

## ファイナンスにおける推定と数値解析における新展開

安田, 和弘 / YASUDA, Kazuhiro

---

(雑誌名 / Journal or Publication Title)

科学研究費助成事業 研究成果報告書

(開始ページ / Start Page)

1

(終了ページ / End Page)

5

(発行年 / Year)

2014-05

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 16 日現在

機関番号：32675

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740089

研究課題名(和文) ファイナンスにおける推定と数値解析における新展開

研究課題名(英文) New developments of estimations and numerical analysis in finance

研究代表者

安田 和弘 (YASUDA, Kazuhiro)

法政大学・理工学部・准教授

研究者番号：80509638

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円、(間接経費) 870,000円

研究成果の概要(和文)：数理ファイナンスにおける推定および数値解析に関する研究を主に3点行った。①ベイズ統計量に対する近似式の真値への収束のオーダーをデータ数に対して与え、近似パラメータの選び方も理論的に与えた。また、期待効用最大化問題に対するフィルタリングの効果についても考察した。②フラクショナルブラウン運動をファイナンスモデルに用い、マリアヴァン解析を使って、リスク指標の1つであるグリークス表現を与え、その効果を数値実験により確かめた。③日本の株式市場における跳びの存在や分布の推定を行った。また、資産バブルの存在についても考察した。

研究成果の概要(英文)：Three main studies on estimations and numerical analysis in mathematical finance were considered. 1. A convergence rate to the real value of an approximation of the Bayesian estimator with respect to a number of data and choice of approximating parameters were theoretically given. Effects of filtering in expected utility maximization problems were also studied. 2. Using the Malliavin calculus, Greeks, which is one of risk measure, under a financial model with fractional Brownian motions were given and some effects were numerically confirmed. 3. Existence of jumps in Japanese stock markets and estimations of the distribution were studied. Existence of asset bubbles was also studied.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：フィルタリング フラクショナルブラウン運動 マリアヴァン解析 グリークス

## 様式 C-19、F-19、Z-19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

- (1) フィルタリング理論は数理ファイナンスやその他、多くの応用分野においてパラメータ推定の1つの手法として幅広く用いられている。フィルタリング理論で最小分散推定量として与えられるものが条件付き期待値と呼ばれるものになる。線形でノイズがガウス分布に従うときは、解析的に計算する方法が知られているが、非線形るとき条件付き期待値を近似し、シミュレーションなどで数値を得る必要がある。そのシミュレーション方法は多数提案されている。しかし、それらが真値に収束するか、どれくらいの速さで収束するかなどが、数値実験的に確かめられている程度であり、理論的に確かめられていなかった。また、数理ファイナンスの分野において、フィルタリングの効果がどの程度あるのか十分検証が成されていなく、その検証を行う必要があった。
- (2) 数理ファイナンスの分野において、株価やリスク指標であるボラティリティなどを数理モデル化する際に、マルコフ性と呼ばれる将来の変化は過去には依存しないという性質を持つ確率過程を用いることがほとんどである。しかし、いくつかの実証研究論文で指摘されている通り、将来の価格は過去にいくらか依存していると指摘されているため、非マルコフ過程に対する数理モデルに対して、数理ファイナンスの問題を考える必要があった。
- (3) 株式市場の実データに対して、市場の特徴を捉えるために多くの実証研究が成されている。しかし、それらの論文の多くは経済モデルで用いられる時系列モデルを基本として行われている。一方、近年、数理ファイナンスモデルにおいても、市場の特徴を捉えるための統計的手法が開発されてきているため、それらを用いて日本の株式市場における市場の特徴を捉える必要があった。

## 2. 研究の目的

- (1) フィルタリング理論のシミュレーションアルゴリズムで広く用いられている粒子フィルタ(パーティクル・フィルタ)と呼ばれている近似手法に対して、その収束の速さを表すオーダーをデータ数との関係で理論的に与えることが最初の目的である。理論的に与えることで、どのような仮定の下でそのオーダーが保たれるかが明示的に与えられることとなる。更に、近似の際の近似パラメータは経験的に選ばれることが多いが、その点に関しても漸近的にどの程度の選び方をすれば良いのかを理論的に与える。その後、いくつかの例を与える。最後に、数理ファイナンスのポートフォリオ最適化問題に

