(\tau)$，そして各労働者 i の労働量を L_i とすれば，企業は制約条件

$$\int_{J_i} a_i(\tau)x_i(\tau)d\tau \leqq L_i\ (i=1,...,N) \tag{7}$$

の下で生産量（6）を最大にする N 個の関数の組 (x_i) と N 個の仕事の組 $\{J_i\}$ を決める。この結果として企業が選択する N 個の仕事の組 $\{J_i\}$ は，必ず仕事配分となる。

Rosen と Becker & Murphy の各モデルに共通の要素を抽出すると以上のようになる。抽出された以上のモデルと Rosen，Becker & Murphy のモデルの差異を説明する前に，上記モデルにおいて労働が同質的な場合に生産関数がどのように導出されるかを示しておこう。

労働が同質的であるとすれば，任意の労働者 $i=1,...,N$ に対して $a_i=a$ と書けよう。この段階において各タスクを区別する要素は，関数 a のみである。任意の仕事配分 $\{J_i\}$ をとったとき，制約条件（7）の左辺右辺を i について合計すれば，

$$\int_0^T a(\tau)x(\tau)d\tau \leqq \sum_{i=1}^{N} L_i \tag{8}$$

が成り立つ。この制約条件の下で生産量（6）を最大にする N 個の関数の組 (x_i) と仕事配分 $\{J_i\}$ を求めると，誘導形として導出される生産関数は，

$$y=\frac{\sum_{i=1}^{N} L_i}{\int_0^T a(\tau)d\tau}$$

となる。任意の仕事配分 $\{J_i\}$ に対して制約条件（8）が成り立つため，最適な仕事配分は無数に存在する[4)]。例えば，すべての労働者がすべてのタスクを担当する場合，すなわち，任意の i に対して $J_i=[0,T]$ の場合，各労働者 i の各タスク τ の成果が $x_i(\tau)=(L_i/\sum_{j=1}^{N} L_j)y$ であれば良い。逆に，完全な分業性をとっても同じ生産が可能である。各 $i=1,...,N$ に対

4）プロトタイプ・モデルでは，生産関数は人員配置，分業に中立的と言える。

し,

$$y_i \equiv \frac{L_i}{\int_{J_i} a(\tau)d\tau}$$

と定義すると,最適な生産量はつぎのマキシミンに等しい。

$$y \equiv \max_{\{J_i\}} \min_i \{y_1,\ldots,y_N\}$$

$N=2$ の場合,$J_1=[0,t_1)$,$J_2=[t_2,T]$ とすると,y_1 は t_1 について減少関数,y_2 は t_2 について増加関数となる。$t_2 \leqq t_1$ の下で $\max_{t_1,t_2}\min\{y_1,y_2\}$ を求めると,$t_1=t_2$ となる。同様の結果は,$N>2$ でも成り立つ。$N=k$ で成り立つとすれば,生産量 $y^{(k)}$ は,

$$y^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} L_i}{\int_0^{T_k} a(\tau)d\tau}.$$

k 人の労働者に $[0,T_k)$,$(k+1)$ 番目の労働者に $[t_{k+1},T]$ を割り当てると,$T_k=t_{k+1}$ が成り立つ。したがって,$t_0=0$ として,$j<N$ については $J_i \equiv [t_{i-1},t_i)$, $J_N \equiv [t_{N-1},T]$ と定義すれば,$t_1,\ldots,t_{N-1}$ は,

$$\frac{L_1}{\int_0^{t_1} a(\tau)d\tau} = \cdots = \frac{L_i}{\int_{t_{i-1}}^{t_1} a(\tau)d\tau} = \cdots = \frac{L_N}{\int_{t_{N-1}}^{T} a(\tau)d\tau}$$