において、フィルタリングの効果などがどの程度あるかについて調べていく。

- (2) 非マルコフ過程であるフラクショナルブラウン運動と呼ばれる確率過程を用いて、株価やボラティリティ過程を与えてやり、そのようなモデルの下で、数理ファイナンスにおけるリスク管理指標の1つであるグリークスについて調べる。特に、マリアヴァン解析を用いたグリークス表現は、通常のブラウン運動を用いたモデルにおいて数値計算上、非常に有用であることが知られているため、フラクショナルブラウン運動を用いた場合に対してもマリアヴァン解析を用いたグリークス表現を理論的に与え、その有用性が引き継がれるのかどうかを数値実験により考察し、特徴などを調べる。
- (3) 数理ファイナンスモデルにおける実証研究はどのようなモデルやノイズを株価などのモデルに採用すべきかを示唆する非常に興味深いものである。特に、日本の株式市場がどのような特徴を持っているのかを調べることを目的とする。ここでは、次の2つの特徴を調べる。株価などに大きな変化がある場合、株価などのモデルに跳びを加味したモデルを採用した方が良いのかどうかを、統計的検定を行い、考察する。また、個別証券などに資産バブルが発生しているかどうかをJarrow-Kchia-Protterの方法を用いて考察する。また、市場の方向性の急激な変化を加味するモデルの1つとして、ドリフト係数が不連続な関数を用いる方法がある。そのようなモデルを採用した際の近似精度も調べる。

## 3. 研究の方法

- (1) 非線形フィルタリングのとき、条件付き期待値をシミュレーションするために、条件付き確率が必要となる。しかし、通常、条件付き確率も未知のことが多く、近似をする必要がある。その部分には核型推定を用いて、推定する形で近似をする。また、データは通常、離散時間でのみ観測されるものであるため、データは適当な等間隔で観測されるものとしてフィルタを近似する。これは粒子フィルタと呼ばれる方法である。このような近似量に対して、ラプラスの方法を用いた漸近解析などをし、データ数に対するオーダーを得る。その後、真値に収束するための条件から近似パラメータの関係を導出し、理論的なパラメータの選び方を与える。また、応用に対する実験としては、市場の方向性が不確定な株価モデル、ファクタモデルに対して、対数型期待効用最大化問題を考え、種々の状況下での効用を解析的に計算できるときは解析的な計算を行い、解析的に得られない場合は

シミュレーションを用いて比較、考察を行う。

- (2) 株価モデルとして広く用いられるブラック・ショールズモデルに対して、ノイズにフラクショナルブラウン運動を用いたフラクショナル・ブラック・ショールズモデルを採用し、フラクショナルブラウン運動に対するマリアヴァン解析、特にマリアヴァン解析の意味での部分積分公式を用いて、数理ファイナンスのオプションに対するリスク指標の1つである Greeks 表現を与える。特に、デルタ、ガンマ、ベガを考察する。オプションはヨーロッパ型やアジア型、また複数資産の場合などを想定する。ここで導かれた理論的表現に対して数値実験により有用性を確かめるが、その際にフラクショナルブラウン運動は通常のブラウン運動の積分表現で与えられる表現を用いてシミュレーションを行う。特に、ここではフラクショナルブラウン運動のハーストパラメータが  $1/2$  より大きい場合を扱う。
- (3) 日本の株式市場における跳びの存在に関しては、Barndorff-Nielsen and Shephard や Jiang and Oomen, Lee and Mykland などの方法を用いて大きい跳び（ポアソン型のジャンプ）に対する仮説検定を行う。また、小さい跳び（レヴィ型のジャンプ）の仮説検定に対しては Lee and Hannig の方法を用いて考察する。また、日本の株式市場における資産バブルの存在に関しては、Jarrow, Kchia and Protter によって提案されている2つの方法（パラメータ法と再生核ヒルベルト空間法）を用いて行う。ここでは、リスク中立確率の下で割引株価がマルチンゲールか真に局所マルチンゲールかバブルかどうかの判定を行う。

#### 4. 研究成果

- (1) フィルタリング理論に対する近似精度に関する理論的結果として、データを等間隔で観測できるという状況を想定し、データは定常かつ  $\alpha$  ミキシングという性質を持つとし、更に推移確率密度関数は核型推定法とモンテカルロ法で近似した際に、データ数の平方根のオーダーで真値に収束することが示された。また更に、モンテカルロの回数とオイラー・丸山近似の時間刻み数に関する真値に収束するためのデータ数との関係性を与え、経験的に選ばれてきたモンテカルロ法の回数やオイラー・丸山近似の時間刻み数を理論的に与えることに成功した。データ観測の設定に関しては、他の場合も考えられ、今回の結果を基に今後の広がりも期待される。また、数理ファイナンスにおけるフィルタリングの応用として、期待効用最大化問題を考察した。株価過程に

は、株価の方向性が外生的な影響を受けると想定したファクタモデルを採用し、ファクタにはオレンシュタイン・ウーレンベック過程を用いた。この際に、ファクタが直接観測できる場合と観測できずフィルタリングを用いて推定しながら投資に利用する場合、推定をせず投資をする場合を想定し、期待効用にどのような影響を与えるかを可能な限り理論的に考察し、理論的に計算できない部分に関してはシミュレーションを用いて、数値的に考察した。効用関数としては対数効用を用いた。当然の結果ではあるが、ファクタの情報が得られる状況の投資家が最も効用を大きくすることができる。一方、ファクタの情報が得られない投資家でフィルタリングを用いてファクタを推定しながら投資を行う投資家とファクタに自分の予測値を用いて投資を行う投資家では前者の方が効用を大きくできることが示された。その差がモデルパラメータに対してどのように変化するかも数値実験を中心に考察した。また、これらの数値実験の中で、フィルタリングを用いてファクタを推定しながら投資をするという投資家のポートフォリオが極端に小さくなることが少ないという当初想定していなかった結果が得られた。この部分に関しては理論的考察を中心に、今後も研究していく必要性が感じられた。

- (2) フラクショナル・ブラック・ショールズモデルに対してマリアヴァン解析を用いた Greeks 表現を与えた。より具体的には、ヨーロッパ型オプションに関しては、デルタ、ガンマ、ベガの3種類の表現を与えた。2資産のヨーロッパ型オプションに対してはデルタとクロスガンマの2種類の表現を与えた。アジア型オプションに関してはデルタの表現を与えた。また、これらに関する数値実験では上で得られた表現とそれらにローカライゼーションと呼ばれる手法を併せたもの、数値微分で一般に用いられる有限差分法の3種類の方法を用いてシミュレーションを行い、比較をした。その結果、通常のブラウン運動を用いたときと同様に、ペイオフ関数が不連続な場合にはマリアヴァン解析を用いた方法が有限差分法に対して非常に有効であることが確かめられた。また、ペイオフ関数が連続な場合では、マリアヴァン解析を用いた方法と有限差分法ではシミュレーションの精度は似たものであったが、マリアヴァン解析を用いた表現にローカライゼーションを併せた計算手法では非常に効果的に計算できることが示された。今後は株価過程に確率的ヴォラティリティモデルを採用し、そのボラティリティ過程にフラクショナルブラウン運動を用いたモデルにマリアヴァン解析を用いた Greeks 表現

を与え、同様の数値実験を行うことが考えられ、更なる研究の広がりを見せることが期待される。

- (3) 日本の株式市場における跳びの存在に関する研究では、Barndorff-Nielsen and Shephard や Jiang and Oomen, Lee and Mykland の方法のいずれの場合においても、企業などには依るもののポアソン型のジャンプの存在が確かめられた。仮説検定を行う際のデータはリーマンショック時を中心としたデータを用いた。また、Lee and Mykland の方法では跳びがあった時間を特定することが出来るため跳びのサイズの分布や跳びが起こる頻度に対する分布に対して核型推定法を用いて推定した。更に、株価ではなくボラティリティに対しても同様の仮説検定を行った。ボラティリティは複数の推定手法を用いて推定したものを、各場合に跳びが存在するかどうかを検定し、跳びのサイズ分布や頻度の分布を推定した。最後に、Lee and Hannig の方法を用いて小さいジャンプと呼ばれるレヴィ型の跳びの存在について検定を行った。こちらでもいくらかジャンプを検出する結果が得られ、それらのサイズの分布や頻度の分布を推定した。これらの結果は統計量に因るものであることは注意しておく。次に、経済全体のバブルではなく、個別株などのような単一資産に対する資産バブルについては、Jarrow, Kchia and Protter の 2 つの方法を用いて、日本の株式市場で検出されるかどうかの数値実験を行った。1 つ目の方法はパラメータ法と呼ばれ、ボラティリティがパラメータを用いて表されるある関数のクラスを特定し、そのパラメータを推定することでリスク中立確率の下での割引株価がマルチンゲールか真に局所マルチンゲールかを判断し、資産バブルかどうかを判定する方法である。この方法を用いていくつかの資産バブルと思われる株価のデータが日本の株式市場に存在することが確かめられたが、安定的な結果は得られなかった。他方、2 つ目の方法は再生核ヒルベルト空間法を用いた方法で、この方法では比較的安定的に日本の株式市場において資産バブルの検出が成された。ただし、ここでもこれらの結果は統計量に依存することは述べておく。最後に、株価がある閾値を超えた際に急激に変化する現象があるが、そのような現象をモデル化する一つの方法として、ドリフト係数に不連続関数を持つてくる方法がある。そのような確率微分方程式に対してオイラー・丸山近似を用いて近似した際の、弱近似のオーダーを与えた。今回得られたオーダーは数値実験的に最適なものではないと考えられるが、このような試みは初めてであり、今後、より良いオーダ