を満たすように決まる。このようにして,完全な分業性も又,最適な仕事配分となる。

3.2 Rosen(1979)と Becker & Murphy(1992)のモデル

Rosen の分析では,投入係数 $a_i(\tau)$ に対し比較優位を導入し,仕事配分 $\{J_1,\ldots,J_N\}$ がどのように決まるかを考察している。例えば,労働者のタイプが A と B の二つの場合,$N_A \equiv \{1,\ldots,n_A\}$,$N_B \equiv \{1,\ldots,n_B\}$ とすれば,$N=n_A+n_B$ となり,任意の $i \in N_A$ については $a_i=a^A$,$i \in N_B$ については $a_i=a^B$ として,$a^A(\tau)/a^B(\tau)$ が τ について厳密な増加関数と想定することで比較優位が導入される。各タイプ $j=A,B$ に対して $L^j \equiv \sum_{i \in N_j} L_i$,$x^j \equiv \sum_{i \in N_j} x_i$ とすれば,制約条件

$$\int_{J^j} a^j(\tau)x^j(\tau)d\tau \leqq L^j \quad (j=A,B)$$

の下で生産量（6）を最大にすれば，組 (x^A,x^B) と仕事配分 $\{J^A,J^B\}$ が決まる。この決定の仕組みは，リカードの比較生産説と同じである。Rosen の分析では，異質的労働間の仕事配分の決定を説明することができる。ちなみに，同じタイプ内の分業は，プロトタイプ・モデルで見た同質的労働の下での労働配分の決定が当てはまる。すなわち，同じタイプ内の分業までを説明することはできない。これは，労働が同質的なときに見られた生産関数の分業に対する中立性が各タイプの労働に成り立つからである。

これに対し，Becker & Murphy の分析では，プロトタイプ・モデルと同様，労働は同質的と想定する。しかしながら，各労働者は企業がもつ知識にアクセスし，自らの労働を投入して，担当のタスクの技巧を獲得すると考える。Becker & Murphy のモデルでは，労働者は企業固有の技術に対応するだけの技巧を最初から持ち合わせていないと想定していると言える。企業固有の技術に対する知識を H，労働者 i が担当するタスク τ の技巧の獲得に投入する労働量を $L_{ih}(\tau)$ とすれば，技巧の獲得がコブ・ダグラス型であれば，

$$a_i(\tau)=\{\delta H^\beta L_{ih}^\gamma(\tau)\}^{-1}$$

といった形で技巧が獲得される。ここで，β，γ，δ は正の定数である。タスク τ 自体の生産への労働投入量を $L_{iw}(\tau)$ とすれば，定義によって，$x_i(\tau)=L_{iw}(\tau)/a_i(\tau)$ である。労働者 i のタスク τ への労働配分を $L_i(\tau)$ とすれば，Becker & Murphy は，労働者 i が制約条件

$$L_{ih}(\tau)+L_{iw}(\tau)\leqq L_i(\tau)$$

の下で $x_i(\tau)$ を最大にするように労働配分 $(L_{ih}(\tau),L_{iw}(\tau))$ を決定すると仮定する。この結果，労働者 i のタスク τ への投入係数は，

$$a_i(\tau)=\left\{\delta\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^{\gamma}H^{\beta}L_i^{\gamma}(\tau)\right\}^{-1}$$

そして，タスク τ の成果は，

$$x_i(\tau)=\delta\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^{\gamma}\left(\frac{1}{1+\gamma}\right)H^{\beta}L_i^{1+\gamma}(\tau)$$

となる。労働者 i の企業への労働供給量を L_i とすれば，成果 $x_i(\tau)$ は制約

$$\int_{J_i}L_i(\tau)d\tau\leqq L_i$$

を受けることとなる。この制約条件の左辺右辺を i について合計しても，制約条件（7）とはならない。このことは，最適な仕事配分が任意であるというプロトタイプ・モデルの結果とは異なることを示唆する。すべての労働者にすべてのタスクを担当させるときの生産量は，

$$y=\delta\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^{\gamma}\left(\frac{1}{1+\gamma}\right)H^{\beta}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{L_i}{T}\right)^{1+\gamma}$$

となるが，完全分業体制ならば，

$$y=\delta\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^{\gamma}\left(\frac{1}{1+\gamma}\right)H^{\beta}\left(\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}L_i\right)^{1+\gamma}$$

となる。前者よりも後者の方が生産量が大きい。この結果，仕事配分 $\{J_i\}$ はタスクの全体 $[0,T]$ の分割となり，完全な分業性が成り立つことになる。特に，すべての労働者が同一の労働量 $\bar{L}$ で雇用される場合，仕事 J_i の大きさ（測度）は T/N となる。したがって，誘導形として得られる生産関数は，

$$y=\delta\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^{\gamma}\left(\frac{1}{1+\gamma}\right)H^{\beta}\left(\frac{\bar{L}N}{T}\right)^{1+\gamma}$$

となり，N が増加して分業が進む程，労働の平均生産性は改善して行くことが理解できる。

3.3　移行費用と規模の経済

Becker ＆ Murphy のモデルは，分業に基づいた成長理論を展開した Romer（1987）の分析において重要な役割を果たした収穫逓増へのミクロ的基礎を与える。そこで，分業が規模の経済を意味することについて，より詳細な議論については拙稿（2006）で行うこととして，ここで簡単な考察を加えておきたい。

労働が同質的なときに，Rosen と Becker & Murphy の各モデルの共通部分を抽出したプロトタイプ・モデルでは，いかなる仕事配分 $\{J_i\}$ も同じ生産関数を与え，誘導形として得られる生産関数は分業の程度に中立的であった。Becker & Murphy のように，技巧の内部生産を導入すれば分業が規模の経済を意味し，分業も内生的に決定する訳であるが，他の要因として Brian K. Edwards & Ross M. Starr（1987）が示したタスク間の移行費用（transition costs）がある。タスク間の移行費用とは，アダム・スミスが『国富論』において指摘したもので，一人の労働者が異なるタスクを担当するときに一つのタスクから他のタスクへ移行するにあたって必要となる費用をいう。ここでは，プロトタイプ・モデルにタスク間の移行費用を導入したときの生産関数を導出してみたい。

単純化のために，異なる二つのタスク間の移行費用を c とすれば，制約条件（7）は，

$$\int_{J_i} a(\tau)x_i(\tau)d\tau + c|J_i| \leqq L_i \ (i=1,...,N)$$

と変化する。ここで $|S|$ は実数の集合 S の大きさ（測度）を表す。各労働 i に対し，仕事 J_i の大きさが小さい程，x_i を大きくすることができる。したがって，仕事配分 $\{J_i\}$ はタスクの全体 $[0,T]$ の分割となるであろう。かくして，生産関数は，

$$y=\frac{\sum_{i=1}^{N}L_i - cT}{\int_0^T a(\tau)d\tau}$$

となる。例えば，関数 a が α の値をとる定値関数であり，すべての労働者が同一の労働量 $\bar{L}$ で雇用されているとすれば，

$$y=\frac{\bar{L}N}{\alpha T}-\frac{c}{\alpha}$$

となり，N が増加して分業が進むと，労働の平均生産性は上がることが理解できる。

以上の議論から，タスク上の人員配置という形の企業内分業に基づいた接近では，プロトタイプ・モデルに何かしらの要素，例えば，Becker & Murphy における技巧の内部生産，あるいは Edwards & Starr における移行費用を導入することで分業が内生的に決まり，しかも分業が規模の経済を意味することが理解できる。

3.4 考察

議論を本題に戻し，企業内分業に基づいた接近が生産関数の構成要素をどのように捉えているか，考察を与えよう。

プロトタイプ・モデルから直ぐさま伺えることは，Chenery による工学的接近と同じように，企業内部で扱う変数が企業内の資源によって制約を受け，その制約条件の下で工学的生産関数を最大にするという構造となっていることである。Chenery の接近では工学的生産関数が工学的に得られると考えるの対し，企業内分業からの接近ではアダム・スミスのピン工場の寓話を動機付けとしたレオンチェフ型（6）を想定する。このような差異は認められるものの，両者の接近が企業内資源の下で工学的生産関数を最大にするという構造を共通にもつことには変わりない。

しかしながら，プロトタイプ・モデル自身では我々の問題意識のすべてに対し答えを出すことはできない。第一に，レオンチェフ型の工学的生産関数（6）は，ピン工場のケースを捉えるかもしれないが，そこにタスク間の有機的関係性が入り込まない限り，企業を組織として分析するときの基礎とはなりにくい。第二に，Becker & Murphy における技巧の内部生

産，あるいは Edwards ＆ Starr における移行費用を導入することで分業が内生的に決まり，しかも分業が規模の経済を意味するという結果は Romer（1987）への基礎を与えるが，逆に，規模の経済が発生しない企業の分析には使えない。アダム・スミスのピン工場に動機付けをもち，企業の発生，進化理論への糸口も与えることが期待できるが，課題も残る。