ーを得ようとする理論研究は多数成されると想定され、今回の結果はその最初の一步を与える重要なものとなると考えられる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① A. Kohatsu-Hoga, N. Vayatis, K. Yasuda, Strong Consistency of Bayesian Estimator for the Ornstein-Uhlenbeck Process, Inspired by Finance, The Musiela Festschrift, 査読有、2013、411-438、DOI:10.1007/978-3-319-02069-3\_19.
- ② A. Kohatsu-Higa, K. Yasuda, An Ornstein-Uhlenbeck Type Process which Satisfies Sufficient Conditions for a Simulation-Based Filtering Procedure, Malliavin Calculus and Stochastic Analysis, 査読有、2013、173-194、DOI:10.1007/978-1-4614-5906-4\_8.
- ③ K. Yasuda, Sensitivity Analysis of Expectation with respect to Stochastic Differential Equations with Long Memory through Malliavin Calculus, Transactions of the Institute of Systems, Control and Information Engineers, 査読有、Vol. 25, no. 11, 2012、328-335、<http://www.iscie.or.jp/j/?%E3%80%8CE3%82%B7%E3%82%B9%E3%83%86%E3%83%A0%E5%88%B6%E5%BE%A1%E6%83%85%E5%A0%B1%E5%AD%A6%E4%BC%9A%E8%AB%96%E6%96%87%E8%AA%8C%E3%80%8D%E7%AC%AC25%E5%B7%BB#T25-11>.
- ④ K. Yasuda, Some Numerical Results of Sensitivity Analysis for Expected Values w.r.t. Linear SDE with Long Memory, Proceedings of the 43th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, 査読有、2012、CD-ROM (9 pages).
- ⑤ Y. Barada, K. Yasuda, Testing for Levy type jumps in Japanese stock market under the financial crisis using high-frequency data, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 査読有、Vol. 8, 2012、2215-2223、<http://www.ijicic.org/contents.htm>.
- ⑥ A. Kohatsu-Higa, N. Vayatis, K. Yasuda, Strong consistency of Bayesian estimator under discrete observation and unknown transition density, Progress in Probability, 査読有、Vol. 65, 2011、165-187、DOI:10.1007/978-3-0348-0097-6\_10.

- ⑦ K. Aoki, Y. Barada, J. Tamura, K. Yasuda, Volatility estimations under the financial crisis in the Japanese market and testing for jumps, Proceedings of the 42th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, 査読有、2011、112-120.
- ⑧ Y. Barada, Y. Kubo, K. Yasuda, Testing for jumps in Japanese stock market under the financial crisis through high-frequency data, Proceedings of the 42th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, 査読有、2011、102-111.

[学会発表] (計 11 件)

- ① 安田和弘、確率微分方程式のオイラー・丸山近似について、数理科学セミナー、2014年1月29日、一橋大学.
- ② Y. Asakura, K. Yasuda, On Effects of Estimations and Information for Expected Log-Utility Maximization Problems, The 45<sup>th</sup> ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, 2013年11月1日、琉球大学.
- ③ 安田和弘、不連続ドリフト係数を持つ確率微分方程式の弱近似について、阪大確率論セミナー、2013年10月22日、大阪大学.
- ④ 安田和弘、確率インパルス制御問題の数値計算法について、CRESTセミナー、2012年8月16日、立命館大学.
- ⑤ 安田和弘、確率インパルス制御問題の数値計算法について、オペレーションズリサーチ学会北海道支部・サマースクール、2012年8月7日、定山溪ビューホテル.
- ⑥ K. Yasuda, On Weak Approximation of Stochastic Differential Equations with Discontinuous Drift Coefficient, The Second NIMS Summer School in Probability 2012, 2012年6月19日、NIMS, South Korea.
- ⑦ K. Yasuda, On Weak Approximation of Stochastic Differential Equations with Discontinuous Drift Coefficient, CREST and 4<sup>th</sup> Ritsumeikan-Florence Workshop on Risk, Simulation and Related Topics, 2012年3月8日、立命館大学 APC.
- ⑧ 安田和弘、不連続ドリフト係数を持つ確率微分方程式に対する近似、確率論シンポジウム、2011年12月19日、関西大学.
- ⑨ K. Yasuda, Some Numerical Results of Sensitivity Analysis for Expected Values w.r.t. Linear SDE with Long Memory, The 43th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, 2011年10月29

日、立命館大学.

- ⑩ 安田和弘、A. Kohatsu-Higa, A. Lejay, 不連続ドリフト係数を持つ確率微分方程式に対する近似、経済の数理解析、2011年10月16日、同志社大学.
- ⑪ 安田和弘、フラクショナルブラウン運動を用いた確率解析及びその応用、CRESTセミナー、2011年8月8日、立命館大学.

[その他]

ホームページ等

<http://kenkyu-web.i.hosei.ac.jp/Profiles/22/0002150/theses.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

安田 和弘 (YASUDA, Kazuhiro)

法政大学・理工学部・准教授

研究者番号：80509638