4．Dutta & Prasad（1996）のモデル

ここまで，Chenery，Levhari & Sheshinski の工学的接近と，Rosen，Becker & Murphy による企業内分業からの接近の二つを見てきた。工学的接近でもなく，企業内分業にも基づかず，しかしながら，生産関数を誘導形として導出する他のモデルも存在する。そういったモデルの多くは，生産関数の構成要素を解明することに動機付けをおいていないため，文献としていずれの流れにも属さないばかりか，これまで見てきた文献を参照することもない。ここでは，そのような文献で Becker & Murphy のアイデアと対比が可能な比較的近年の Dutta ＆ Prasad（1996）のモデルを取り上げることとしたい。

Becker ＆ Murphy の接近では，各タスクの技巧をその担当者がそのタスクの成果を最大にするように自らの労働を投入することを前提とした。ここで問題となるのが，各担当者が担当のタスクの成果を何故最大にするのか，そして，何故自らの労働を投入してまでそのようにするのかである。Dutta ＆ Prasad は，企業内分業のモデルではないものの，生産性の向上を労働者達が発見するための組織として企業を位置づけ，生産性を向上させる活動を各労働者に誘発させるのに十分なインセンティブ・スキームとしての賃金体系を求めている。Becker ＆ Murphy の接近とは異なり，すべての労働者が必ずしも生産性を向上する活動を行わないときの生産関数を誘導形として示していると言える。ここでは，インセンティブ・スキームとしての賃金体系まで求めることはせずに，労働者の目的が企業

の目的とは異なるときの生産関数を誘導形として導出するところまでを見てみることとする。

ある企業が N 人を雇用し，各労働者に対し同一の仕事を割り当てるとする。その仕事には，より効率的な技法があり，それを発見する行為を「研究開発（research）」と呼ぶこととしよう。研究開発に成功すると生産性は ρ_H，効率的な技法が発見されない間は $\rho_L\ (0<\rho_L<\rho_H)$ であるとする。ある労働者が効率的な技法を発見した場合，その労働者の生産性は発見時点から ρ_H となるばかりでなく，その労働者が産み出す成果をその企業に雇用されているすべての労働者が観察可能であるため，N 人の労働者すべての生産性が次の時点より ρ_H となる。

生産は毎期 $t\ (t=1,2,3,...)$ に行われる。毎期 t において研究開発する労働者数を M_t とする。単純化のために，M_t は M で一定であるとしよう。各期において M 人の各々が研究開発に成功する確率を π とする。したがって，各期において研究開発が成功しない確率は $q_M \equiv (1-\pi)^M$ となる。各期 t において研究開発に成功する人数 $\tilde{m}$ は，二項分布

$$P(t,m;M,\pi) \equiv \mathrm{Prob}\{\tilde{m}=m\} \equiv q_M^{t-1} \frac{M!}{m!(M-m)!} \pi^m (1-\pi)^{M-m}$$

に従う確率変数である。この結果，研究開発に成功する時期 $\tilde{s}$ は，確率分布

$$p(s;M,\pi) \equiv \mathrm{Prob}\{\tilde{s}=s\} \equiv \sum_{m=1}^{M} P(s,m;M,\pi) = q_M^{s-1}(1-q_M)$$

に従う確率変数となる。この企業の生産量 y も又，確率変数 $(\tilde{m},\tilde{s})$ に依存した確率変数となる。確率変数 $(\tilde{m},\tilde{s})$ の実現値を (m,s) とすれば，研究開発に成功した期間 s では成功した労働者の生産性が向上し，残りの労働者については $(s+1)$ 期から効率的な技法が利用可能となるので，

$$y_t(s,m) = \begin{cases} \rho_L N & t<s \\ \rho_L(N-m)+\rho_H m & t=s \\ \rho_H N & t>s \end{cases}$$

と書き表すことができる。生産量 y 自体が確率変数となるが，その分布はつぎのようにして求めることができる。t 期に効率的生産性を獲得している労働者数を n_t とすると，n_t は $\{0,1,...,M\}\cup\{N\}$ の標本空間をもつ確率変数であり，それはつぎの確率分布に従うマルコフ過程となる。$M<N$ としたとき，$n_t=0$ ならば次期 $t+1$ において労働者全員が効率的生産性を知ることはないので，

$$\mathrm{Prob}\{n_{t+1}=N|n_t=0\}=0$$

また，$n_t=0$ であれば，次期 $t+1$ に 0 人以上 M 人以下の労働者が効率的生産性を獲得できるのは二項分布に従う。

$$\mathrm{Prob}\{n_{t+1}=n|n_t=0\}=\frac{M!}{n!(M-n)!}\pi^n(1-\pi)^{M-n},\ 0\leqq n\leqq M.$$

もし $n_t>0$ であれば，次期 $t+1$ にはすべての労働者が効率的生産性を知ることとなるので，

$$\mathrm{Prob}\{n_{t+1}=n|n_t>0\}=0,\ 0\leqq n\leqq M$$
$$\mathrm{Prob}\{n_{t+1}=N|n_t>0\}=1$$

となる。このようにして効率的生産性を獲得している労働者数 n_t はマルコフ過程になり，生産性も又

$$\tilde{\rho}_t\equiv\frac{\rho_L(N-n_t)+\rho_H n_t}{N} \tag{9}$$

と書き表せて，生産量は上記確率分布に従う確率変数

$$\tilde{y}_t=\tilde{\rho}_t N \tag{10}$$

と単純に表現することができる。

このようにして，研究開発をする労働者数 M を所与としたとき，生産関数は（10）として誘導形として導出される。Becker & Murphy の接近では $M=N$ と仮定していた訳であるが，Dutta & Prasadのモデルでは

M の決定は内生的である。一人の労働者が生産性を向上する方法を発見すると，その知識は企業内部でだれでも共有可能となる。この結果，もし研究開発をすることに努力が必要であるとすれば，フリーライダー問題を解消しながらのインセンティブ・スキームとしての賃金体系が必要となる。Bengt Holmstrom（1982）で扱われているチーム内でのインセンティブ問題と，Carl Shapiro & Joseph E. Stiglitz（1984）におけるインセンティブ要因としての賃金決定を混合したような議論となって行く。

議論を本題に戻し，Dutta & Prasad のモデルから理解できることを探ってみたい。Dutta & Prasad のモデルは生産関数を誘導形として導出しているが，それは企業内部の選択を基礎において構築されたというよりも，Levhari & Sheshinski が工場の修理問題という具体的な問題より工学的関係式を丁寧に構築してそこから生産関数の導出を試みた分析にむしろ近い。この意味で，Chenery の工学的接近への例証を与えると位置づけられるかもしれない。

5．結語

本稿の目的は，生産関数を誘導形として導出するモデルを概観し，生産関数の構成要素や企業の内部活動との関係についてそれらのモデルがどのように捉え，今後の展望を眺望することにあった。生産関数を誘導形として導出するモデルは，工学的接近と企業内分業に基づく接近の二つに大別できるが，両者に共通の要素が見出せることも確認した。

工学的接近と企業内分業からの接近に共通となる要素を抽出すれば，つぎのようになろう。企業内部で操作する変数，それらの変数が企業内の資源を利用すること，そして，それらの変数から生産量が産み出されることを要素として，資源制約の下で生産量を最大にすることで生産関数が導出される。企業内操作変数を x，Chenery や Rosen が「工学的生産関数」と呼んだ関数を $y=\varphi(x)$，そして資源制約を $g(x;L)\leqq 0$ とすれば，生産

関数 $y=f(L)$ は

$$f(L)\equiv\max\{\varphi(x)|g(x;L)\leqq 0\}$$

となる。工学的接近の場合には φ や g は工学的に与えられると考えるが，企業内分業からの接近では x が中間物のベクトルとなるため φ はレオンチェフ型，そして g は L の次元と同じ個数存在し，各々が所与の投入係数によって与えられる。

しかしながら，このような抽象化は，本稿が問題意識として考えたすべての経済現象を解きうる訳ではない。第一に，組織構造と生産関数の関係については，関数 φ が何かしらの組織的背景を持たない限り，上記抽象化は一切の洞察を与えない。第二に，生産要素以外に経済発展の要因を求める場合，関数 φ や g に経済的背景がない限り，技術の構成要素への洞察は闇の中に入り込んでしまう。第三に，企業の発生についても同様のことが言える。

我々の問題意識のすべてに対し光明を投じ，しかも本質のみを抽出するのは，今後の大きな課題であることが理解できる。工学的接近と企業内分業からの接近の共通部分に対する上記批判は，当然，両者の分析に当てはまる。このことを踏まえて今後の展望について論考を加え，本稿の結語とすることとしたい。

本稿は，工学的接近と企業内分業からの接近の折衷を勧めるものではない。アダム・スミスのピン工場，規模の経済との関係まで既に言及のある企業内分業からの接近の方が現段階では優れていると考えられるからである。特に，上記抽象化で問題となった φ への組織的背景の付与，例えば，タスク間の技術的連携構造を与えれば，組織構造と生産関数の関係に対し，Jacob Marschak（1954，1955，1960）や Roy Radner（1959）などのチーム理論を応用することで何かしらの洞察を与えることができると期待できる。この上で，Becker ＆ Murphy のように技巧の内部生産や，Edwards ＆ Starr のように移行費用を導入すれば，分業が規模の経済を

意味し，それが Romer（1987）の成長理論へのミクロ的基礎を与えることができる。そして，企業の発生についても，参加者数が増えれば生産可能性が拡大することを要素とした理論作りが可能となる。しかしながら，規模の経済の発生は示せても，費用逓増の発生原因までは示せない。多くの側面で優れていることは確かであるが，大きな課題も残る。

《参考文献》

Anderson, Robert J., Jr. "Applications of Engineering Analysis of Production to Econometric Models of the Firm." *American Economic Review*, May 1970, 60(2), pp. 398–402.

Arrow, Kenneth J., Levhari, David, and Sheshinski, Eytan. "A Production Function for the Repairman Problem." *Review of Economic Studies*, July 1972, 39(3), pp. 241–249.

Becker, Gary S., and Murphy, Kevin M. "The Division of Labor, Coordination Costs, and Knowledge." *Quarterly Journal of Economics*, November 1992, 107(4), pp. 1137–1160.

Chenery, Hollis B. "Engineering Production Functions." *Quarterly Journal of Economics*, November 1949, 63(4), pp. 507–531,

Dutta, Jayasri, and Prasad, Kislaya. "Learning by Observation within the Firm." *Journal of Economic Dynamics and Control*, August 1996, 20(8), pp. 1395–1425.

Edwards, Brian K., and Starr, Ross M. "A Note on Indivisibilities, Specialization, and Economies of Scale." *American Economic Review*, March 1987, 77(1), pp. 192–194.

Holmstrom, Bengt. "Moral Hazard in Teams." *Bell Journal of Economics*, Autumn 1982, 13(2), pp. 324–340.

Levhari, David, and Sheshinski, Eytan. "A Microeconomic Production Function." *Econometrica*, May 1970, 38(3), pp. 559–573.

Marschak, Jacob. "Towards an Economic Theory of Organization and Information." in R. M. Thrall et al., eds., *Decision Processes*, New York: John Wiley & Sons, 1954, pp. 187–220.

Marschak, Jacob. "Elements for a Theory of Teams." *Management Science*, January 1955, 1(2), pp. 127–137.

Marschak, Jacob. "Theory of An Efficient Several-Person Firm." *American Economic Review*, May 1960, 50(2), pp. 541-548.

Radner, Roy. "The Application of Linear Programming to Team Decision Problems." *Management Science*, January 1959, 5(2), pp. 143-150.

Romer, Paul M. "Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization." *American Economic Review*, May 1987, 77(2), pp. 56-62.

Rosen, Sherwin. "Substitution and Division of Labour." *Economica*, August 1978, 45(179), pp. 235-250.

Shapiro, Carl, and Stiglitz, Joseph E. "Equilibrium Unemployment as a Worker Discipline Device." *American Economic Review*, June 1984, 74(3), pp. 433-444.

Smith, V. Kerry. "Another View of the State of Engineering Production Functions." *Economica*, November 1986, 53(212), pp. 529-532.

Wibe, Soren. "Engineering Production Functions: A Survey." *Economica*, November 1984, 51(204), pp. 401-411.

Wibe, Soren. "Observable and Non-Observable Data: A Reply." *Economica*, November 1986, 53(212), pp. 535-536.

奥山利幸「分業と規模の経済」『経済志林』2006年，73巻 3 号（掲載予定）。

The Production Function as A Reduced Form

Toshiyuki OKUYAMA

《**Abstract**》

This paper surveys models that derive production functions as reduced forms, especially by focusing on the characteristics that identify marginal and average productivities, hence, the economies of scale. Thus, the paper appraises whether those models can serve as a microeconomic foundation for the neoclassical firm as well as other branches of economics, e.g., endogenous growth models and industrial organization.